Homogene kompakte Räume

Diplomarbeit

Stefan Geschke

Finowstr. 20

12045 Berlin

Inhaltsverzeichnis

Einleitung 5

1. Die Fragestellung 5
2. Lineare Ordnungen 6
3. Boolesche Räume und Stone-Dualität 7
4. Algebraische und topologische Homogenität 8
5. Homogene Kompakta hoher Zellularität 9
6. $\beta\omega$, ω^* und F-Räume 9
7. Beispiele 11

Inhaltsübersicht 12

Quellen 12

Kapitel 1. Über lineare Ordnungen 15

1. Vorbereitungen 15
2. Homogene kompakte lineare Ordnungen 16
3. Potenzen von Bildern kompakter linearer Ordnungen 17

Kapitel 2. Große homogene Räume 27

1. Vorbemerkungen 27
2. Über $\beta\omega$ und ω^* 29
3. Die Inhomogenität gewisser Produkte mit F-Räumen 40

Kapitel 3. Beispiele 45

1. Die lexikographischen Ordnungen 2^γ 45
2. Erweiterungen kompakter Räume 49
3. Eine Baumalgebra 53

Literaturverzeichnis 65

Einleitung

1. Die Fragestellung

Ein topologischer Raum heißt homogen, falls für je zwei Punkte ein Autohomöomorphismus des Raumes existiert, der den ersten Punkt auf den zweiten abbildet. Kompakt meint im Folgenden immer quasikompakt und Hausdorffsch. Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Frage, welche kompakten Räume homogen sind.

Die einfachsten Beispiele für homogene Kompakta sind kompakte topologische Gruppen, da für eine topologische Gruppe $(G, \cdot)$ und zwei Elemente a und b von G die Abbildung $x \longmapsto a^{-1}xb$ ein Homöomorphismus von G nach G ist, der a auf b abbildet. Für einen homogenen Raum X ist auch jede Potenz X^{λ} homogen, oder allgemeiner, Produkte homogener Räume sind homogen.

Damit lassen sich also kompakte homogene Räume konstruieren, die beliebig groß sind bzgl. der Kardinalität, des Gewichtes und des Charakters. Das Gewicht eines topologischen Raumes ist dabei die minimale Mächtigkeit einer Basis der Topologie, und der Charakter ist die minimale Mächtigkeit einer Umgebungsbasis eines Punktes. Offen bleibt die Frage, ob die Zellularität solcher Räume, d.h das Maximum von ω und dem Supremum der Mächtigkeiten von disjunkten offenen Familien in X, echt größer als 2^{ω} sein kann. Beispiele für homogene Kompakta mit der Zellularität 2^{ω} finden sich in dieser Arbeit.

Ein topologischer Raum heißt Boolesch, wenn er kompakt ist und eine Basis aus offen-abgeschlossenen Mengen besitzt. Ein Raum ist genau dann Boolesch, wenn er Stone-Raum einer Booleschen Algebra ist. Mit der Frage nach den möglichen Zellularitäten homogener Kompakta im Zusammenhang steht die Frage, ob sich jede Boolesche Algebra einbetten läßt in eine Algebra, deren Stone-Raum homogen ist, das heißt, ob jeder Boolesche Raum stetiges Bild eines homogenen Booleschen Raumes ist. Falls die Zellularität homogener kompakter Räume beschränkt ist, so ist die Antwort auf diese Frage negativ, da die Zellularitäten von Booleschen Räumen unbeschränkt sind.

Es gibt kompakte Räume, die selbst nicht homogen sind, aber homogene Potenzen haben. Ein Beispiel ist das kompakte Einheitsintervall I, denn wie Keller [**10**] gezeigt hat, ist I^{ω} homogen.

Es hat jedoch nicht jedes Kompaktum homogene Potenzen. Ein Beispiel ist die disjunkte Vereinigung des einpunktigen Raumes mit I (van Douwen [**5**]). Jede Potenz dieses Raumes hat nämlich Zusammenhangskomponenten unterschiedlicher

Kardinalität, da die Zusammenhangskomponenten in einem Produkt genau die Produkte von Zusammenhangskomponenten der Faktoren sind.

Für zwei Klassen von kompakten Räumen lassen sich gute Resultate hinsichtlich der Homogenität bzw. Inhomogenität ihrer Potenzen erzielen, nämlich für stetige Bilder kompakter linearer Ordnungen und für unendliche kompakte F-Räume. F-Räume sind Räume, in denen disjunkte offene F_σ-Mengen disjunkte Abschlüsse haben. Bei der Untersuchung kompakter F-Räume spielen die Booleschen Räume $\beta\omega$ und ω^*, also die Stone-Čech Kompaktifizierung von ω und das Komplement von ω in $\beta\omega$, eine wichtige Rolle.

2. Lineare Ordnungen

Unter einer linearen Ordnung ist im Folgenden immer eine durch $<$ linear geordnete Menge L versehen mit der Ordnungstopologie, die erzeugt wird von den offenen Intervallen, zu verstehen. Kompakte lineare Ordnungen lassen sich topologisch leicht untersuchen. Das hat folgende Gründe:

Eine lineare Ordnung L ist kompakt genau dann, wenn sie vollständig ist, d.h. wenn jede Teilmenge von L ein Supremum und ein Infimum in L hat.

Eine kompakte lineare Ordnung L ist folgenkompakt, d.h. jede abzählbare Folge in L besitzt eine konvergente Teilfolge: Man wähle aus einer Folge in L mit dem Satz von Ramsey eine monotone, unendliche Teilfolge aus. Diese Teilfolge konvergiert gegen ihr Supremum bzw. Infimum.

Jede offene Teilmenge U einer kompakten linearen Ordnung läßt sich eindeutig schreiben als Vereinigung offener Intervalle, die maximal sind bzgl. des Enthaltenseins in U.

Um eine Umgebungsbasis eines Punktes zu kennen, genügt es, zwei nichttriviale, durch Ordinalzahlen indizierte Folgen zu kennen; eine, die von unten gegen den Punkt konvergiert, und eine, die von oben gegen den Punkt konvergiert. Der Charakter eines Punktes ist das Produkt der minimalen Mächtigkeiten zweier solcher Folgen.

Damit läßt sich zeigen, daß kompakte, homogene lineare Ordnungen das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllen.

Schließlich sind abgeschlossene Unterräume von kompakten linearen Ordnungen wieder kompakte lineare Ordnungen.

Im ersten Kapitel dieser Arbeit wird gezeigt, daß stetige Bilder kompakter linearer Ordungen, die homogene Potenzen besitzen, das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllen. Der Schlüssel zu diesem Satz ist die Tatsache, daß in einem Bild X einer kompakten linearen Ordnung ein Punkt von überabzählbarem Charakter ein sogenannter zellulärer κ-Punkt für ein reguläres $\kappa > \omega$ ist. Wenn ein kompakter Raum einen solchen Punkt enthält und homogene Potenzen besitzt, so hat jeder Punkt überabzählbaren Charakter. Das führt bei Bildern kompakter linearer Ordnungen zu einem Widerspruch.

Insbesondere besitzt zum Beispiel die lexikographische Ordnung 2^{ω_1} keine homogenen Potenzen.

3. Boolesche Räume und Stone-Dualität

Boolesche Räume lassen sich mit Hilfe der Stoneschen Dualitätstheorie untersuchen:

Für jeden topologischen Raum X ist die Menge der offen-abgeschlossenen Teilmengen von X Träger einer Subalgebra der Potenzmengenalgebra $\mathcal{P}(X)$ von X. Diese Subalgebra wird $\operatorname{Clop} X$ (von *closed-open*) genannt. Es stellt sich die Frage, ob sich X aus $\operatorname{Clop} X$ rekonstruieren läßt.

Jedem Punkt $x \in X$ läßt sich eine Abbildung f_x von $\operatorname{Clop} X$ in die kleinste echte Boolesche Algebra, nämlich die mit den Elementen 0 und 1, zuordnen: Für jedes $a \in \operatorname{Clop} X$ sei $f_x(a) := 1$, falls x in a enthalten ist, und 0 sonst. Offenbar ist jedes f_x ein Boolescher Homomorphismus. Das Urbild der Eins unter f_x ist ein Ultrafilter in $\operatorname{Clop} X$. Man nenne diesen $\mathcal{F}_x$. Die Abbildung $x \longmapsto \mathcal{F}_x$ ist injektiv genau dann, wenn für je zwei Punkte von X eine offen-abgeschlossene Teilmenge von X existiert, die den einen Punkt enthält und den anderen nicht. Für alle $x \in X$ ist x dann das einzige Element von $\bigcap \mathcal{F}_x$. Ein Raum X, der das erfüllt, heißt total unzusammenhängend.

Wenn X zusätzlich kompakt ist, so ist für jeden Ultrafilter $\mathcal{F}$ in $\operatorname{Clop} X$ der Schnitt $\bigcap \mathcal{F}$ nichtleer, da $\mathcal{F}$ eine Familie nichtleerer, abgeschlossener Teilmengen von X ist, die abgeschlossen unter endlichen Schnitten ist. Die kompakten, total unzusammenhängenden Räume sind genau die Booleschen Räume.

Für eine Boolesche Algebra A sei $\operatorname{Ult} A$ die Menge der Ultrafilter in A. Für einen Booleschen Raum X ist, wie oben gezeigt, die Abbildung $h : X \longrightarrow \operatorname{Ult} \operatorname{Clop} X; x \longmapsto \mathcal{F}_x$ bijektiv. Eine offen-abgeschlossene Teilmenge a von X wird unter f abgebildet auf die Menge der Ultrafilter in $\operatorname{Clop} X$, die a enthalten. Versieht man nun $\operatorname{Ult} \operatorname{Clop} X$ mit der Topologie, die von diesen Mengen erzeugt wird, erhält man einen zu X homöomorphen topologischen Raum.

Diese Konstruktion läßt sich nun für jede Boolesche Algebra A nachahmen. Man versieht $\operatorname{Ult} A$ mit der Topologie, die von den Mengen $\{\mathcal{F} \in \operatorname{Ult} A : a \in \mathcal{F}\}$, $a \in A$, erzeugt wird, und erhält den Stone-Raum der Algebra A. Es zeigt sich, daß $\operatorname{Ult} A$ so zu einem Booleschen Raum wird und $\operatorname{Clop} \operatorname{Ult} A$ isomorph zu A ist.

Damit kennt man einen Booleschen Raum X, wenn man $\operatorname{Clop} X$ kennt, und eine Boolesche Algebra A, wenn man $\operatorname{Ult} A$ kennt. Eine stetige Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ induziert einen Booleschen Homomorphismus $f^* : \operatorname{Clop} Y \longrightarrow \operatorname{Clop} X$, der eine offen-abgeschlossene Menge in Y auf ihr offen-abgeschlossenes Urbild unter f in X abbildet. Umgekehrt induziert ein Boolescher Homomorphismus $h : A \longrightarrow B$ eine stetige Abbildung $h^* : \operatorname{Ult} B \longrightarrow \operatorname{Ult} A$, die einen Ultrafilter in B auf sein Urbild unter h abbildet, das ein Ultrafilter in A ist. Setzt man $X^* := \operatorname{Clop} X$ und $A^* := \operatorname{Ult} A$, so ist * einerseits ein kontravarianter Funktor von der Kategorie der Booleschen Algebren mit den Homomorphismen in die der Booleschen Räume mit den stetigen Abbildungen und andererseits ein kontravarianter Funktor von der Kategorie der Booleschen Räume in die der Booleschen Algebren. Die Hintereinanderausführung dieser beiden Funktoren ist bis auf Isomorphie bzw. Homöomorphie die Identität.

Diese Theorie liefert folgende Beispiele für kompakte Räume, die homogene Potenzen besitzen:

Für den Raum $\alpha\omega$, bestehend aus einer konvergenten Folge zusammen mit ihrem Grenzwert, ist die Potenz $(\alpha\omega)^\omega$ homogen. Allgemein ist für jeden Booleschen Raum X von abzählbarem Gewicht X^ω homöomorph zu 2^ω, da die Boolesche Algebra $\operatorname{Clop} X^\omega$ isomorph zur ω-fachen freien Potenz von $\operatorname{Clop} X$ und damit eine abzählbare, atomlose Boolesche Algebra ist. Es gibt jedoch, wie man mit einem back-and-forth-Argument sieht, bis auf Isomorphie nur eine solche, nämlich $\operatorname{Fr} \omega$, die freie Algebra über ω-vielen Erzeugern. Letztere ist isomorph zu $\operatorname{Clop} 2^\omega$. 2^ω ist trivialerweise homogen.

4. Algebraische und topologische Homogenität

Eine Boolesche Algebra A heißt algebraisch homogen, falls für alle $a \in A \setminus \{0\}$ die Relativalgebra $A \restriction a$ isomorph zu A ist. Topologisch heißt das, daß eine Algebra genau dann homogen ist, wenn $\operatorname{Ult} A$ homöomorph zu jeder nichtleeren, offen-abgeschlossenen Teilmenge von $\operatorname{Ult} A$ ist. Der Name dieser Eigenschaft kommt daher, daß eine Algebra A genau dann homogen ist, wenn für je zwei Elemente $a, b \in A \setminus \{0, 1\}$ ein Automorphismus von A existiert, der a auf b abbildet. Algebraische Homogenität hat zunächst wenig mit topologischer Homogenität zu tun. Trivialerweise sind die endlichen diskreten Räume homogen, aber ihre dualen Algebren sind endlich und daher nicht algebraisch homogen, falls der Raum mindestens zwei Punkte hat. Van Douwen [**6**] hat einen unendlichen homogenen Booleschen Raum X konstruiert, dessen duale Algebra $\operatorname{Clop} X$ nicht algebraisch homogen ist. Andererseits ist die Vervollständigung der ω-fachen freien Potenz einer Booleschen Algebra algebraisch homogen (Koppelberg [**12**]), was insbesondere zeigt, daß sich jede Boolesche Algebra in eine algebraisch homogene einbetten läßt. Jedoch ist der duale Raum einer vollständigen, unendlichen Algebra ein unendlicher kompakter F-Raum und damit nicht homogen.

Für Boolesche Räume X, die das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllen, impliziert jedoch die algebraische Homogenität von $\operatorname{Clop} X$ die topologische von X. Im dritten Kapitel wird gezeigt, daß für abzählbare, unzerlegbare Ordinalzahlen γ der Raum 2^γ versehen mit der lexikographischen Ordnung und der diesbezüglichen Ordnungstopologie Boolesch ist, einen abzählbaren Charakter hat und die duale Algebra homogen ist. Damit sind diese Räume topologisch homogen. Dabei heißt eine Ordinalzahl unzerlegbar, wenn für alle $\alpha, \beta < \gamma$, $\alpha + \beta < \gamma$ gilt.

5. Homogene Kompakta hoher Zellularität

Für $\omega < \gamma < \omega_1$ hat die lexikographische Ordnung 2^γ die Zellularität 2^ω. Homogene Kompakta von höherer Zellularität sind nicht bekannt. Es dürfte auch schwierig zu sein, solche zu konstruieren:

Kompakte Räume, die das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllen, haben nach einem Resultat von Arkhangel'skiĭ höchstens die Mächtigkeit 2^ω und damit auch höchstens die Zellularität 2^ω. Im ersten Kapitel dieser Arbeit wird gezeigt, daß Bilder kompakter linearer Ordnungen, die homogen sind oder homogene Potenzen besitzen, das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllen. Die Zellularität eines Produktes $\prod_{i\in I} X_i$ kann nicht höher sein als die eines endlichen Produktes $\prod_{i\in I'} X_i$, $I' \subseteq I$ und $|I'| < \omega$. Endliche Produkte von Räumen vom Charakter ω haben aber den Charakter ω und damit im kompakten Falle eine Zellularität von höchstens 2^ω. Auch allgemein ist die Zellularität von Produkten beschränkt durch die Zellularität der Faktoren:

Ein Produkt von Räumen, deren Zellularität höchstens κ beträgt, hat höchstens die Zellularität 2^κ. Für $\kappa = \omega$ gibt es unter Jensens Axiom $\diamondsuit$ einen Raum mit der Zellularität κ mit Potenzen echt größerer Zellularität. Das ist eine Souslin-Gerade, deren Quadrat die Zellularität ω_1 hat. Allerdings folgt aus MA, daß Produkte topologischer Räume mit abzählbarer Zellularität höchstens die Zellularität ω haben. Es ist also nicht trivial, topologische Räume zu konstruieren, deren Produkt eine höhere Zellularität als ein Faktor hat.

Kompakte topologische Gruppen eignen sich auch nicht als homogene Räume hoher Zellularität: Kuz'minov [**16**] hat gezeigt, daß jede kompakte topologische Gruppe ein stetiges Bild eines Cantorraumes ist und damit höchstens die Zellularität ω hat.

6. $\beta\omega$, ω^* und F-Räume

Ein sehr wichtiger Boolescher Raum ist $\beta\omega$, die Stone-Čech Kompaktifizierung von ω mit der diskreten Topologie. Es ist $\beta\omega = \operatorname{Ult}\mathcal{P}(\omega)$. Jedes $n \in \omega$ identifiziert man mit dem von $\{n\}$ erzeugten Hauptultrafilter. $p \in \beta\omega$ ist isoliert genau dann, wenn p Hauptultrafilter ist. Damit läßt sich ω als offene, diskrete und dichte Teilmenge von $\beta\omega$ auffassen. Läßt man die isolierten Punkte weg, erhält man den Raum $\omega^* = \beta\omega \setminus \omega$. ω^* ist der duale Raum zu der Algebra $\mathcal{P}(\omega)/fin$, wobei fin das Ideal der endlichen Teilmengen von ω bezeichnet.

Daß $\beta\omega$ inhomogen ist, ist trivial. Nicht trivial sind jedoch die Fragen, ob $\beta\omega$ homogene Potenzen hat und ob ω^* homogen ist. Aber für ω^* läßt sich die Inhomogenität auf recht natürliche Weise zeigen. Man kann Punkte finden, die topologische Eigenschaften haben, die nicht jeder Punkt von ω^* haben kann. Unter CH oder MA besitzt ω^* einen P-Punkt. Das ist ein Punkt x mit der Eigenschaft, daß abzählbare Durchschnitte von Umgebungen von x wieder Umgebungen von x sind. Unter CH findet man einen P-Punkt in ω^*, der sich ja als Ultrafilter in $\mathcal{P}(\omega)/fin$ auffassen läßt, wie folgt: Man startet mit einer beliebigen abzählbaren Teilmenge p_0

von $\mathcal{P}(\omega)/fin$, die die endliche Durchschnittseigenschaft hat, die man dann mittels Auswahlaxiom induktiv zu einem Ultrafilter p ergänzt. Wegen CH geht das in ω_1 Schritten. Dabei nimmt man im α-ten Schritt noch eine untere Schranke für p_α, die echt größer als 0 ist, dazu. Das geht, da in $\mathcal{P}(\omega)/fin$ für jede abzählbare Teilmenge mit der endlichen Durchschnittseigenschaft eine solche untere Schranke existiert. Ein so konstruierter Ultrafilter p ist ein P-Punkt. Jedoch kann nicht jeder Punkt von ω^* ein P-Punkt sein, da ω^* sonst endlich sein müßte.

Unter $\neg$CH ist es schwieriger, geeignete Punkte in ω^* zu finden, da nach einem Resultat von Shelah [**19**] die Nichtexistenz von P-Punkten in ω^* konsistent mit ZFC ist. Aber es lassen sich in ZFC mit Hilfe von Familien von Teilmengen von ω, die gewisse Unabhängigkeitseigenschaften haben, induktiv freie Ultrafilter über ω konstruieren, die schwache P-Punkte von ω^* sind. Das sind Punkte, die nicht im Abschluß einer abzählbaren Menge liegen. Diese Konstruktion stammt von Kunen [**13**]. Wie im Falle der P-Punkte kann nicht jeder Punkt in ω^* schwacher P-Punkt sein: Man wähle eine abzählbar unendliche, diskrete Teilmenge A von ω^*. Kein Punkt von $\overline{A} \setminus A$ ist dann schwacher P-Punkt.

Es gibt noch zwei weitere Methoden, die Inhomogenität von ω^* zu zeigen. Die eine stammt von M.E. Rudin und Z. Frolik: Für einen freien Ultrafilter p über ω und eine Folge $(x_n)_{n\in\omega}$ in einem kompakten Raum X definiert man den p-Limes der Folge als das eindeutig bestimmte $y \in X$, für das für jede Umgebung U von y die Menge $\{n \in \omega : x_n \in U\}$ ein Element von p ist. Es läßt sich zeigen, daß ein $p \in \omega^*$ nicht p-Limes einer diskreten Folge in ω^* ist. Man wähle eine diskrete Folge $(x_n)_{n\in\omega}$ in ω^*. Sei $y \in \omega^*$ der p-Limes dieser Folge. Es kann dann keinen Autohomöomorphismus von ω^* geben, der y auf p abbildet.

Die dritte Methode, die Inhomogenität von ω^* zu zeigen, benutzt partielle Ordnungen auf $\beta\omega$. Eine dieser partiellen Ordnungen ist die Rudin-Keisler-Ordnung $\preceq$, die sich so definieren läßt: Für zwei Elemente p und q von $\beta\omega$ ist $p \preceq q$ genau dann, wenn es ein $f : \omega \longrightarrow \omega$ gibt, dessen Stone-Erweiterung $\beta f : \beta\omega \longrightarrow \beta\omega$ den Punkt q auf p abbildet.

Die Konstruktion der schwachen P-Punkte läßt sich so verfeinern, daß man 2^ω paarweise Rudin-Keisler-unvergleichbare schwache P-Punkte erhält. Nun läßt sich das Argument von Rudin und Frolik dahingehend abwandeln, daß man zeigt, daß für zwei Rudin-Keisler unvergleichbare schwache P-Punkte p und q von ω^* der p-Limes einer abzählbaren, diskreten Folge in einem kompakten F-Raum sich nicht durch einen Autohomöomorphismus auf den q-Limes der Folge überführen läßt. Die Verbindung zwischen kompakten F-Räumen und $\beta\omega$ ist dabei die Folgende:

$\beta\omega$ ist selbst F-Raum, und der Abschluß einer abzählbar unendlichen, diskreten Teilmenge eines kompakten F-Raumes ist homöomorph zu $\beta\omega$.

Es läßt sich zeigen, daß $\beta\omega$ sich in ein abzählbares Produkt von T_2-Räumen einbetten läßt genau dann, wenn es sich in einen der Faktoren einbetten läßt. Damit läßt sich das Ergebnis über unendliche kompakte F-Räume auf deren Potenzen und gewisse Produkte mit solchen übertragen (Kunen [**14**]). Insbesondere besitzt also $\beta\omega$ keine homogenen Potenzen.

7. Beispiele

Im dritten Kapitel wird eine Methode gezeigt, unendliche homogene Kompakta so zu erweitern, daß sie kompakt und homogen bleiben. Die Erweiterung $E(X)$ eines kompakten Raumes X ohne isolierte Punkte ist aber ein stetiges Bild von $X \times 2^X$ und hat damit auch nur die Zellularität von X. Die Erweiterung $E(2^\kappa)$ eines Cantorraumes 2^κ ist ein homogener Raum, der stetiges, nulldimensionales Bild eines Cantorraumes unter einer irreduziblen Abbildung ist, unter der jeder Punkt genau zwei Urbilder besitzt, und nicht homöomorph zu einem Cantorraum.

Ebenfalls im dritten Kapitel wird unter $\diamond$ ein inhomogener Boolescher Raum X ohne isolierte Punkte konstruiert, der das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt und dessen endliche Potenzen inhomogen sind. Die Autohomöomorphismen von X^n sehen punktweise aus wie Permutationen der Koordinaten, d.h. ein Punkt $(x_0, \ldots, x_{n-1})$ wird abgebildet auf einen Punkt $(x_{\sigma(0)}, \ldots, x_{\sigma(n-1)})$, wobei σ eine Permutation auf n ist. Die Algebra $\operatorname{Clop} X$ ist starr, d.h. sie besitzt nur triviale Automorphismen. Die Algebra wird erzeugt von einem geeignet konstruierten Souslin-Baum, wobei die Baumordnung die inverse Ordnung der Algebra ist.

Dieses Beispiel ist entstanden als Schritt auf dem Weg zu einem Gegenbeispiel zu einer Aussage von Motorov. Diese lautet, daß für jeden Booleschen Raum X, der das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, X^ω homogen ist (Arkhangel'skiǐ [**1**]). Shapiro vermutet, wie er dem Autor mitteilte, daß diese Aussage falsch ist.

Inhaltsübersicht

Im ersten Kapitel dieser Arbeit werden kompakte lineare Ordnungen und ihre stetigen Bilder untersucht. Der Hauptsatz stammt von Murray Bell [**2**] und besagt, daß stetige Bilder kompakter linearer Ordnungen, die homogene Potenzen besitzen, das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllen. Die Abschwächung „homogene, kompakte lineare Ordnungen erfüllen das erste Abzählbarkeitsaxiom“ war schon vor Bells Resultat bekannt und wird elementar gezeigt.

F-Räume, $\beta\omega$ und ω^* werden im zweiten Kapitel behandelt. Zunächst wird gezeigt, daß $\beta\omega$ sich in ein abzählbares Produkt von T_2-Räumen genau dann einbetten läßt, wenn es sich in einen der Faktoren einbetten läßt. Dieses Resultat stammt von Malykhin. Der erste Teil des Beweises, nämlich die Reduktion von einem abzählbaren Produkt auf ein endliches, stammt vom Autor. Der zweite Teil, die Reduktion von einem endlichen Produkt auf einen Faktor, basiert auf einem Hinweis von Shapiro.

Ebenfalls im zweiten Kapitel wird mit einer Konstruktion von Kunen [**13**] die Existenz einer Teilmenge der Mächtigkeit 2^ω von ω^* gezeigt, deren Elemente paarweise Rudin-Keisler unvergleichbare schwache P-Punkte sind. Dieses Ergebnis wird benutzt, um zu zeigen, daß gewisse Produkte mit unendlichen kompakten F-Räumen inhomogen sind. Dieses Resultat stammt ebenfalls von Kunen [**14**].

Im dritten Kapitel finden sich Beispiele. Zunächst wird gezeigt, daß für jede abzählbare, unzerlegbare Ordinalzahl γ die lexikographische Ordnung 2^γ vollständig, topologisch homogen und, für $\gamma > \omega$, von überabzählbarer Zellularität ist. Dieses Beispiel stammt von Maurice. Der Beweis stammt vom Autor.

Dann wird eine Methode von Pašenkov [**18**] vorgestellt, jedem kompakten Raum X ohne isolierte Punkte eine kompakte Erweiterung $E(X)$ zuzuordnen, so daß $E(X)$ nulldimensional ist, falls X nulldimensional ist, und $E(X)$ homogen ist, falls X homogen ist. Für den Fall, daß X ein Cantorraum von überabzählbarem Gewicht ist, ist $E(X)$ ein homogener Boolescher Raum, der dyadisch ist, also stetiges Bild eines Cantorraumes, aber nicht homöomorph zu einem Cantorraum sein kann.

Schließlich wird eine Baumalgebra konstruiert, deren Stone-Raum X folgende Eigenschaften hat: X hat keine isolierten Punkte und die endlichen Potenzen sind inhomogen. Genauer gibt es für jedes $n \in \omega$, jeden Autohomöomorphismus h von X^n und alle $x_0, \ldots, x_{n-1} \in X$ eine Permutation $\sigma \in S_n$ mit $h\big((x_0, \ldots, x_{n-1})\big) = (x_{\sigma(0)}, \ldots, x_{\sigma(n-1)})$. Dieses Beispiel stammt von dem Autor dieser Arbeit.

Quellen

Alle benutzten Resultate aus der allgemeinen Topologie findet man, wenn nichts anderes angegeben ist, bei Engelking [**7**]. Eine gute Übersicht über topologische Kardinalzahlfunktionen wie Zellularität, Gewicht und Charakter liefert Hodel [**9**]. Alle wesentlichen Informationen über Boolesche Algebren und Stone-Dualität stammen aus Koppelbergs Handbuch [**11**]. Die benötigte Mengenlehre steht bei Kunen [**15**]. Die Räume $\beta\omega$ und ω^* werden von van Mill [**17**] umfangreich behandelt.

KAPITEL 1

Über lineare Ordnungen

Das Ziel dieses Kapitels ist es, zu beweisen, daß jedes stetige Bild einer kompakten linearen Ordnung, welches homogene Potenzen hat, das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Eine Abschwächung dieses Satzes läßt sich elementar zeigen, nämlich daß homogene lineare Ordnungen das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllen. Alle nichtelementaren Sätze dieses Kapitels stammen von Bell [**2**].

1. Vorbereitungen

Im Folgenden bezeichnet „die lineare Ordnung $(L,<)$" immer eine Menge L mit einer linearen Ordung $<$ auf L zusammen mit einer Topologie, der sogenannten Ordnungstopologie auf L bzgl. $<$. Für den topologischen Raum wird dann wie üblich einfach L geschrieben.

DEFINITION 1.1. Sei $(L,<)$ eine linear geordnete Menge. Die *Ordnungstopologie* auf L bzgl. $<$ ist die Topologie, deren Basis die offenen Intervalle von $(L,<)$ bilden. $\square$

DEFINITION 1.2. Für eine lineare Ordnung $(L,<)$, $x \in L$ und $R = <, >, \leq$ oder $\geq$ ist $Rx := \{a \in L : aRx\}$. $\square$

Bekannt sind folgende Tatsachen:

LEMMA 1.3. *Jede offene Teilmenge O einer linearen Ordnung L läßt sich eindeutig schreiben als Vereinigung disjunkter offener Intervalle, die maximal bezüglich des Enthaltenseins in O sind.* $\square$

Ein Raum X ist folgenkompakt genau dann, wenn jede abzählbare Folge in X eine konvergente Teilfolge besitzt.

LEMMA 1.4. *Jede kompakte lineare Ordnung ist folgenkompakt.* $\square$

Für die Untersuchung linearer Ordnungen erweisen sich drei Kardinalzahlfunktionen als nützlich.

DEFINITION 1.5. Für eine lineare Ordnung $(L,<)$ heißt $A \subseteq L$ *kofinal* (bzw. *koinitial*) in L genau dann, wenn

$$\forall x \in L \exists a \in A\,(a \geq x) \qquad (\text{bzw. } \forall x \in L \exists a \in A\,(a \leq x)\,).$$

Damit läßt sich die *Kofinalität* (bzw. *Koinitialität*) von L definieren:

$$\operatorname{cf} L (\operatorname{ci} L) := \min\{|\,A\,| : A \subset L \wedge A \text{ ist kofinal (koinitial) in } L\}.$$

Außerdem sei $\delta(L) := \max(\operatorname{ci} L, \operatorname{cf} L)$. $\square$

Mit dieser Definition haben lineare Ordnungen genau dann die Kofinalität eins, wenn sie ein größtes Element besitzen. Außerdem sind $\operatorname{cf} L$, $\operatorname{ci} L$ und damit auch $\delta(L)$ regulär und, falls endlich, gleich eins.

Definition 1.6. Für einen beliebigen topologischen Raum X und eine abgeschlossene Teilmenge F von X ist der *Charakter* $\operatorname{char}(F, X)$ von F in X definiert als die minimale Mächtigkeit einer Umgebungsbasis von F in X. Im Falle $F = \{x\}$ schreibt man einfach $\operatorname{char}(x, X)$. □

Bemerkung 1.7. In einem kompakten Raum X ist für jede abgeschlossene Teilmenge F von X der Charakter von F die minimale Mächtigkeit einer offenen Familie $\mathcal{F} \subseteq P(X)$ mit $\bigcap \mathcal{F} = F$. □

Für ein Element x einer linearen Ordnung L ist der Charakter von x in L das Maximum von $\operatorname{cf}(< x)$, $\operatorname{ci}(> x)$ und 1, falls man $\operatorname{cf} \emptyset := \operatorname{ci} \emptyset := 0$ setzt.

Bemerkung 1.8. Falls F eine abgeschlossene, echte Teilmenge einer kompakten linearen Ordnung L ist und $\mathcal{A}$ die disjunkte Familie maximaler offener Intervalle mit $L \setminus F = \bigcup \mathcal{A}$, so gilt, falls der Charakter von F in L nicht endlich ist,

$$\operatorname{char}(F, L) = \sum \{\delta(A) : A \in \mathcal{A}\},$$

wobei $\sum$ die Kardinalzahlsumme bezeichnet.

Beweis. $\operatorname{char}(F, L)$ ist die kleinste Mächtigkeit einer abgeschlossenen Familie $\mathcal{B}$, so daß, für alle $B \in \mathcal{B}$, $B \subseteq L \setminus F$ und $\bigcup \mathcal{B} = L \setminus F$ gelten. Um ein beliebiges $A \in \mathcal{A}$ zu überdecken, benötigt man $\delta(A)$ viele abgeschlossene Mengen. Eine abgeschlossene Teilmenge von $L \setminus F$ trifft aber nur endlich viele Elemente von $\mathcal{A}$, da L kompakt ist. □

2. Homogene kompakte lineare Ordnungen

Definition 2.1. Sei X ein topologischer Raum. Ein Punkt $x \in X$ heißt P-Punkt genau dann, wenn für jede abzählbare Familie $\mathcal{U}$ von Umgebungen von x der Schnitt über $\mathcal{U}$ wieder eine Umgebung von x ist.

Offenbar ist jeder isolierte Punkt P-Punkt. Falls $x \in X$ ein nichtisolierter P-Punkt ist, so ist der Charakter von x in X überabzählbar.

Ein Standardargument, um zu zeigen, daß ein topologischer Raum nicht homogen ist, liefert das folgende Lemma.

Lemma 2.2. *Falls ein homogener kompakter Raum X einen P-Punkt enthält, so ist X endlich.*

Beweis. Da X homogen ist, ist jeder Punkt von X P-Punkt. Falls X unendlich ist, so gibt es eine injektive, diskrete Folge $(x_n)_{n\in\omega}$ in X. Da X kompakt ist, hat die Folge einen Häufungspunkt $x \in X$. Nun ist x P-Punkt, und damit ist $\bigcap\{X \setminus \{x_n\} : n \in \omega\}$ eine Umgebung von x. Das kann aber nicht sein. □

Damit läßt sich eine Abschwächung des in diesem Kapitel angestrebten Satzes zeigen.

Satz 2.3. *Jede homogene kompakte lineare Ordnung L erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom.*

Beweis. Falls L einen P-Punkt enthält, so ist L endlich und erfüllt trivialerweise das erste Abzählbarkeitsaxiom.

Sei also L unendlich. Dann wähle man mit dem Zornschen Lemma eine Folge $\big((a_\beta, b_\beta)\big)_{\beta<\alpha}$ von nichtleeren offenen Intervallen von L, wobei α eine Ordinalzahl bezeichnet, so daß für $\beta < \beta' < \alpha$ stets $a_\beta < a_{\beta'}$ und $b_\beta > b_{\beta'}$ gelten, die nicht durch eine Enderweiterung verlängert werden kann. Der Schnitt über diese Folge enthält höchstens zwei Punkte, sonst ließe sie sich verlängern. Außerdem ist der Schnitt nicht leer. Falls α Nachfolgerzahl ist, ist das klar; falls α Limeszahl ist, so gilt

$$\bigcap\{(a_\beta, b_\beta) : \beta < \alpha\} = \bigcap\{[a_\beta, b_\beta] : \beta < \alpha\} \neq \emptyset,$$

da L kompakt ist.

Angenommen, es liegen genau zwei Punkte im Schnitt, x und y. Dabei sei x der kleinere von beiden. Dann ist $\{(a_\beta, y) : \beta < \alpha\}$ eine Umgebungsbasis von x. Wäre $\operatorname{cf}\alpha > \omega$, so wäre x ein P-Punkt, das kann aber nicht sein. Also gilt $\operatorname{cf}\alpha \leq \omega$. Nun wähle man eine in α kofinale Folge $(\beta_n)_{n\in\omega}$. Dann ist $\{(a_{\beta_n}, y) : n \in \omega\}$ eine Umgebungsbasis von x.

Angenommen, x ist der einzige Punkt im Schnitt. Auch dann muß $\operatorname{cf}\alpha \leq \omega$ gelten, da x sonst P-Punkt wäre. Sei die Folge $(\beta_n)_{n\in\omega}$ kofinal in α. Dann ist $\{(a_{\beta_n}, b_{\beta_n}) : n \in \omega\}$ eine Umgebungsbasis von x.

Somit enthält L einen Punkt von abzählbarem Charakter. Wegen der Homogenität von L besitzen damit alle Punkte von L eine abzählbare Umgebungsbasis. □

3. Potenzen von Bildern kompakter linearer Ordnungen

3.1. Potenzen. Die wesentlichen Begriffe, die man benötigt, um über Potenzen von topologischen Räumen reden zu können, liefern folgende Definitionen.

Definition 3.1. Sei X ein topologischer Räum und λ eine Kardinalzahl. Für $\alpha < \lambda$ bezeichnet $\pi_\alpha : X^\lambda \longrightarrow X$ die α-te Projektion.

Für eine Teilmenge F von λ bezeichnet $\pi_F : X^\lambda \longrightarrow X$ die Projektion auf den Faktor X^F.

Eine Teilmenge A von X *lebt* auf einer Teilmenge F von λ genau dann, wenn $A = \pi_F^{-1}\big[\pi_F[A]\big]$ gilt. Man bezeichnet F dann als einen *Träger* von A.

Die *kanonische Subbasis* von X^λ ist die Menge aller Urbilder von offenen Mengen in X unter den Projektionen π_α. Die *kanonische Basis* von X^λ ist der Abschluß der kanonischen Subbasis unter endlichen Schnitten.

Die *Diagonale* $\Delta : X \longrightarrow X^\lambda; x \longmapsto (x)$ ist die Abbildung, die jedem x die Funktion zuordnet, die konstant den Wert x hat. □

Da die Elemente von X^λ Funktionen von λ nach X sind, ist π_α einfach die Auswertung an der Stelle α.

Wenn ein topologischer Raum X eine homogene Potenz X^λ besitzt, so haben alle Punkte in X^λ denselben Charakter. Für spezielle Elemente von X^λ läßt sich der Charakter auch im inhomogenen Fall sehr einfach berechnen. Damit kennt man, falls X^λ homogen ist, den Charakter sämtlicher Punkte von X^λ.

Lemma 3.2. *Sei X ein topologischer Raum, der mehr als einen Punkt enthält, $x \in X$ und λ eine Kardinalzahl. Dann ist, falls nicht sowohl x isoliert als auch λ endlich ist,*

$$\operatorname{char}\big((x), X^\lambda\big) = \operatorname{char}(x, X) \cdot \lambda$$

Beweis. Sei $\mathcal{U}$ eine Umgebungsbasis von x minimaler Mächtigkeit. Dann ist $\{\pi_\alpha^{-1}[U] : \alpha < \lambda \wedge U \in \mathcal{U}\}$ eine Umgebungsbasis von (x) in X^λ der Mächtigkeit $\operatorname{char}(x, X) \cdot \lambda$.

Sei umgekehrt $\mathcal{V}$ eine Umgebungsbasis von (x) in X^λ, o.B.d.A. eine Teilmenge der kanonischen Basis von X^λ. Dann ist, für jedes $\alpha < \lambda$, $\{\pi_\alpha[V] : V \in \mathcal{V}\}$ eine Umgebungsbasis von x in X.

Außerdem muß, falls λ unendlich ist, $|\,\mathcal{V}\,| \geq \lambda$ gelten, da jedes Element von $\mathcal{V}$ auf einer endlichen Menge lebt. Damit folgt die Behauptung. □

3.2. Räume mit homogenen Potenzen. Zunächst definiert man drei Arten von Punkten, die sich für die Untersuchung von Räumen mit homogenen Potenzen als nützlich erweisen.

Definition 3.3. Seien κ eine Kardinalzahl mit $\kappa \geq \omega$ und X T_2-Raum. Dann heißt $p \in X$ *κ-Punkt*, falls es ein $A \subseteq X$ gibt mit $|\,A\,| = \kappa$, so daß für alle Umgebungen W von p gilt:

$$|\,A \setminus W\,| < \kappa \qquad (\Leftrightarrow |\,\{a \in A : a \notin W\}\,| < \kappa).$$

p heißt *zellulärer κ-Punkt*, falls es eine disjunkte offene Familie $\mathcal{A}$ mit $|\,\mathcal{A}\,| = \kappa$ gibt, so daß für alle Umgebungen W von p gilt:

$$|\,\{A \in \mathcal{A} : A \nsubseteq W\}\,| < \kappa.$$

Eine Familie $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt *getrennt*, falls es eine disjunkte, offene Familie $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{X})$ gibt und eine Bijektion $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{R}$, so daß, für alle $A \in \mathcal{A}$, $A \subseteq f(A)$ gilt.

p heißt *schwach zellulärer κ-Punkt*, falls es eine getrennte, abgeschlossene Familie $\mathcal{A}$ mit $|\,\mathcal{A}\,| = \kappa$ gibt, so daß für alle Umgebungen W von p gilt:

$$|\,\{A \in \mathcal{A} : A \cap W = \emptyset\}\,| < \kappa. \quad \square$$

In T_2 Räumen ist ein zellulärer κ-Punkt p auch schwach zellulärer κ-Punkt. Man wähle aus jedem Element A einer offenen, disjunkten Familie $\mathcal{R}$, die die zelluläre κ-Punkt-Eigenschaft von p beweist, einen Punkt p_A aus. Dann beweist $\big\{\{p_A\} : A \in \mathcal{R}\big\}$ die schwach zelluläre κ-Punkt-Eigenschaft von x.

Bemerkung 3.4. Gehört $p \in X$ einer der oben definierten Punktarten an, so gilt $\mathrm{char}(p, X) \geq \mathrm{cf}\, \kappa$.

Beweis. Der Beweis wird exemplarisch für einen κ-Punkt $p \in X$ geführt, die beiden anderen Fälle beweist man ähnlich.

Sei $\mathcal{U}$ Umgebungsbasis von von p mit $|\,\mathcal{U}\,| = \mathrm{char}(\ , \mathcal{X})$. $A \subseteq X$ bezeuge die κ-Punkt-Eigenschaft von p; o.B.d.A. sei $p \notin A$. Dann ist $A = \bigcup\{A \setminus W : W \in \mathcal{U}\}$ und, für jedes $W \in \mathcal{U}$, $|\,A \setminus W\,| < \kappa$. Also ist $|\mathcal{U}\,| \geq \mathrm{cf}\, \kappa$. □

Folgende Einschränkungen für zelluläre κ-Punkte in kompakten Räumen werden schließlich benutzt werden, um aus der Existenz eines Bildes einer kompakten linearen Ordnung mit homogenen Potenzen, das einen Punkt von überabzählbarem Charakter enthält, einen Widerspruch abzuleiten.

Satz 3.5. *Es gibt keinen nichtleeren kompakten Raum X, so daß für jeden Punkt $p \in X$ zwei verschiedene, unendliche reguläre Kardinalzahlen κ_p und λ_p existieren, so daß p sowohl zellulärer κ_p-Punkt als auch zellulärer λ_p-Punkt ist.*

Beweis. Angenommen, es gibt doch solch einen Raum X. Für jedes $p \in X$ seien $\mathcal{A}_p$ und $\mathcal{B}_p$ Familien, die bezeugen, daß p zellulärer κ_p- bzw. λ_p-Punkt ist.

Dann läßt sich induktiv eine beliebig lange, echt absteigende Kette offener Mengen von X konstruieren, was ein Widerspruch ist.

Man setze $O_0 := X$. Angenommen für eine Ordinalzahl α und alle $\gamma < \alpha$ sind bereits nichtleere offene Teilmengen O_γ von X gefunden, so daß für alle $\pi < \gamma$ der Abschluß von O_γ echte Teilmenge von O_π ist.

Falls $\alpha = \beta + 1$ ist für ein $\beta < \alpha$, so gibt es, da X keine isolierten Punkte haben kann, zwei verschiedene Punkte $p, q \in O_\beta$. Da X regulär ist, gibt es disjunkte offene Umgebungen O_α von p und A von $(X \setminus O_\beta) \cup \{q\}$. Da die Folge $(O_\gamma)_{\gamma<\alpha}$ fällt, gilt damit, für alle $\gamma < \alpha$, $\overline{O_\alpha} \subset O_\gamma$.

Falls α Limesordinalzahl ist, wähle man ein $S \subseteq \alpha$ vom Ordnungstyp $\mathrm{cf}\, \alpha$ mit $\sup S = \alpha$. Da X kompakt ist, gibt es ein

$$p \in \bigcap\{\overline{O_\gamma} : \gamma \in S\} = \bigcap\{O_\gamma : \gamma \in S\}.$$

O.B.d.A. ist $\lambda_p \neq \mathrm{cf}\, \alpha$ für ein solches p. Dann gibt es ein $B \in \mathcal{B}_p$ mit $B \subseteq \bigcap\{O_\gamma : \gamma \in S\}$.

Dieses sieht man so: Angenommen es gilt $\lambda_p < \mathrm{cf}\, \alpha$. Dann sei, für $\gamma \in S$, $S_\gamma := \{B \in \mathcal{B} : B \not\subseteq O_\gamma\}$. Dann ist $(S_\gamma)_{\gamma \in S}$ eine steigende Folge der Länge $\mathrm{cf}\, \alpha$ und, für alle $\gamma \in S$, $|\,S_\gamma\,| < \lambda_p < \mathrm{cf}\, \alpha$. Damit muß $(S_\gamma)_{\gamma\in S}$ ab einem $\pi \in S$ konstant werden. Man wähle nun $B \in \mathcal{B}_p \setminus S_\pi$. Dann gilt $B \subseteq \bigcap\{O_\gamma : \gamma \in S\}$.

Falls $\lambda_p > \mathrm{cf}\, \alpha$ ist, so gilt, da für jedes $\gamma \in S$ weniger als λ_p viele Elemente von $\mathcal{B}_p$ nicht in O_γ liegen und λ_p regulär ist,

$$\left|\bigcup_{\gamma \in S}\{B \in \mathcal{B} : B \not\subseteq O_\gamma\}\right| < \lambda_p.$$

Damit gibt es ein $B \in \mathcal{B}_p$, das in allen O_γ, $\gamma \in S$, enthalten ist.

In jedem der beiden Fälle setze man $O_\alpha := B$. □

Für $\omega \leq \kappa < \lambda$ und kompaktes X, das zumindest zwei Punkte enthält, enthält X^λ keine zellulären κ-Punkte. Sei nämlich $p \in X^\lambda$ doch zellulärer κ-Punkt und $\mathcal{A}$ eine offene, disjunkte Familie, die dieses bezeugt. O.B.d.A. bestehe $\mathcal{A}$ aus kanonischen Basismengen von X^λ. Für $A \in \mathcal{A}$ sei $F(A) \in [\lambda]^{<\omega}$ eine Menge, auf der A lebt (also ein Träger von A). Dann ist $|\bigcup\{F(A) : A \in \mathcal{A}\}| \leq \kappa$. Man wähle $\alpha \in \lambda \setminus \bigcup\{F(A) : A \in \mathcal{A}\}$. Sei nun U Umgebung von p mit $\pi_\alpha[U] \neq X$. Dann gibt es kein $A \in \mathcal{A}$ mit $A \subseteq U$.

Für die Untersuchung von Potenzen X^λ erweisen sich schwach zelluläre κ-Punkte als nützlich.

Satz 3.6. *Sei X kompakt und besitze homogene Potenzen. Weiter sei κ eine unendliche reguläre Kardinalzahl. X enthalte einen schwach zellulären κ-Punkt. Dann gilt, für alle $q \in X$,* $\operatorname{char}(q, X) \geq \kappa$.

Beweis. Sei λ eine Kardinalzahl, für die X^λ homogen ist. $\mathcal{C}$ bezeichne den Abschluß der kanonischen Basis von X^λ unter endlichen Vereinigungen. Sei $p \in X$ ein schwach zellulärer κ-Punkt von X und $\mathcal{A}$ eine getrennte, abgeschlossene Familie, die dieses beweist. Schließlich sei $q \in X$ beliebig.

Die Familie $\{\pi_0^{-1}[A] : A \in \mathcal{A}\}$ beweist, daß die konstante Folge (p) ein schwach zellulärer κ-Punkt von X^λ ist. Da X^λ homogen ist, ist auch die konstante Folge (q) ein zellulärer κ-Punkt von X^λ. Sei $\mathcal{B}$ eine abgeschlossene, getrennte Familie, die dieses bezeugt. Die Elemente von $\mathcal{B}$ sind kompakte Mengen, und damit gibt es eine Familie $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{C}$, die $\mathcal{B}$ trennt. Für $S \in \mathcal{R}$ sei $F(S)$ ein endlicher Träger von S. Dann gibt es ein $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{R}$ mit $|\mathcal{P}| = \kappa$, so daß $\{F(S) : S \in \mathcal{P}\}$ ein Δ-System mit einer Wurzel D ist, d.h. für $S, T \in \mathcal{P}$ mit $S \neq T$ gilt $F(S) \cap F(T) = D$. Da $\mathcal{R}$ als trennende Familie disjunkt ist, muß $D \neq \emptyset$ gelten. Damit ist

$$\{\pi_D(B) : B \in \mathcal{R} \wedge F(B) \in \mathcal{P}\}$$

eine getrennte, abgeschlossene Familie in X^D, die bezeugt, daß $\pi_D\big((q)\big)$ schwach zellulärer κ-Punkt ist. Also gilt $\operatorname{char}\big(\pi_D\big((q)\big), X^D\big) \geq \operatorname{cf}\kappa = \kappa$.

Damit ist $\operatorname{char}(q, X) \geq \kappa$. □

Ob sich dieser Satz dahingehend verbessern läßt, daß aus der Existenz eines schwach zellulären κ-Punktes folgt, daß alle Punkte von X schwach zelluläre κ-Punkte sind, ist nicht bekannt. In jedem Falle zeigt dieser Satz, daß sich mit der Existenz von homogenen Potenzen aus gewissen Eigenschaften einzelner Punkte von X gute Rückschlüsse auf die Eigenschaften aller Punkte ziehen lassen. Ein weiteres Beispiel ist der folgende Satz:

Satz 3.7. *Sei X ein kompakter Raum, der homogene Potenzen besitzt. X enthalte einen zellulären ω-Punkt. Dann ist jeder Punkt von X entweder isoliert oder ω-Punkt.*

Beweis. Sei λ eine Kardinalzahl, für die X^λ homogen ist, und $\mathcal{C}$ wie oben der Abschluß der kanonischen Basis von X^λ unter endlichen Vereinigungen. Weiter sei $p \in X$ zellulärer ω-Punkt und $\{O_n : n \in \omega\}$ eine offene Familie, die dieses bezeugt.

Angenommen es gibt einen Punkt $q \in X$, der weder isoliert noch ω-Punkt ist. Dann sei $W := X \setminus \{q\}$. Dann ist W offen und liegt dicht in X. Da q nicht ω-Punkt ist, ist W abzählbar kompakt, d.h. jede abzählbare offene Überdeckung von W besitzt eine endliche Teilüberdeckung:

Sonst sei $(U_n)_{n\in\omega}$ eine abzählbare offene Überdeckung von W ohne endliche Teilüberdeckung. Man wähle für jedes $n \in \omega$ ein $x_n \in X \setminus \bigcup\{U_i : i < n\}$. Dann ist kein Punkt von W Häufungspunkt der Folge $(x_n)_{n\in\omega}$. Da aber X kompakt ist, muß q Häufungspunkt der Folge sein. Da q der einzige Häufungspunkt ist, konvergiert die Folge gegen q. Dieses widerspricht aber der Annahme, daß q nicht ω-Punkt ist.

Sei nun $V := \pi_0^{-1}[W] \subseteq X^\lambda$. Dann ist V offen und dicht in X^λ. Da ein Produkt eines abzählbar kompakten Raumes mit einem kompakten Raum wieder abzählbar kompakt ist, ist V abzählbar kompakt. Die konstante Funktion $(q) \in X^\lambda$ liegt auf dem Rand von V. Da X^λ homogen ist, liegt auch die konstante Funktion $(p) \in X^\lambda$ auf dem Rand einer offenen, abzählbar kompakten, dichten Teilmenge D von X^λ.

Nun lassen sich Folgen $(F_n)_{n\in\omega}$ und $(C_n)_{n\in\omega}$ konstruieren , so daß für alle $n \in \omega$ gilt:

- $F_n \in [\lambda]^{<\omega}$, $C_n \in \mathcal{C}$ und C_n lebt auf F_n
- $F_n \subseteq F_{n+1}$
- $F_n \neq \emptyset$ und $C_n \neq \emptyset$
- $C_{n+1} \subseteq D \cap \bigcap\{\pi_\alpha^{-1}[O_{n+1}] : \alpha \in F_n\}$

Die Konstruktion führt man wie folgt durch: Man wähle $C_0 \neq \emptyset$ mit $C_0 \subseteq D$ beliebig aus $\mathcal{C}$ mit einem endlichen, nichtleeren Träger F_0. Für $n \in \omega$ mit $n > 0$ ist $D \cap \bigcap\{\pi_\alpha^{-1}[O_n] : \alpha \in F_{n-1}\}$ offen und nicht leer, da F_{n-1} endlich ist. Man wähle $C_n \in \mathcal{C}$ mit $C_n \neq \emptyset$ und

$$C_n \subseteq D \cap \bigcap_{\alpha\in F_{n-1}} \pi_\alpha^{-1}[O_n].$$

Sei $E_n \subseteq \lambda$ ein endlicher Träger von C_n. Dann setze man $F_n := F_{n-1} \cup E_n$. Die so gewählten F_n und C_n leisten das Gewünschte.

Nun wähle man für jedes $n \in \omega$

$$f_n \in C_n \cap \bigcap_{\alpha\in\lambda\setminus F_n} \pi_\alpha^{-1}[\{p\}].$$

Es ist $\{f_n : n \in \omega\} \subseteq D$ und $(f_n)_{n\in\omega}$ konvergiert gegen $(p) \in X^\lambda$:

Dazu reicht es zu zeigen, daß für jedes $\alpha \in \lambda$ und jede offene Umgebung O von p ein $m \in \omega$ existiert, so daß, für jedes $n \geq m$, $f_n \in \pi_\alpha^{-1}[O]$ gilt.

Dies sieht man so: Seien O und α wie oben. Falls, für alle $n \in \omega$, $\alpha \notin F_n$ gilt, so ist, für alle n, $f_n(\alpha) = p$ und damit $f_n \in \pi_\alpha^{-1}[O]$. Sonst wähle man ein $r \in \omega$ mit $\alpha \in F_r$. Da p zellulärer ω-Punkt ist, gibt es ein $m > r$, so daß, für jedes $n > m$,

$O_n \subseteq O$ ist. Weil nun, für $n > m$, $f_n \in C_n$ gewählt war und außerdem $F_r \subseteq F_{n-1}$ und damit $C_n \subseteq \pi_\alpha^{-1}[O_n]$ gilt, ist $f_n \in \pi_\alpha^{-1}[O_n]$.

Schließlich besitzt die Folge $(f_n)_{n\in\omega}$ einen Häufungspunkt in D, da D abzählbar kompakt ist: Sei nämlich, für alle $n \in \omega$, $A_n := \overline{\{f_i : i > n\}} \cap D$. Dann ist $\bigcap\{A_n : n \in \omega\} \neq \emptyset$, da kein endlicher Schnitt von Mengen A_n leer ist. Die Elemente dieses Schnittes sind aber gerade die Häufungspunkte der Folge $(f_n)_{n\in\omega}$ in D. Da aber (p) der einzige Häufungspunkt ist, folgt daraus $(p) \in D$. Dieses widerspricht der Wahl von D mit $(p) \in \overline{D} \setminus D$. □

3.3. Bilder kompakter linearer Ordnungen. Im Folgenden bezeichne L immer eine kompakte lineare Ordnung. Die Ordnungsrelation wird mit $<$ bezeichnet.

Ein stetiges Bild X von L ist immer auch Bild einer kompakten linearen Ordnung unter einer irreduziblen Abbildung. Das ist ein Spezialfall einer Tatsache, die für alle Bilder von kompakten Räumen gilt:

Sei Y ein kompakter topologischer Raum und $f : Y \longrightarrow X$ stetig und surjektiv. Dann existiert nach dem Zornschen Lemma eine minimale abgeschlossene Teilmenge Y' von Y mit $f[Y'] = X$. Wegen der Minimalität von Y' gibt es keine echte Teilmenge von Y', deren Bild unter f der ganze Raum X ist. $f \restriction Y'$ ist also irreduzibel.

Für $Y = L$ ist solch ein minimales Y' als eine abgeschlossene Teilmenge einer kompakten linearen Ordnung selbst eine kompakte lineare Ordnung. Wegen der Abgeschlossenheit von Y' stimmt nämlich die Unterraumtopologie von Y' mit der Ordungstopologie, die von der auf Y' eingeschränkten Ordnung von L induziert wird, überein.

Entscheidend für die Untersuchung von Bildern kompakter linearer Ordnungen ist die Tatsache, daß schwach zelluläre κ-Punkte einer kompakten linearen Ordnung unter irreduziblen Abbildungen auf zelluläre κ-Punkte abgebildet werden.

Definition und Lemma 3.8. *Ist $\mathcal{A}$ eine disjunkte Familie offener, nichtleerer Teilmengen der kompakten linearen Ordnung L und $\psi : L \longrightarrow X$ eine irreduzible stetige Surjektion, so ist auch*

$$\psi * (\mathcal{A}) := \{X \setminus \psi[X \setminus A] : A \in \mathcal{A}\}$$

eine disjunkte offene Familie nichtleerer Mengen. Falls $\mathcal{A}$ beweist, daß ein Punkt $p \in L$ zellulärer κ-Punkt ist, für eine Kardinalzahl κ, so beweist $\psi * (\mathcal{A})$, daß $\psi(p)$ zellulärer κ-Punkt von X ist.

Beweis. Sei $\mathcal{A}$ ein disjunkte offene Familie nichtleerer Teilmengen von L. Da ψ eine abgeschlossene Abbildung ist, ist, für jedes $A \in \mathcal{A}$, $X \setminus \psi[L \setminus A]$ offen. Da A nicht leer ist und ψ irreduzibel, ist $\psi[L \setminus A] \neq X$. Seien $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ verschieden. Dann gilt

$$X \setminus \psi[L \setminus A_1] \cap X \setminus \psi[L \setminus A_2] = X \setminus \big(\psi[L \setminus A_1] \cup \psi[L \setminus A_2]\big) = X \setminus \psi[L \setminus (A_1 \cap A_2)] = \emptyset.$$

Angenommen, $\mathcal{A}$ beweist, daß ein Punkt $p \in L$ zellulärer κ-Punkt ist. Dann sei $O \subseteq X$ eine Umgebung von $\psi(p)$. Es gilt dann

$$|\{A \in \mathcal{A} : A \not\subseteq \psi^{-1}[O]\}| < \kappa,$$

und für $A \in \mathcal{A}$ mit $A \subseteq \psi^{-1}[O]$ ist $\psi[L \setminus A] \supseteq X \setminus O$ und damit $X \setminus \psi[L \setminus A] \subseteq O$. Also gilt $|\{B \in \psi * (\mathcal{A}) : B \not\subseteq O\}| < \kappa$. □

Falls eine kompakte lineare Ordnung L unendlich ist, so enthält L einen ω-Punkt, nämlich einen Häufungspunkt einer nichttrivialen Folge. Ein ω-Punkt in L ist schon zellulärer ω-Punkt. Dieses läßt sich verbessern zu folgendem Lemma:

LEMMA 3.9. *Falls p ein ω-Punkt in einem stetigen Bild X einer kompakten linearen Ordnung L ist, so ist p zellulärer ω-Punkt von X.*

BEWEIS. Sei $(p_n)_{n\in\omega}$ eine nichttriviale Folge in X, die gegen p konvergiert und $\psi : L \longrightarrow X$ surjektiv, stetig und irreduzibel. Für jedes $n \in \omega$ wähle man $q_n \in \psi^{-1}[\{p_n\}]$.

Nun färbe man jede Paarmenge $\{n, m\} \in [\omega]^2$ mit 0, falls $n < m$ und $q_n \leq q_m$, und mit 1, falls $n < m$ und $q_n > q_m$. Nach dem Satz von Ramsey gibt es eine unendliche Teilmenge A von ω, die homogen bezüglich dieser Färbung ist.

Dann ist $(q_n)_{n\in A}$ eine monotone Folge, die gegen ein $q \in L$ konvergiert, und o.B.d.A. injektiv. Es gilt $\psi(q) = p$. Man wähle, für alle $n \in A$, disjunkte offene Intervalle I_n mit $q_n \in I_n$. Die Familie $\mathcal{A} := \{I_n : n \in A\}$ zeigt, daß q zellulärer ω-Punkt von L ist. Damit ist p zellulärer ω-Punkt in X mittels $\psi * (\mathcal{A})$. □

Während das letzte Lemma die Existenz von zellulären ω-Punkten in unendlichen Bildern kompakter linearer Ordnungen liefert, garantiert das folgende die Existenz von zellulären κ-Punkte für gewisse überabzählbare Kardinalzahlen κ, falls X Punkte von überabzählbarem Charakter enthält.

Für eine Teilmenge A von L sei $\pi(A) := \sup A$, falls $\delta(A) = \operatorname{cf} A$, und $\pi(A) := \inf A$ sonst. Dann ist, falls $\pi(A) \notin A$, $\pi(A)$ zellulärer $\delta(A)$-Punkt von L.

LEMMA 3.10. *Ist $p \in X$ nicht isoliert und X stetiges Bild einer kompakten linearen Ordnung L, dann ist p ein zellulärer* $\operatorname{char}(p, X)$*-Punkt von X. Falls* $\operatorname{char}(p, X)$ *singulär ist, so ist*

$$\operatorname{char}(p, X) = \sup\{\kappa : \kappa \textit{ ist regulär und } p \textit{ zellulärer } \kappa\textit{-Punkt}\}.$$

BEWEIS. Sei $\psi : L \longrightarrow X$ stetig, surjektiv und irreduzibel, und sei $\lambda := \operatorname{char}(p, X)$. Dann ist $\beta := \operatorname{char}(\psi^{-1}[\{p\}], L) = \lambda$:

Daß $\beta \leq \lambda$ gilt, ist klar. $\beta \geq \lambda$ sieht man so: Sei U eine offene Umgebung von $\psi^{-1}[\{p\}]$. Dann ist $X \setminus \psi[L \setminus U]$ eine offene Umgebung von P, da ψ abgeschlossen ist. Sei $(U_\alpha)_{\alpha<\beta}$ eine offene Umgebungsbasis von $\psi^{-1}[\{p\}]$. Dann ist

$$\bigcap_{\alpha<\beta} (X \setminus \psi[L \setminus U_\alpha]) = X \setminus \bigcup_{\alpha<\beta} \psi[L \setminus U_\alpha] = X \setminus \psi[L \setminus \bigcap_{\alpha<\beta} U_\alpha] = X \setminus (X \setminus \{p\}) = \{p\}.$$

Daraus folgt die Behauptung.

Sei nun $\mathcal{A}$ eine disjunkte offene Familie maximaler Intervalle mit $\bigcup \mathcal{A} = L \setminus \psi^{-1}[\{p\}]$. Dann ist $\lambda = \sum\{\delta(A) : A \in \mathcal{A}\}$ und somit ist $|\mathcal{A}| \leq \lambda$ und, für alle $A \in \mathcal{A}$, $\delta(A) \leq \lambda$. Da ihr Komplement kompakt ist, trifft jede offene Umgebung von $\psi^{-1}[\{p\}]$ alle bis auf endlich viele Elemente von $\mathcal{A}$.

Für $A \in \mathcal{A}$ mit $\delta(A) > 1$ sei $R(A)$ eine disjunkte Familie offener Intervalle in A, die die zelluläre $\delta(A)$-Punkteigenschaft von $\pi(A)$ beweist. Für $\delta(A) > 1$ ist $\pi(A) \in \psi^{-1}[\{p\}]$. Sei

$$S := \bigcup\{R(A) : A \in \mathcal{A} \text{ und } \delta(A) > 1\} \cup \{A \in \mathcal{A} : \delta(A) = 1\}.$$

Dann ist S disjunkte offene Familie und jede Umgebung von $\psi^{-1}[\{p\}]$ enthält alle bis auf weniger als λ viele Elemente von S. Also zeigt $\psi * (S)$, daß p zellulärer λ-Punkt ist.

Um die zweite Aussage zu beweisen, unterscheide man zwei Fälle. In jedem Fall sei $\operatorname{char}(p, X)$ singulär.

Der Fall $\operatorname{char}(p, X) = \sup\{\delta(A) : A \in \mathcal{A}\}$ ist trivial.

Falls $\operatorname{char}(p, X) > \sup\{\delta(A) : A \in \mathcal{A}\}$ ist, gilt $\operatorname{char}(p, X) = |\mathcal{A}|$. Sei $\kappa < |\mathcal{A}|$ beliebig. Dann gibt es eine Teilfamilie $\mathcal{B}$ von $\mathcal{A}$ von regulärer Mächtigkeit mit

$$|\mathcal{B}| \geq \max(\kappa, \sup\{\delta(A) : A \in \mathcal{A}\}).$$

Wie oben folgt dann, daß p zellulärer $|\mathcal{B}|$-Punkt ist. □

Nach diesen Vorbereitungen kann man nun den angestrebten Satz beweisen.

Satz 3.11. *Jedes stetige Bild X einer kompakten linearen Ordnung, das homogene Potenzen hat, erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom.*

Beweis. Sonst sei $p \in X$ ein Punkt mit $\kappa := \operatorname{char}(p, X) > \omega$. Dann gibt es nach Lemma 3.10 eine überabzählbare reguläre Kardinalzahl $\lambda \leq \kappa$, für die p zellulärer λ-Punkt ist. Dann ist p insbesondere schwach zellulärer λ-Punkt. Damit gilt gemäß Satz 3.6 für alle Punkte $q \in X$, $\operatorname{char}(q, X) \geq \lambda$. Damit gibt es für jedes $q \in X$ eine reguläre Kardinalzahl $\lambda_q > \omega$, für die q zellulärer λ_q-Punkt ist. Da X unendlich ist, ist X stetiges Bild einer unendlichen kompakten linearen Ordnung. Diese enthält einen ω-Punkt, der wegen Lemma 3.9 auch zellulärer ω-Punkt ist. Dieser Punkt wird auf einen zellulären ω-Punkt von X abgebildet. Da X keine isolierten Punkte enthalten kann, ist gemäß Satz 3.7 jeder Punkt ein ω-Punkt. Damit ist nach Lemma 3.9 jeder Punkt von X auch zellulärer ω-Punkt. Solch einen Raum X kann es jedoch wegen Satz 3.5 nicht geben. □

Daß homogene, nulldimensionale Bilder kompakter linearer Ordnungen das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllen, läßt sich auch anders zeigen:

Bemerkung 3.12. Sei X ein homogenes, nulldimensionales stetiges Bild einer kompakten linearen Ordnung L, o.B.d.A. unter einer irreduziblen Abbildung. Wie man nachrechnen kann, ist L dann auch nulldimensional. Die Boolesche Algebra $\operatorname{Clop} X$ der offen abgeschlossenen Teilmengen von X läßt sich in $\operatorname{Clop} L$ einbetten. Es läßt sich zeigen, daß $\operatorname{Clop} X$ dann eine Pseudobaumalgebra ist, d.h. daß

$\operatorname{Clop} X$ erzeugt wird von einer Menge $T \subseteq \operatorname{Clop} X$, die bezüglich der inversen Ordnung der Booleschen Algebra $\operatorname{Clop} X$ ein Pseudobaum ist (siehe Heindorf [**8**]). Ein Pseudobaum ist eine halbgeordnete Menge, in der die Vorgängermenge eines jeden Elementes linear geordnet ist.

O.B.d.A. sei $\emptyset \notin T$. Sei C eine maximale Kette in T. Dann erzeugt C einen Ultrafilter p von $\operatorname{Clop} X$. Wenn nun die Koinitialität von C bzgl. der mengentheoretischen Inklusion überabzählbar wäre, so wäre p ein P-Punkt von $\operatorname{Ult} \operatorname{Clop} X$. Das widerspricht Lemma 2.2. Damit ist $\operatorname{ci} C \leq \omega$. Eine koinitiale Teilmenge von C ist aber nichts anderes als eine Umgebungsbasis des p ensprechenden Punktes von X. Also hat ein Punkt von X abzählbaren Charakter, und damit besitzt jeder Punkt von X eine abzählbare Umgebungsbasis. $\square$

KAPITEL 2

Große homogene Räume

1. Vorbemerkungen

Ziel dieses Kapitels ist es, die Inhomogenität gewisser Produkte mit großen Räumen zu zeigen. Ein „großer“ topologischer Raum ist hierbei ein unendlicher kompakter Raum, in dem jede unendliche abgeschlossene Teilmenge $\beta\omega$ als Unterraum enthält.

Definition 1.1. Für einen topologischen Raum X bezeichne $\operatorname{Clop} X$ die Boolesche Algebra der offen-abgeschlossenen Teilmengen von X. X heißt *nulldimensional*, falls die offen-abgeschlossenen Teilmengen von X eine Basis der Topologie von X bilden. Ist X zusätzlich kompakt, so heißt X *Boolesch*. Für eine Boolesche Algebra A bezeichne $\operatorname{Ult} A$ die Menge der Ultrafilter in A mit der Topologie, die von der *kanonischen Basis*

$$\big\{\{p \in \beta\omega : A \in p\} : A \in A\big\}$$

induziert wird.

Definition 1.2. $\beta\omega$ ist die Stone-Čech Kompaktifizierung des Raumes ω der natürlichen Zahlen mit der diskreten Topologie. Es ist $\beta\omega = \operatorname{Ult}\mathcal{P}(\omega)$.

Jede natürliche Zahl n wird mit dem von $\{n\}$ erzeugten Hauptultrafilter identifiziert. ω^* ist $\beta\omega \setminus \omega$ mit der Unterraumtopologie. □

$\beta\omega$ ist in folgendem Sinne groß: Auf Grund der Eigenschaften der Stone-Čech Kompaktifizierung läßt sich jede Abbildung von ω in einen kompakten Raum stetig auf $\beta\omega$ fortsetzen. Damit ist jeder kompakte Raum mit einer abzählbaren, dichten Teilmenge ein stetiges Bild von $\beta\omega$. Insbesondere ist $\beta\omega$ ein Kompaktum mit einer abzählbaren, dichten Teilmenge von maximaler Kardinalität.

Kompakte F-Räume sind groß.

Definition 1.3. Sei X ein topologischer Raum. Eine Teilmenge A von X heißt *C^*-eingebettet* genau dann, wenn sich jede stetige Abbildung $f : A \longrightarrow [0,1]$ stetig auf ganz X fortsetzen läßt.

X heißt F-Raum genau dann, wenn jede *Konullmenge*, d.h. jedes Urbild von $(0,1]$ unter einer stetigen Abbildung $g : X \longrightarrow [0,1]$, C^*-eingebettet ist. □

Lemma 1.4. *$\beta\omega$ ist F-Raum.*

Beweis. Offenbar ist ω ein F-Raum und C^*-eingebettet in $\beta\omega$. Sei $A \subseteq \beta\omega$ eine Konullmenge und $f : A \longrightarrow [0,1]$ stetig.

Nun sei $A' := A \cap \omega$ und F eine stetige Fortsetzung von $f \restriction A'$ auf ω und βF die Stone-Erweiterung von F. Da A offen ist, liegt A' dicht in A. Da βF und f auf A' übereinstimmen, gilt $\beta F \restriction A = f$. □

LEMMA 1.5. *In jedem kompakten F-Raum X haben offene, disjunkte F_σ-Mengen A und B disjunkte Abschlüsse.*

BEWEIS. Mit A und B ist auch $A \cup B$ eine F_σ-Menge. Mit der Normalität von X folgt nun aus dem Lemma von Urysohn, daß $A \cup B$ eine Konullmenge ist. Da A und B offen und disjunkt sind, ist $f : A \cup B \longrightarrow [0,1]$, definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in A \\ 1, & \text{sonst,} \end{cases}$$

stetig und läßt sich damit stetig auf X fortsetzen. Bezeichne $\bar{f} : X \longrightarrow [0,1]$ eine stetige Fortsetzung von f.

Dann ist $\overline{A} \subseteq \bar{f}^{-1}\big[[0, \frac{1}{3}]\big]$ und $\overline{B} \subseteq \bar{f}^{-1}\big[[\frac{2}{3}, 1]\big]$. Damit ist $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$. □

DEFINITION 1.6. Eine injektive, diskrete Folge $(d_n)_{n\in\omega}$ in einem kompakten Raum X heißt *stark getrennt* genau dann, wenn es, für alle $n \in \omega$, Umgebungen U_n von d_n gibt, so daß für alle $A \subseteq \omega$

$$\overline{\bigcup_{n\in A} U_n} \cap \overline{\bigcup_{n\notin A} U_n} = \emptyset$$

gilt. □

LEMMA 1.7. *Falls $\big(d(n)\big)_{n\in\omega}$ eine stark getrennte Folge in einem kompakten Raum X ist, so ist $\overline{\{d(n) : n \in \omega\}}$ homöomorph zu $\beta\omega$. Genauer ist bereits die Stone-Erweiterung*

$$\beta d : \beta\omega \longrightarrow \overline{\{d(n) : n \in \omega\}}$$

ein Homöomorphismus.

BEWEIS. Da $\beta\omega$ kompakt ist, genügt es zu zeigen, daß βd bijektiv und stetig ist. Die Stetigkeit ist aber klar.

βd ist surjektiv, da $\beta d[\beta\omega]$ abgeschlossen ist und $\{d(n) : n \in \omega\}$ enthält.

Die Injektivität sieht man so ein: Seien $a, b \in \beta\omega$ mit $a \neq b$ und U eine abgeschlossene Umgebung von a, die b nicht enthält. Weiter sei $A := U \cap \omega$ und $B := \omega \setminus A$. Dann ist $\overline{A} = \{p \in \beta\omega : A \in p\}$ und $\overline{B} = \{p \in \beta\omega : B \in p\}$, und $\beta\omega$ ist die disjunkte Vereinigung von $\overline{A}$ und $\overline{B}$.

Wegen der Wahl von U ist $a \in \overline{A}$ und $b \in \overline{B}$. Da $\big(d(n)\big)_{n\in\omega}$ stark getrennt ist, gilt $\overline{\beta d[A]} \cap \overline{\beta d[B]} = \emptyset$. Wegen $\beta d[\overline{A}] \subseteq \overline{\beta d[A]}$ und $\beta d[\overline{B}] \subseteq \overline{\beta d[B]}$ ist dann $a \neq b$. □

LEMMA 1.8. *Jede diskrete, injektive Folge $(d_n)_{n\in\omega}$ in einem kompakten F-Raum X ist stark getrennt.*

Beweis. Induktiv lassen sich für alle $n \in \omega$ disjunkte, abgeschlossene Umgebungen V_n von d_n konstruieren:

Man wähle für alle $n \in \omega$ abgeschlossene Umgebungen V_n von d_n mit $d_m \notin V_n$ für alle $m \in \omega \setminus \{n\}$ und $V_n \cap \bigcup_{m<n} V_m = \emptyset$. Solche V_n existieren, da X regulär ist.

Nun sei, für alle $n \in \omega$, $W_n \subseteq V_n$ eine offene Umgebung von d_n. Da X vollständig regulär ist, gibt es stetige Funktionen $f_n : X \longrightarrow [0,1]$, die d_n und $X \setminus W_n$ trennen, o.B.d.A. mit $f_n(d_n) = 0$. Sei $U_n := f_n^{-1}\big[[0, \frac{1}{2})\big]$. Dann sind die U_n offene F_σ-Mengen, und die Familie $\{U_n : n \in \omega\}$ beweist, daß $(d_n)_{n\in\omega}$ stark getrennt ist. $\square$

Korollar 1.9. *Jede abgeschlossene, unendliche Teilmenge eines kompakten F-Raumes X enthält eine Kopie von $\beta\omega$.*

Beweis. Jede abgeschlossene, unendliche Teilmenge von X enthält eine diskrete, injektive Folge und deren Abschluß bezüglich X. Dieser ist aber homöomorph zu $\beta\omega$. $\square$

Solchen großen Räumen entgegengesetzt sind folgenkleine Räume.

Definition 1.10. Ein topologischer Raum X heißt *folgenklein* genau dann, wenn jede unendliche Teilmenge A von X eine unendliche Teilmenge B hat, deren Abschluß keine Kopie von $\beta\omega$ enthält. $\square$

2. Über $\beta\omega$ und ω^*

2.1. $\beta\omega$ ist prim. Um Produkte mit unendlichen kompakten F-Räumen in den Griff zu bekommen, wird eine nichttriviale Aussage über die Einbettbarkeit von $\beta\omega$ in abzählbare Produkte benötigt, die auch an sich interessant ist:

Falls $\beta\omega$ sich in ein abzählbares Produkt von T_2 Räumen einbetten läßt, so auch in einen der Faktoren. Dieser Satz stammt von ursprünglich von Malykhin. Der Beweis dieser Aussage benötigt einige Lemmata. Der Beweis von Lemma 2.5 beruht auf mündlicher Kommunikation mit Shapiro.

Lemma 2.1. *Falls X ein kompakter topologischer Raum ist und $\beta\omega$ ein stetiges Bild von X, so läßt sich $\beta\omega$ in X einbetten.*

Beweis. $\omega \subset \beta\omega$ ist eine gut getrennte Folge. Man wähle für jedes $n \in \omega$ eine Umgebung $U_n \subseteq \beta\omega$, so daß $(U_n)_{n\in\omega}$ eine gut trennende Familie ist.

Sei $f : X \longrightarrow \beta\omega$ stetig und surjektiv. Nun wähle man, für jedes $n \in \omega$, $x_n \in f^{-1}[U_n]$. Dann ist die Folge $(x_n)_{n\in\omega}$ gut getrennt in X mittels $(f^{-1}[U_n])_{n\in\omega}$ und damit $\overline{\{x_n : n \in \omega\}}$ homöomorph zu $\beta\omega$. $\square$

Korollar 2.2. *Falls 2^{2^ω} stetiges Bild eines kompakten Raumes X ist, so läßt sich $\beta\omega$ in X einbetten.*

Beweis. $\mathcal{P}(\omega)$ hat die Mächtigkeit 2^ω und ist daher homomorphes Bild der freien Booleschen Algebra über 2^ω vielen Erzeugern. Dualisieren liefert, daß $\beta\omega$

sich in 2^{2^ω} einbetten läßt. Also ist $\beta\omega$ stetiges Bild einer abgeschlossenen und damit kompakten Teilmenge von X. Damit läßt sich $\beta\omega$ in X einbetten. $\square$

Der Beweis des angestrebten Satzes zerfällt in zwei Teile. Den ersten Teil liefert das folgende Lemma:

LEMMA 2.3. *Läßt sich $\beta\omega$ in ein Produkt $X = \prod_{i\in\omega} X_i$ von T_2-Räumen einbetten, so existiert eine endliche Teilmenge $\tau \subseteq \omega$, so daß sich $\beta\omega$ bereits in $\prod_{i\in\tau} X_i$ einbetten läßt.*

BEWEIS. Für $U \in \operatorname{Clop}\beta\omega$ bezeichne U^0 die Menge U selbst und U^1 das Komplement $\beta\omega\backslash U$. Sei $(U_\alpha)_{\alpha<2^\omega}$ eine unabhängige Familie in $\operatorname{Clop}\beta\omega$. Man identifiziere $\beta\omega$ mittels einer Einbettung mit einer Teilmenge von X. Für jedes $\alpha < 2^\omega$ wähle man in X disjunkte offene Umgebungen V_α^0 von U_α^0 und V_α^1 von U_α^1.

Da U_α^0 und U_α^1 kompakt sind, lassen sich V_α^0 und V_α^1 als endliche Vereinigungen von Mengen der kanonischen Basis von $\prod_{i\in\omega} X_i$ wählen. Damit leben V_α^0 und V_α^1 auf einer endlichen Teilmenge τ_α von ω.

Da ω nur abzählbar viele endliche Teilmengen hat, gibt es $T \subseteq 2^\omega$ mit $|T| = 2^\omega$ und $\tau \in [\omega]^{<\omega}$, so daß, für alle $\alpha \in T$, $\tau_\alpha = \tau$ gilt. Offenbar ist $\tau \neq \emptyset$. O.B.d.A. sei die unabhängige Familie $(U_\alpha)_{\alpha<2^\omega}$ bereits so gewählt, daß $T = 2^\omega$ gewählt werden kann.

Es ist

$$\pi_\tau[\beta\omega] = \bigcup_{f\in 2^{2^\omega}} \bigcap_{\alpha\in 2^\omega} \pi_\tau[U_\alpha^{f(\alpha)}].$$

Man definiere $q : \pi_\tau[\beta\omega] \longrightarrow 2^{2^\omega}$ durch

$$q(x) = f \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha<2^\omega} \pi_\tau[U_\alpha^{f(\alpha)}].$$

q ist wohldefiniert: Für $f, g \in 2^{2^\omega}$ mit $f \neq g$ existiert $\gamma \in 2^\omega$ mit $f(\gamma) \neq g(\gamma)$. Wegen der Wahl von τ ist

$$\bigcup_{\alpha<2^\omega} \pi_\tau[U_\alpha^{f(\alpha)}] \cap \bigcup_{\alpha<2^\omega} \pi_\tau[U_\alpha^{g(\alpha)}] \subseteq \pi_\tau[U_\gamma^{f(\gamma)}] \cap \pi_\tau[U_\gamma^{g(\gamma)}] = \emptyset.$$

Die Unabhängigkeit von $(U_\alpha)_{\alpha<2^\omega}$ garantiert, daß q surjektiv ist: Für $f \in 2^{2^\omega}$ ist

$$\bigcap_{\alpha<2^\omega} \pi_\tau[U_\alpha^{f(\alpha)}] \supseteq \pi_\tau\big[\bigcap_{\alpha<2^\omega} U_\alpha^{f(\alpha)}\big] \neq \emptyset,$$

da wegen der Unabhängigkeit der U_α und der Kompaktheit von $\beta\omega$ Schnitte der Form $\bigcap_{\alpha<2^\omega} U_\alpha^{f(\alpha)}$ nicht leer sind.

Die Abbildung q ist stetig: Die Mengen der kanonischen Subbasis von 2^{2^ω} haben die Form $\pi_\alpha^{-1}[\{i\}]$ mit $\alpha < 2^\omega$ und $i = 0, 1$. Es ist

$$q^{-1}\big[\pi_\alpha^{-1}[\{i\}]\big] = \pi_\tau[U_\alpha^i] = \Big(\prod_{i\in\tau} X_i \setminus \pi_\tau[\beta\omega \setminus U_\alpha^i]\Big) \cap \pi_\tau[\beta\omega],$$

also offen.

Damit ist 2^{2^ω} stetiges Bild von $\pi_\tau[\beta\omega]$. Also läßt $\beta\omega$ in $\pi_\tau[\beta\omega]$ und damit auch in $\prod_{i\in\tau} X_i$ einbetten. $\square$

Mit der in dem letzten Beweis benutzten Konstruktion der Abbildung q läßt sich noch eine Verbesserung von Korollar 2.2 zeigen:

BEMERKUNG 2.4. $\beta\omega$ läßt sich in einen T_2-Raum X einbetten genau dann, wenn sich mindestens eine kompakte Teilmenge von X surjektiv und stetig auf 2^{2^ω} abbilden läßt. □

Um nun den gewünschten Satz vollständig beweisen zu können, muß aus der Einbettbarkeit von $\beta\omega$ in ein endliches Produkt von T_2-Räumen noch die Einbettbarkeit in einen der Faktoren gefolgert werden.

LEMMA 2.5. *Falls $\beta\omega$ sich in ein Produkt $X \times Y$ von T_2-Räumen einbetten läßt, so auch in X oder Y.*

BEWEIS. Faßt man $\beta\omega$, nachdem man sich für eine Einbettung von $\beta\omega$ in $X \times Y$ entschieden hat, als Teilmenge von $X \times Y$ auf, so genügt es o.B.d.A. $X = \pi_X[\beta\omega]$ und $Y = \pi_Y[\beta\omega]$ anzunehmen. Im Folgenden sei $g := \pi \restriction \beta\omega$. Man unterscheide drei Fälle:

1. Es gibt ein $x \in X$ mit $|g^{-1}[\{x\}]| \geq \omega$. Dann ist $g^{-1}[\{x\}]$ eine abgeschlossene, unendliche Teilmenge von $\beta\omega$ und enthält damit eine Kopie von $\beta\omega$. $\pi_Y \restriction g^{-1}[\{x\}]$ ist injektiv und daher Homöomorphismus auf $\pi_Y\left[g^{-1}[\{x\}]\right]$. Damit läßt sich $\beta\omega$ in Y einbetten.
2. Für jedes $x \in X$ ist $g^{-1}[\{x\}]$ endlich, aber die Mächtigkeiten dieser Mengen sind unbeschränkt in ω. Man wähle eine unendliche Teilmenge T von X mit

   $$\forall x, y \in T\big(\,|g^{-1}[\{x\}]| = |g^{-1}[\{y\}]| \Leftrightarrow x = y\big).$$

   Nun wähle man eine diskrete Folge $(x_i)_{i\in\omega}$ in T und disjunkte offene Umgebungen V_i der x_i in X, so daß $\big(\,|\,g^{-1}[\{x_i\}]\,|\,\big)_{i\in\omega}$ streng monoton steigt.

   Schließlich wähle man noch, für alle $n \in \omega$, disjunkte Folgen $U_n = \{p_i^n : n \leq i < \omega\}$ mit $g(p_i^n) = x_i$ für $n \leq i$, und für alle $n \in \omega$ disjunkte offene Familien $\{W_i^n : n \leq i\}$ mit $\pi_Y(p_i^n) \in W_i^n$ für $i \leq n$.

   Dann beweist $\{V_i \times W_i^n : i \in \omega \wedge n \leq i\}$, daß $\{p_i^n : i \in \omega \wedge n \leq i\}$ diskret ist. Damit gilt $\overline{U_n} \cap \overline{U_m} = \emptyset$ für $n \neq m$. Sei $x \in X$ Häufungspunkt von $(x_i)_{i\in\omega}$. Dann existiert für jedes $n \in \omega$ ein $p^n \in \overline{U_n}$ mit $g(p^n) = x$. Die p^n sind alle verschieden und damit ist $|\,g^{-1}[\{x\}]\,| \geq \omega$. Dieses widerspricht der Annahme.
3. $\big(\,|\,g^{-1}[\{x\}]\,|\,\big)_{x\in X}$ ist beschränkt in ω. Dann sei $n \in \omega$ maximal mit $|\,g^{-1}[\{x\}]\,| = n$ für unendlich viele $x \in X$. Nun wähle man eine diskrete Folge $(x_i)_{i\in\omega}$ in X mit $|\,g^{-1}[\{x_i\}]\,| = n$ für alle $i \in \omega$. Außerdem wähle man, für alle $j < n$, disjunkte Folgen $U_j = \{p_i^j : i \in \omega\}$ mit $g(p_i^j) = x_i$ für alle $i \in \omega$.

   Wie in (a) sieht man, daß $\{p_i^j : i \in \omega \wedge j < n\}$ diskret ist in $\beta\omega$. Damit gilt $\overline{U_j} \cap \overline{U_{j'}} = \emptyset$ für $j \neq j'$. Die Menge $F = \{x \in X : |\,g^{-1}[\{x\}]\,| > n\}$ ist endlich. Man zerlege U_0 in unendlich viele unendliche, disjunkte Mengen

$(A_m)_{m\in\omega}$. Dann ist $\overline{A_m} \cap \overline{A_{m'}} = \emptyset$ für $m \neq m'$. Damit existiert $m \in \omega$, so daß, für alle $p \in \overline{A_m}$, $g(p) \notin F$ gilt. Dann ist $\overline{A_m}$ als Abschluß einer diskreten Folge in $\beta\omega$ homöomorph zu $\beta\omega$ und $g \restriction \overline{A_m}$ injektiv. Also läßt sich $\beta\omega$ in X einbetten.

Insgesamt folgt die Behauptung. □

Mit Hilfe der Lemmata 2.3 und 2.5 und vollständiger Induktion erhält man nun den gewünschten Satz.

SATZ 2.6. *$\beta\omega$ läßt sich genau dann in ein abzählbares, nichtleeres Produkt von T_2-Räumen einbetten, wenn $\beta\omega$ sich in einen der Faktoren einbetten läßt.* □

2.2. Schwache P-Punkte in ω^*. Unter CH kann man mit Hilfe von P-Punkten beweisen, daß ω^* nicht homogen ist. Nach einem Resultat von Shelah ist die Existenz von P-Punkten in ω^* jedoch unabhängig von ZFC. Wie in diesem Abschnitt gezeigt wird, enthält ω^* aber schwache P-Punkte.

DEFINITION 2.7. Sei X ein topologischer Raum. Dann heißt $p \in X$ *schwacher P-Punkt* genau dann, wenn p nicht im Abschluß einer abzählbaren Teilmenge von $X \setminus \{p\}$ liegt.

Wie im Falle der P-Punkte muß jeder kompakte homogene Raum X, der einen schwachen P-Punkt enthält, bereits endlich sein. Sonst existiert nämlich eine nichttriviale Folge in X, und diese hat wegen der Kompaktheit von X einen Häufungspunkt p. p ist kein schwacher P-Punkt. Das widerspricht aber der Homogenität von X.

Die schwachen P-Punkte, die in diesem Abschnitt konstruiert werden, sind alle sogenannte ω_1-OK-Punkte.

DEFINITION 2.8. Sei X ein topologischer Raum und κ eine Kardinalzahl. $p \in X$ heißt *κ-OK* genau dann, wenn für jede Folge $(U_n)_{n\in\omega}$ von Umgebungen von p eine Folge $(V_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ von Umgebungen von p existiert, so daß für alle $n \in \omega$ mit $n \geq 1$ gilt:

$$\alpha_1 < \cdots < \alpha_n < \kappa \Rightarrow V_{\alpha_1} \cap \cdots \cap V_{\alpha_n} \subseteq U_n.$$

Solch eine Folge (V_α) heißt *κ-Verfeinerung* der Folge (U_n). □

BEMERKUNG 2.9.
1. Für zwei Kardinalzahlen κ und λ mit $\kappa \leq \lambda$ ist ein λ-OK-Punkt $p \in X$ auch κ-OK.
2. Jeder Punkt $p \in X$ ist ω-OK.
3. Falls $p \in X$ ein P-Punkt ist, so ist p κ-OK für alle Kardinalzahlen κ.
4. Falls $p \in X$ κ-OK ist für ein $\kappa > \mathrm{char}(p, X)$, so ist p P-Punkt.

BEWEIS. (1) ist trivial.
Zum Beweis von (2) wähle man, für alle $\alpha < \omega$, $V_\alpha := \bigcap_{n\leq\alpha+1} U_n$.
Zum Beweis von (3) wähle man, für alle $\alpha < \kappa$, $V_\alpha := \bigcap_{n\in\omega} U_n$.

(4) sieht man so ein: Sei $(U_n)_{n\in\omega}$ eine Folge von Umgebungen von p und $(V_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ eine κ-Verfeinerung dieser Folge, o.B.d.A. seien dabei alle V_α Elemente einer festen Umgebungsbasis $\mathcal{U}$ von p mit $|\mathcal{U}| = \mathrm{char}(\surd, \mathcal{X})$.

Wegen $|\mathcal{U}| < \kappa$ gibt es ein $\alpha < \kappa$ und eine streng monoton wachsende Folge $(\alpha_n)_{n\in\omega}$ in κ, so daß, für alle $n \in \omega$, $V_\alpha = V_{\alpha_n}$ gilt.

Dann ist für alle $n \in \omega$

$$V_\alpha = \bigcap_{i\leq n} V_{\alpha_i} \subseteq U_n,$$

und damit

$$V_\alpha = \bigcap_{n\in\omega} V_{\alpha_n} \subseteq \bigcap_{n\in\omega} U_n.$$

Also ist $\bigcap_{n\in\omega} U_n$ Umgebung von p. $\square$

Die Verbindung zwischen κ-OK-Punkten und schwachen P-Punkten liefert das folgende Lemma.

Lemma 2.10. *Ist X T_1-Raum und $p \in X$ ein ω_1-OK-Punkt, so ist p schwacher P-Punkt.*

Beweis. Sei $\{q_n : n \in \omega\} \subseteq X \setminus \{p\}$. Für jedes $n \in \omega$ sei $U_n := X \setminus \{q_n\}$. Da X T_1-Raum ist, ist jedes U_n Umgebung von p. Sei $(V_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ eine ω_1-Verfeinerung von $(U_n)_{n\in\omega}$.

Für jedes $n \in \omega$ gilt $|\{\alpha < \omega_1 : q_n \in V_\alpha\}| < n$. Damit enthält V_α für alle bis auf abzählbar viele $\alpha < \omega_1$ kein q_n. Also liegt p nicht im Abschluß der Folge $(q_n)_{n\in\omega}$.

Da die q_n beliebig gegeben waren, folgt die Behauptung. $\square$

In diesem Kapitel soll die Inhomogenität von ω^* auf gewisse andere Räume übertragen werden. Dazu ist es notwendig ω^* und $\beta\omega$ genauer zu untersuchen. Ein wichtiges Hilfsmittel dazu ist die Rudin-Keisler Ordnung auf $\beta\omega$.

Definition 2.11. Für eine Funktion $f : \omega \longrightarrow \omega$ bezeichne $\beta f : \beta\omega \longrightarrow \beta\omega$ die eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung von f auf $\beta\omega$.

Die *Rudin-Keisler Ordnung* $\preceq$ auf $\beta\omega$ ist wie folgt definiert:

Für alle $p, q \in \beta\omega$ gelte $p \preceq q$ genau dann, wenn es ein $f : \omega \longrightarrow \omega$ gibt, so daß $\beta f(q) = p$ gilt. $\square$

Man beachte, daß für $f : \omega \longrightarrow \omega$ die Abbildung βf gegeben ist durch $\beta f(p) = \{B \subseteq \omega : f^{-1}[B] \in p\}$.

Die Rudin-Keisler Ordnung ist reflexiv und transitiv, aber keine Halbordnung. Es läßt sich zeigen, daß für alle $p, q \in \beta\omega$ mit $p \preceq q$ und $q \preceq p$ eine Bijektion $f : \omega \longrightarrow \omega$ existiert mit $\beta f(p) = q$ (siehe Comfort und Negrepontis [**4**]).

Umgekehrt kann man, für alle $p, q \in \beta\omega$, $p \sim q$ genau dann definieren, wenn eine Bijektion $f : \omega \longrightarrow \omega$ existiert mit $\beta f(p) = q$. Dann ist $\sim$ Äquivalenzrelation auf $\beta\omega$ und die von $\preceq$ auf $\beta\omega/\sim$ induzierte Quotientenrelation ist eine Halbordnung.

Das Ziel dieses Abschnittes ist es eine Teilmenge der Mächtigkeit 2^ω von ω^* zu konstruieren, deren Elemente paarweise Rudin-Keisler unvergleichbare schwache P-Punkte sind. Genauer werden die Elemente dieser Menge sogar 2^ω-OK sein.

Die induktive Konstruktion benutzt Familien, die unabhängig modulo eines Filters sind, und wurde ursprünglich von Kunen benutzt, um gute Ultrafilter zu konstruieren, die in der Modelltheorie benutzt werden. Die Existenz guter Ultrafilter konnte vorher nur unter CH gezeigt werden. Diese Methode der unabhängigen Mengen eignet zur Konstruktion von Ultrafiltern, deren Existenz sich sonst nur unter CH oder MA zeigen läßt. Die Beweisstruktur ist dabei immer folgende:

Man startet mit einem Filter und einer Familie, die gewisse Unabhängigkeitseigenschaften bzgl. des Filters besitzt. Nun erweitert man den Filter induktiv zu einem Ultrafilter. In jedem Schritt liefert die unabhängige Familie die Mittel, den Filter so zu erweitern, daß er die gewünschten Eigenschaften erhält. In jedem Schritt verkleinert man dann die Familie so, daß die Unabhängigkeit wieder hergestellt wird, aber nur so wenig, daß sich die Konstruktion fortsetzen läßt. Die Limesschritte der Konstruktion sind immer trivial, d.h. man erhält den Filter, indem man über die bisher konstruierte aufsteigende Kette von Filtern vereinigt, und die unabhängige Familie, indem man über die bisher konstruierte fallende Kette von unabhängigen Familien schneidet.

Sei fin das Ideal der endlichen Teilmengen von ω und $\mathcal{CF}$ der duale Filter der koendlichen Teilmengen von ω. Für jeden Filter $\mathcal{F}$ sei $\mathcal{F}^*$ das duale Ideal und für jedes Ideal $\mathcal{I}$ sei $\mathcal{I}^*$ der duale Filter.

Definition 2.12. Sei $\mathcal{F}$ Filter über ω mit $\mathcal{CF} \subseteq \mathcal{F}$.

1. Sei $1 \leq n < \omega$. Eine indizierte Familie $\{A_i : i \in I\}$ heißt genau n-verbunden modulo $\mathcal{F}$ genau dann, wenn, für alle $\sigma \in [I]^n$, $\bigcap_{i\in\sigma} A_i \notin \mathcal{F}^*$ gilt, aber, für alle $n \in [I]^{n+1}$, $\bigcap_{i\in\sigma} A_i \in fin$ ist.
2. Eine Familie $\{A_{in} : i \in I \wedge 1 \leq n < \omega\} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ heißt verbundenes System modulo $\mathcal{F}$ genau dann, wenn für alle $n \geq 1$ die Familie $\{A_{in} : i \in I\}$ genau n-verbunden modulo $\mathcal{F}$ ist und, für alle $n \in \omega$ und $i \in I$, $A_{in} \subseteq A_{i(n+1)}$ gilt.
3. $\{A^j_{in} : i \in I \wedge 1 \leq n < \omega \wedge j \in J\} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ heißt I mal J unabhängige verbundene Familie modulo $\mathcal{F}$ genau dann, wenn für alle $j \in J$ die Familie $\{A^j_{in} : i \in I \wedge 1 \leq n < \omega\}$ ein verbundenes System modulo $\mathcal{F}$ ist und außerdem für alle $\tau \in [J]^{<\omega}$, $1 \leq n_j < \omega$ und $\sigma_j \in [I]^{n_j}$ für $j \in \tau$
$$\bigcap_{j\in\tau} \Big(\bigcap_{i\in\sigma_j} A^j_{in_j} \Big) \notin \mathcal{F}^*$$
gilt. □

Die Existenz unabhängiger Familien liefert folgendes Lemma.

Lemma 2.13. *Es gibt eine 2^ω mal 2^ω unabhängige verbundene Familie modulo $\mathcal{CF}$.*

Beweis. Sei

$$S := \{(k,f) : k \in \omega \wedge f : \mathcal{P}(k) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(k))\}.$$

Dann gilt $|S| = \omega$. Die gesuchte unabhängige Familie wird als Familie von Teilmengen von S anstelle von ω konstruiert. Für $n \in \omega$ mit $1 \leq n$ und $X, Y \in \mathcal{P}(\omega)$ sei

$$A^Y_{Xn} := \{(k,f) \in S :| f(Y \cap k)| \leq n \wedge X \cap k \in f(Y \cap k)\}.$$

Diese Familie leistet das Gewünschte:

Für feste Y und n ist $\{A^Y_{Xn} : X \in \mathcal{P}(\omega)\}$ genau n-verbunden modulo $\mathcal{CF}$. Sei nämlich $\sigma \in [\mathcal{P}(\omega)]^n$. Dann ist

$$\bigcap_{X\in\sigma} A^Y_{Xn} = \Big\{(f,k) \in S :| f(Y \cap k)| \leq n \wedge \bigwedge_{X\in\sigma} \big(X \cap k \in f(Y \cap k)\big)\Big\} \notin fin :$$

Für beliebiges $k \in \omega$ ist $\{X \cap k : X \in \sigma\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\|))$ und hat höchstens n Elemente. Nun existiert ein $f : \mathcal{P}(k) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(k))$ mit $f(Y \cap k) = \{X \cap k : X \in \sigma\}$. Also gibt es unendlich viele Paare $(f,k) \in \bigcap_{X\in\sigma} A^Y_{Xn}$.

Sei nun $\sigma \in [\mathcal{P}(\omega)]^{n+1}$. Dann existiert ein $k_0 \in \omega$ mit $|\{X \cap k_0 : X \in \sigma\}| = n+1$. Für $k \geq k_0$ gibt es also kein $f : \mathcal{P}(k) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(k))$ mit $| f(Y \cap k) | \leq n$ und $\{X \cap k_0 : X \in \sigma\} \subseteq f(Y \cap k)$.

Da es für jedes $k \in \omega$ nur endlich viele $f : \mathcal{P}(k) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(k))$ gibt, ist

$$\bigcap_{X\in\sigma} A^Y_{Xn} \in fin.$$

Für festes $Y \in \mathcal{P}(\omega)$ ist die Familie $\{A^Y_{Xn} : X \in \mathcal{P}(\omega) \wedge \infty \leq \backslash < \omega\}$ verbundenes System modulo $\mathcal{CF}$, da, für alle $X, Y \in \mathcal{P}(\omega)$ und $n \in \omega$ mit $1 \leq n$, $A^Y_{Xn} \subseteq A^Y_{X(n+1)}$ gilt.

Schließlich sei $\tau \in [\mathcal{P}(\omega)]^{<\omega}$, und für jedes $Y \in \tau$ sei $n_Y \in \omega$ mit $1 \leq n_Y$ und $\sigma_Y \in [\mathcal{P}(\omega)]^{\backslash \mathcal{Y}}$. Dann ist

$$\bigcap_{Y\in\tau} \Big(\bigcap_{X\in\sigma_Y} A^Y_{Xn_Y} \Big) = \{(k,f) \in S :$$
$$\forall Y \in \tau \big(\,|f(Y \cap k)| \leq n_Y \wedge \{X \cap k : X \in \sigma_Y\} \subseteq f(Y \cap k)\big)\}$$

unendlich:

Man wähle $k_0 \in \omega$ so groß, daß die Mengen $Y \cap k_0$ für $Y \in \tau$ paarweise verschieden sind. Dann gibt es wie oben für jedes $k \geq k_0$ Funktionen f mit $(k,f) \in \bigcap_{Y\in\tau} (\bigcap_{X\in\sigma_Y} A^Y_{Xn_Y})$. □

Die Konstruktion der 2^ω Rudin-Keisler unvergleichbaren schwachen P-Punkte in ω^* ist eine Variation der folgenden Konstruktion eines schwachen P-Punktes in ω^*.

Satz 2.14. *ω^* enthält einen 2^ω-OK-Punkt und damit einen schwachen P-Punkt.*

Beweis. Sei $\{B_\mu : \mu < 2^\omega \wedge \mu \text{ ist gerade}\}$ eine Aufzählung aller Teilmengen von ω. Für $n \in \omega$ und ungerades $\mu < 2^\omega$ sei $C_{\mu n} \subseteq \omega$ so gewählt, daß $(C_{\mu n})_{n\in\omega}$ eine streng fallende Folge ist und jede streng fallende Folge von Teilmengen von ω in $\{(C_{\mu n})_{n\in\omega} : \mu < 2^\omega \wedge \mu \text{ ist ungerade}\}$ kofinal oft vorkommt.

Man beachte, daß für jeden Punkt $p \in \omega^*$ eine fallende Folge $(C_n)_{n\in\omega}$ in p (p ist ein Ultrafilter über ω) sich mittels der Abbildung

$$C_n \longmapsto U_n := \{q \in \omega^* : C_n \in q\}$$

auffassen läßt als Folge von Basisumgebungen von p.

Sei $\{A^\beta_{\alpha n} : \alpha, \beta < 2^\omega \wedge 1 \leq n < \omega\}$ eine 2^ω mal 2^ω unabhängige verbundene Familie modulo $\mathcal{CF}$. Induktiv sollen für alle $\mu < 2^\omega$ Teilmengen K_μ von 2^ω und Filter $\mathcal{F}_\mu$ über ω konstruiert werden, so daß folgendes gilt:

1. $\{A^\beta_{\alpha n} : \alpha < 2^\omega \wedge 1 \leq n < \omega \wedge \beta \in K_\mu\}$ ist 2^ω mal K_μ unabhängige verbundene Familie modulo $\mathcal{F}_\mu$.
2. $K_0 = 2^\omega$, $\mathcal{F}_0 = \mathcal{CF}$.
3. Für alle $\nu < \mu$ gilt $\mathcal{F}_\nu \subseteq \mathcal{F}_\mu$ und $K_\nu \supseteq K_\mu$.
4. Für alle Limesordinalzahlen μ ist $\mathcal{F}_\mu = \bigcup_{\nu<\mu} \mathcal{F}_\nu$ und $K_\mu = \bigcap_{\nu<\mu} K_\nu$.
5. $K_\mu \setminus K_{\mu+1}$ ist endlich.
6. Für gerades μ ist entweder $B_\mu \in \mathcal{F}_{\mu+1}$ oder $\omega \setminus B_\mu \in \mathcal{F}_{\mu+1}$.
7. Für ungerades μ und $\{C_{\mu n} : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{F}_\mu$ existieren, für alle $\alpha < 2^\omega$, $D_{\mu\alpha} \in \mathcal{F}_{\mu+1}$, so daß, für alle $n \geq 1$ und alle $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n < 2^\omega$, $D_{\mu\alpha_1} \cap \cdots \cap D_{\mu\alpha_n} \setminus C_{\mu n}$ endlich ist.

Falls diese K_μ und $\mathcal{F}_\mu$ so konstruiert werden können, sei $p := \bigcup_{\mu<2^\omega} \mathcal{F}_\mu$. Dann garantiert (6), daß p Ultrafilter ist, und (2), daß p frei ist. Wegen (7) ist p 2^ω-OK in ω^*:

Sei $(U_n)_{n\in\omega}$ eine Folge von Umgebungen von p, o.B.d.A. so, daß es eine streng fallende Folge $(C_n)_{n\in\omega}$ von Teilmengen von ω gibt mit $U_n = \{q \in \omega^* : C_n \in q\}$ für alle $n \in \omega$.

Dann gibt es ein $\mu < 2^\omega$ mit $\{C_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{F}_\mu$ und $(C_{\mu n})_{n\in\omega} = (C_n)_{n\in\omega}$. Die Familie

$$\big\{\{q \in \omega^* : D_{\mu\alpha} \in q\} : \alpha < 2^\omega\big\}$$

ist 2^ω-Verfeinerung von $(U_n)_{n\in\omega}$:

Da $D_{\mu\alpha_1} \cap \cdots \cap D_{\mu\alpha_n} \setminus C_{\mu n}$ endlich ist, gibt es keinen freien Ultrafilter q über ω, der in $\{q \in \beta\omega : D_{\mu\alpha_1} \cap \cdots \cap D_{\mu\alpha_n} \in q\}$ aber nicht in $\{q \in \beta\omega : C_{\mu n} \in q\}$ liegt.

Die Konstruktion geht wie folgt: Sei $\mu < 2^\omega$ und für alle $\nu \leq \mu$ seien $\mathcal{F}_\nu$ und K_ν bereits mit (1)-(7) konstruiert.

Für gerades μ sei $\mathcal{K}$ der Filter, der von $\mathcal{F}_\mu \cup \{\mathcal{B}_\mu\}$ erzeugt wird. Falls $\mathcal{K}$ echt ist und $\{A^\beta_{\alpha n} : \alpha < 2^\omega \wedge 1 \leq n < \omega \wedge \beta \in K_\mu\}$ unabhängig verbunden modulo $\mathcal{K}$, so sei $\mathcal{F}_{\mu+\infty} := \mathcal{K}$ und $K_{\mu+1} := K_\mu$.

Sonst gibt es ein $E \in \mathcal{F}_\mu$, $\tau \in [K_\mu]^{<\omega}$ und $n_\beta \in \omega$ und $\sigma_\beta \in [2^\omega]^{n_\beta}$ für alle $\beta \in \tau$, so daß

$$B_\mu \cap E \cap \bigcap_{\beta\in\tau}\Big(\bigcap_{\alpha\in\sigma_\beta} A^\beta_{\alpha n_\beta}\Big) = \emptyset$$

gilt.

Es sei $K_{\mu+1} := K_\mu \setminus \tau$ und $\mathcal{F}_{\mu+1}$ der Filter, der von

$$\mathcal{F}_\mu \cup \Big\{\bigcap_{\beta\in\tau}\Big(\bigcap_{\alpha\in\sigma_\beta} A^\beta_{\alpha n_\beta}\Big)\Big\}$$

erzeugt wird. Damit ist $\omega \setminus B_\mu \in \mathcal{F}_{\mu+1}$.

Die Familie $\{A^\beta_{\alpha n} : \alpha < 2^\omega \wedge 1 \le n < \omega \wedge \beta \in K_{\mu+1}\}$ ist unabhängig verbunden modulo $\mathcal{F}_{\mu+1}$:

Sonst sei $\tau_0 \in [K_{\mu+1}]^{<\omega}$, τ wie eben und, für alle $\beta \in \tau_0$, $1 \le n < \omega$ und $\sigma_\beta \in [2^\omega]^{n_\beta}$, so daß

$$\bigcap_{\beta\in\tau_0}\Big(\bigcap_{\alpha\in\sigma_\beta} A^\beta_{\alpha n_\beta}\Big) \in \mathcal{F}^*_{\mu+1}$$

gilt.

Dann gibt es ein $F \in \mathcal{F}_\mu$ mit

$$F \cap \bigcap_{\beta\in\tau_0}\Big(\bigcap_{\alpha\in\sigma_\beta} A^\beta_{\alpha n_\beta}\Big) \cap \bigcap_{\beta\in\tau}\Big(\bigcap_{\alpha\in\sigma_\beta} A^\beta_{\alpha n_\beta}\Big) = \emptyset.$$

Man beachte, daß τ und τ_0 disjunkt sind. Mit $\tau' := \tau_0 \cup \tau$ ist dann

$$F \cap \bigcap_{\beta\in\tau'}\Big(\bigcap_{\alpha\in\sigma_\beta} A^\beta_{\alpha n_\beta}\Big) = \emptyset.$$

Dieses widerspricht aber der Induktionsvoraussetzung, da τ' ein Element von $[K_\mu]^{<\omega}$ ist.

Falls μ ungerade ist und ein $n \in \omega$ existiert mit $C_{\mu n} \notin \mathcal{F}_\mu$, so sei $\mathcal{F}_{\mu+1} := \mathcal{F}_\mu$ und $K_{\mu+1} := K_\mu$.

Sonst sei β ein beliebiges Element von K_μ. Solch ein β existiert, da wegen (5) K_μ nicht leer ist. Für alle $\alpha < 2^\omega$ sei

$$D_{\mu\alpha} = \Big(\bigcap_{n\in\omega} C_{\mu n}\Big) \cup \Big(\bigcup_{1\le n<\omega} (A^\beta_{\alpha n} \cap C_{\mu n} \setminus C_{\mu(n+1)})\Big).$$

Nun sei $\mathcal{F}_{\mu+1}$ der Filter, der von $\mathcal{F}_\mu \cup \{\mathcal{D}_{\mu\alpha} : \alpha < \in^\omega\}$ erzeugt wird.

Das garantiert (7): Seien $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n < 2^\omega$ und

$$Y := D_{\mu\alpha_1} \cap \cdots \cap D_{\mu\alpha_n} \setminus C_{\mu n}.$$

Für $n = 1$ ist $Y = 0$, da die Folge $(c_{\mu n})_{n\in\omega}$ fällt und $D_{\mu\alpha} \subseteq C_{\mu n}$ ist. Für $n > 1$ ist

$$Y \subseteq A^\beta_{\alpha_1(n-1)} \cap \cdots \cap A^\beta_{\alpha_n(n-1)} \in fin,$$

da die $A^\beta_{\alpha(n-1)}$ genau $(n-1)$ verbunden sind:

$$\begin{aligned} Y = {} & \textstyle\bigcap_{m\in\omega} C_{\mu m} \cup \bigcup_{1\le m<\omega}(A^\beta_{\alpha_1 m} \cap \cdots \cap A^\beta_{\alpha_n m} \cap C_{\mu m} \setminus C_{\mu(m+1)}) \setminus C_{\mu n} \\ = {} & \textstyle\bigcup_{1\le n<\omega}(A^\beta_{\alpha_1 m} \cap \cdots \cap A^\beta_{\alpha_n m} \cap C_{\mu m} \setminus C_{\mu(m+1)}) \setminus C_{\mu n} \\ \subseteq {} & A^\beta_{\alpha_1(n-1)} \cap \cdots \cap A^\beta_{\alpha_n(n-1)}, \end{aligned}$$

da die Folgen $(A^{\beta}_{\alpha_i m})_{1\leq m<\omega}$ monoton steigen.

Für alle $n \in \omega$ mit $1 \leq n$ und alle $\alpha < 2^\omega$ ist

$$D_{\mu\alpha} \supseteq \bigcap_{n\leq m<\omega} (A^{\beta}_{\alpha m} \cap C_{\mu m} \setminus C_{\mu(m+1)})$$
$$\supseteq \bigcap_{n\leq m<\omega} (A^{\beta}_{\alpha n} \cap C_{\mu m} \setminus C_{\mu(m+1)}) = A^{\beta}_{\alpha n} \cap C_{\mu n}.$$

Sei $\tau \in [K_{\mu+1}]^{<\omega}$ und, für alle $\beta' \in \tau$, $1 \leq n_{\beta'} < \omega$ und $\sigma_{\beta'} \in [2^\omega]^{n_{\beta'}}$. Außerdem seien $\alpha_1 < \dots \alpha_m < 2^\omega$, $\tau' = \tau \cup \{\beta\}$ und $F \in \mathcal{F}_\mu$. Dann gilt für $\sigma_{\beta'} := \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ und $n_\beta := m$

$$F \cap D_{\mu\alpha_1} \cap \dots \cap D_{\mu\alpha_m} \cap \bigcap_{\beta'\in\tau} \Big(\bigcap_{\alpha\in\sigma_{\beta'}} A^{\beta'}_{\alpha n_{\beta'}} \Big)$$
$$\supseteq F \cap C_{\mu m} \cap \bigcap_{\beta'\in\tau'} \Big(\bigcap_{\alpha\in\sigma_{\beta'}} A^{\beta'}_{\alpha n_{\beta'}} \Big) \neq \emptyset,$$

da $F \cap C_{\mu m} \in \mathcal{F}_\mu$ und nach Induktionsvoraussetzung. Damit ist (1) erfüllt.

Die Limesschritte der Konstruktion werden durch (4) bestimmt und machen keine Probleme. □

Indem man diese Konstruktion noch etwas verfeinert erhält man schließlich den folgenden Satz.

Satz 2.15. *ω^* enthält mindestens 2^ω Rudin-Keisler unvergleichbare schwache P-Punkte.*

Beweis. Es werden für alle $\delta < 2^\omega$ freie Ultrafilter p^δ über ω konstruiert. Sei $\{(\delta_\mu, B_\mu) : \mu < 2^\omega \wedge \mu \equiv 0 \pmod 3\}$ Aufzählung von $2^\omega \times \mathcal{P}(\omega)$. Für alle $\mu < 2^\omega$ mit $\mu \equiv 1 \pmod 3$ seien $\delta_\mu < 2^\omega$ und streng fallende Folgen $(C_{\mu n})_{n\in\omega}$ von Teilmengen von ω so gewählt, daß für jedes $\delta < 2^\omega$ und jede streng fallende Folge $(C_n)_{n\in\omega}$ in $\mathcal{P}(\omega)$ die Menge

$$\big\{\mu < 2^\omega : \big(\delta_\mu, (C_{\mu n})_{n<\omega}\big) = \big(\delta, (C_n)_{n\in\omega}\big) \wedge \mu \equiv 1 \pmod 3\big\}$$

kofinal in 2^ω liegt. Weiter sei

$$\{(\delta_\mu, \zeta_\mu, f_\mu) : \mu < 2^\omega \wedge \mu \equiv 2 \pmod 3\}$$

eine Aufzählung von $(2^\omega \times 2^\omega \times \omega^\omega) \setminus (\Delta[2^\omega] \times \omega^\omega)$.

Die Konstruktion startet mit einer Familie

$$\{A^{\beta}_{\alpha n} : \alpha < 2^\omega \wedge 1 \leq n < \omega \wedge \beta < 2^\omega\} \cup \{E_\gamma : \gamma < 2^\omega\} \subseteq \mathcal{P}\big(\mathcal{P}(\omega)\big),$$

die in folgendem Sinne unabhängig modulo $\mathcal{CF}$ ist:

Der erste Term ist eine unabhängige verbundene Familie modulo $\mathcal{CF}$. Für $E \subseteq \omega$ sei wie üblich $E^0 := E$ und $E^1 := \omega \setminus E$. Dann gilt für $\rho \in [2^\omega]^{<\omega}$, $f : \rho \longrightarrow 2$, $\tau \in [2^\omega]^{<\omega}$ und $1 \leq n_\beta < \omega$ und $\sigma_\beta \in [2^\omega]^{n_\beta}$ für jedes $\beta \in \tau$

$$\bigcap_{\beta\in\tau} \Big(\bigcap_{\alpha\in\sigma_\beta} A^{\beta}_{\alpha n_\beta} \Big) \cap \bigcap_{\gamma\in\rho} E_\gamma^{f(\gamma)} \notin fin \qquad (*).$$

Solch eine unabhängige Familie erhält man so:

$$\{A^\beta_{\alpha n} : \alpha < 2^\omega \wedge 1 \leq n < \omega \wedge \beta < 2^\omega + 2^\omega\}$$

sei unabhängig verbunden modulo $\mathcal{CF}$ und $E_\gamma := A_{0,1}^{2^\omega+\gamma}$. Wegen der Unabhängigkeit gilt dann $(*)$, wenn man E^1_γ durch $A_{1,1}^{2^\omega+\gamma}$ ersetzt. $(*)$ selbst ergibt sich nun aus der Tatsache, daß, für jedes $\gamma < 2^\omega$, $A_{0,1}^{2^\omega+\gamma} \cap A_{1,1}^{2^\omega+\gamma} \in fin$ gilt und damit $\omega \setminus E_\gamma$ bis auf endlich viele Elemente Obermenge von $A_{1,1}^{2^\omega+\gamma}$ ist.

Nun sei für alle $\delta < 2^\omega$ der Filter $\mathcal{F}^\delta_0 := \mathcal{CF}$. Die Filter $\mathcal{F}^\delta_\mu$ und die Mengen K_μ werden nun wie im vorhergehenden Beweis induktiv konstruiert, für alle $\delta < 2^\omega$ gleichzeitig, so daß für alle $\delta < 2^\omega$

$$\{A^\beta_{\alpha n} : \alpha < 2^\omega \wedge 1 \leq n < \omega \wedge \beta \in K_\mu\} \cup \{E_\gamma : \gamma \in K_\mu\}$$

unabhängig modulo $\mathcal{F}^\delta_\mu$ ist.

Im μ-ten Schritt sieht die Konstruktion dann wie folgt aus:

Im Falle $\mu \equiv 0 \pmod 3$ wird sichergestellt, daß $\mathcal{F}^{\delta_\mu}_{\mu+1}$ entweder B_μ oder $\omega \setminus B_\mu$ enthält. Das geht bis auf eine kleine Änderung, auf die im Falle $\mu \equiv 2 \pmod 3$ eingegangen wird, wie im vorhergehenden Beweis.

Im Falle $\mu \equiv 1 \pmod 3$ wird dafür gesorgt, daß es, für $(C_{\mu n})_{n\in\omega} \subseteq \mathcal{F}^\delta_\mu$, zu der von der Folge $(C_{\mu n})_{n\in\omega}$ induzierten Folge von Umgebungen von p^δ eine 2^ω-Verfeinerung gibt.

Schließlich wird im Falle $\mu \equiv 2 \pmod 3$ dafür gesorgt, daß es Mengen $A, B \subseteq \omega$ gibt, so daß $\{A, \omega \setminus f_\mu^{-1}[B]\} \subseteq \mathcal{F}^{\delta_\mu}_{\mu+1}$ und $\{B, \omega \setminus f_\mu^{-1}[A]\} \subseteq \mathcal{F}^{\zeta_\mu}_{\mu+\infty}$ gelten.

Sei $a \in K_\mu$, und bezeichne $\mathcal{K}$ den Filter, der von $\mathcal{F}^{\zeta_\mu}_\mu \cup \{\omega \setminus \{^{-\infty}_\mu[\mathcal{E}_\dashv]\}$ erzeugt wird, und $\mathcal{A}$ die Familie

$$\left\{A^\beta_{\alpha n} : \alpha < 2^\omega \wedge 1 \leq n < \omega \wedge \beta \in K_\mu \setminus \{a\}\right\} \cup \left\{E_\gamma : \gamma \in K_\mu \setminus \{a\}\right\}.$$

Man unterscheide zwei Fälle:

1. Die Familie $\mathcal{A}$ ist unabhängig modulo $\mathcal{K}$. In diesem Falle setze man $A := E_a$. Dann ist $\mathcal{A}$ auch unabhängig modulo des von $\mathcal{F}^{\delta_\mu}_\mu \cup \{\mathcal{A}\}$ erzeugten Filters. Es ist nämlich für alle $F \in \mathcal{F}^{\delta_\mu}_\mu$, $\rho \in [2^\omega]^{<\omega}$, $f : \rho \longrightarrow 2$, $\tau \in [2^\omega]^{<\omega}$ und $1 \leq n_\beta < \omega$ und $\sigma_\beta \in [2^\omega]^{n_\beta}$ für jedes $\beta \in \tau$

$$\bigcap_{\beta\in\tau}\Big(\bigcap_{\alpha\in\sigma_\beta} A^\beta_{\alpha n_\beta}\Big) \cap \bigcap_{\gamma\in\rho} E^{f(\gamma)}_\gamma \cap E_a \cap F \neq \emptyset.$$

2. Die Familie $\mathcal{A}$ ist nicht unabhängig modulo $\mathcal{K}$. Dann existieren ein $F \in \mathcal{F}^{\zeta_\mu}_\mu$, $\rho \in [2^\omega]^{<\omega}$, $f : \rho \longrightarrow 2$, $\tau \in [2^\omega]^{<\omega}$ und $n_\beta \in \omega$ mit $1 \leq n_\beta < \omega$ und $\sigma_\beta \in [2^\omega]^{n_\beta}$ für jedes $\beta \in \tau$ mit

$$\bigcap_{\beta\in\tau}\Big(\bigcap_{\alpha\in\sigma_\beta} A^\beta_{\alpha n_\beta}\Big) \cap \bigcap_{\gamma\in\rho} E^{f(\gamma)}_\gamma \cap (\omega \setminus f_\mu^{-1}[E_a]) \cap F = \emptyset.$$

Man setze $A := \omega \setminus E_a$. Dann ist

$$\big\{A^{\beta}_{\alpha n} : \alpha < 2^{\omega} \wedge 1 \leq n < \omega \wedge \beta \in K_\mu \setminus (\{a\} \cup \rho \cup \tau)\big\} \\ \cup \big\{E_\gamma : \gamma \in K_\mu \setminus (\{a\} \cup \rho \cup \tau)\big\}$$

unabhängig modulo des Filters, der erzeugt wird von

$$\mathcal{F}^{\zeta_\mu}_\mu \cup \Big\{ \bigcap_{\beta\in\tau} \Big(\bigcap_{\alpha\in\sigma_\beta} A^{\beta}_{\alpha n_\beta}\Big) \cap \bigcap_{\gamma\in\rho} E^{f(\gamma)}_\gamma \Big\},$$

und dieser enthält

$$\omega \setminus (\omega \setminus f_\mu^{-1}[E_a]) = \omega \setminus f_\mu^{-1}[\omega \setminus E_a] = \omega \setminus f_\mu^{-1}[A].$$

Das gleiche Argument liefert eine Menge B und zwei Filter, so daß man insgesamt $A, B \subseteq \omega$, $\mathcal{F}^{\delta_\mu}_{\mu+1}$, $\mathcal{F}^{\zeta_\mu}_{\mu+1}$ und $K_{\mu+1}$ wie gewünscht erhält, d.h. die Unabhängigkeits-Forderungen bleiben erfüllt, $K_{\mu+1} \setminus K_\mu$ ist endlich und es gelten $\{A, \omega \setminus f_\mu^{-1}[B]\} \subseteq \mathcal{F}^{\delta_\mu}_{\mu+1}$ und $\{B, \omega \setminus f_\mu^{-1}[A]\} \subseteq \mathcal{F}^{\zeta_\mu}_{\mu+1}$.

Die Existenz der Mengen A und B garantiert die Rudin-Keisler Unvergleichbarkeit zweier Punkte p^δ und p^ζ für $\delta \neq \zeta$.

Sei nämlich $f : \omega \longrightarrow \omega$. Dann existiert ein $\mu < 2^\omega$ mit $(\delta, \zeta, f) = (\delta_\mu, \zeta_\mu, f_\mu)$ und damit auch $A \in p^\delta$ und $B \in p^\zeta$, so daß $\omega \setminus f^{-1}[B] \in p^\delta$ und $\omega \setminus f^{-1}[A] \in p^\zeta$ gelten. Dann ist $f^{-1}[B] \notin p^\delta$ und somit kann nicht $\beta f(p^\delta) = p^\zeta$ gelten. Umgekehrt kann auch nicht $\beta f(p^\zeta) = p^\delta$ gelten. Also gibt es keine Funktion $f : \omega \longrightarrow \omega$, deren Stone-Erweiterung den einen Punkt in den anderen überführt. Insbesondere sind p^δ und p^ζ verschieden.

Wie im Falle $\mu \equiv 2 \pmod 3$ muß auch im Falle $\mu \equiv 0 \pmod 3$ die Unabhängigkeit bezüglich der E_γ gesichert werden. Die Limesschritte der Konstruktion sind wieder einfach. □

3. Die Inhomogenität gewisser Produkte mit F-Räumen

3.1. Unendliche kompakte F-Räume. Ein wichtiges Konzept zur Untersuchung kompakter F-Räume ist folgende Verallgemeinerung des Limesbegriffes:

Definition 3.1. Sei $(d_n)_{n\in\omega}$ eine Folge in einem kompakten Raum X und $\mathcal{F}$ ein Filter über ω. Dann heißt $x \in X$ $\mathcal{F}$-Limes der Folge $(d_n)_{n\in\omega}$ genau dann, wenn für jede Umgebung U von x die Menge $\{n \in \omega : d_n \in U\}$ ein Element von $\mathcal{F}$ ist.

Definition und Lemma 3.2. *Seien die Voraussetzungen der obigen Definition erfüllt. Falls $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter ist, so besitzt die Folge $(d_n)_{n\in\omega}$ einen eindeutig bestimmten $\mathcal{F}$-Limes. Dieser wird mit $\lim_{\mathcal{F}}(d_n)_{n\in\omega}$ bezeichnet.*

Beweis. Sei $W := \bigcap_{A\in\mathcal{F}} \overline{\{d_n : n \in A\}}$. Da $\mathcal{F}$ die endliche Durchschnittseigenschaft hat und X kompakt ist, ist $W \neq \emptyset$. Jedes Element von W ist $\mathcal{F}$-Limes der Folge $(d_n)_{n\in\omega}$. Sei nämlich $x \in W$ und U eine Umgebung von x. Dann schneidet $A := \{n \in \omega : d_n \in U\}$ sämtliche Elemente von $\mathcal{F}$. Da $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter ist, ist damit A selbst Element von $\mathcal{F}$.

Für zwei verschiedene Punkte $a, b \in X$ existieren disjunkte Umgebungen U und V von a und b. Nun kann $\mathcal{F}$ höchstens eine der beiden Mengen $\{n \in \omega : d_n \in U\}$ und $\{n \in \omega : d_n \in V\}$ enthalten. Damit können nicht a und b $\mathcal{F}$-Limites der Folge sein. $\square$

Ein $\mathcal{F}$-Limes bleibt erhalten unter stetigen Abbildungen.

LEMMA 3.3. *Seien X und Y kompakte Räume, $(d_n)_{n\in\omega}$ eine Folge in X, $f : X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung und $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter über ω. Dann ist*

$$f\big(\lim_{\mathcal{F}}(d_n)_{n\in\omega}\big) = \lim_{\mathcal{F}}\big(f(d_n)\big)_{n\in\omega}. \quad \square$$

Für einen Ultrafilter $p \in \beta\omega$ und eine Folge $(d_n)_{n\in\omega}$ in einem kompakten Raum X bedeutet „x ist p-Limes der Folge $(d_n)_{n\in\omega}$“, daß sich $(d_n)_{n\in\omega}$ bei x häuft, wie die Folge ω bei p in $\beta\omega$.

LEMMA 3.4. *Für jedes $p \in \beta\omega$ gilt $p = \lim_p(n)_{n\in\omega}$.*

BEWEIS. Sei U eine beliebige Umgebung von p in $\beta\omega$. Dann existiert eine Teilmenge A von ω mit $\{q \in \beta\omega : A \in q\} \subseteq U$ und $A \in p$. Nun ist $\omega \cap U \supseteq A$. Also gilt $\omega \cap U \in p$. $\square$

Die Inhomogenität von $\beta\omega$ läßt sich so beweisen: Man wähle zwei Rudin-Keisler unvergleichbare schwache P-Punkte p und q in $\beta\omega$. Nun zeigt man, daß es keinen Autohomöomorphismus von $\beta\omega$ gibt, der p auf q abbildet.

Dieser Beweis läßt sich auf unendliche, kompakte F-Räume verallgemeinern. Entscheidend ist dabei folgendes Lemma, das im wesentlichen aussagt, daß ein p-Limes einer beliebigen, nichttrivialen Folge nicht auch q-Limes irgendeiner nichtrivialen Folge sein kann.

LEMMA 3.5. *Seien p und q Rudin-Keisler unvergleichbare schwache P-Punkte in ω^*, X kompakter F-Raum, $(d^n)_{n\in\omega}$ eine diskrete, injektive Folge in X und $(e^n)_{n\in\omega}$ eine beliebige Folge in X.*

Sei $x \in X$ mit

$$x = \lim_p(d^n)_{n\in\omega} = \lim_q(e^n)_{n\in\omega}.$$

Dann gilt $\{n \in \omega : e^n = x\} \in q$.

BEWEIS. Sei $K := \overline{\{d^n : n \in \omega\}}$ und $K^* := K \setminus \{d^n : n \in \omega\}$. Man wähle, für alle $n \in \omega$, offene, stark trennende Umgebungen U^n der d^n, die K^* nicht treffen. Nun sei $A := \{n \in \omega : e^n \in K^*\}$, $B := \{n \in \omega : e^n \in \bigcup_{m\in\omega} U^m\}$ und $C := \omega \setminus (A \cup B)$. Dann enthält p genau eine dieser drei Mengen.

1. $A \in p$: Sei $\beta d : \beta\omega \longrightarrow K$ die Stone-Erweiterung der Abbildung $n \longmapsto d^n$. Dann ist βd ein Homöomorphismus. Sei g die zu βd inverse Abbildung. Für alle $n \in A$ ist $g(e^n) \in \omega^*$ und $g(x) = p = \lim_q\big(g(e^n)\big)_{n\in\omega}$, da

$$p = \lim_p(n)_{n\in\omega} = \lim_p\big(g(d^n)\big)_{n\in\omega}$$

ist.

Da p ein schwacher P-Punkt ist, liegt p nicht im Abschluß von $\{g(e^n) : n \in \omega\} \setminus \{p\}$. Daher gibt es eine Umgebung U_p von p, so daß für alle $n \in \omega$ mit $g(e^n) \in U_p$ bereits $e^n = p$ gilt. Damit ist

$$\{n \in \omega : e^n = x\} = \{n \in \omega : g(e^n) = p\} \in q.$$

2. $B \in p$: Für alle $n \in B$ wähle man $f(n) \in \omega$ so, daß e^n in $U^{f(n)}$ liegt, für alle $n \in \omega \setminus B$ sei $f(n) \in \omega$ beliebig. Dann gilt für alle $T \subseteq \omega$

$$T \in p \Leftrightarrow f^{-1}[T] \in q.$$

Sei nämlich $T \in p$. Dann ist $x \in \overline{\bigcup_{m \in T} U^m}$ und damit $x \notin \overline{\bigcup_{m \notin T} U^m}$. Also ist

$$\Big\{n \in B : e^n \notin \bigcup_{m \notin T} U^m\Big\} \supseteq \Big\{n \in \omega : e^n \in X \setminus \overline{\bigcup_{m \notin T} U^m}\Big\} \cap B \in q.$$

Nun gilt

$$f^{-1}[T] \supseteq \Big\{n \in \omega : e^n \in \bigcup_{m \in T} U^m\Big\} \in q.$$

Damit ist $f^{-1}[T] \in q$.

Sei $f^{-1}[T] \in q$. Dann ist

$$x \in \overline{\{e^n : n \in f^{-1}[T]\}} \subseteq \overline{\bigcup_{m \in T} U^m}.$$

Also gilt $x \notin \overline{\bigcup_{m \notin T} U^m}$ und damit $T \in p$. $U := X \setminus \bigcup_{m \notin T} U^m$ ist nämlich Umgebung von x, und es gilt $T = \{n \in \omega : d^n \in U\}$.

Daraus folgt, daß $\beta f(q) = p$ ist. Das widerspricht aber der Rudin-Keisler Unvergleichbarkeit von p und q.

3. $C \in q$: Für $n \in C$ ist $e^n \notin K$. Man wähle für alle $n \in \omega$ offene F_σ-Mengen V^n und W^n, so daß gilt:
   - $d^n \in V^n \subseteq \overline{V^n} \subseteq U^n$,
   - für $n \in C$ ist $e^n \in W^n$, für $n \notin C$ ist $W^n = \emptyset$,
   - $\overline{W^n}$ ist disjunkt von K und allen V^i, $i \leq n$,
   - V^n ist disjunkt von allen W^i, $i < n$.

   Dann sind $\bigcup_{n \in \omega} V^n$ und $\bigcup_{n \in \omega} W^n$ disjunkte offene F_σ-Mengen, und x liegt im Abschluß beider. X ist aber F-Raum.

Insgesamt folgt die Behauptung. □

Die Inhomogenität unendlicher kompakter F-Räume läßt sich nun leicht folgern.

KOROLLAR 3.6. *Kein unendlicher kompakter F-Raum X ist homogen.*

BEWEIS. Angenommen es gibt doch einen solchen Raum X. Dann hat X eine diskrete, abzählbare, unendliche Teilmenge. Sei $\big(d(n)\big)_{n \in \omega}$ eine injektive Aufzählung derselben und $K := \overline{\{d(n) : n \in \omega\}}$. Wie oben ist $\beta d : \beta\omega \longrightarrow K$ ein Homöomorphismus. Seien p und q Rudin-Keisler unvergleichbare schwache P-Punkte.

Es gilt $\beta d(p) = \lim_p \big(d(n)\big)_{n\in\omega}$ und $\beta d(q) = \lim_q \big(d(n)\big)_{n\in\omega}$. Sei nun $h : X \longrightarrow X$ ein Homöomorphismus, der $\beta d(p)$ auf $\beta d(q)$ abbildet. Dann ist $\beta d(q) = \lim_p \big(h \circ d(n)\big)_{n\in\omega}$, aber $h \circ d : \omega \longrightarrow X$ ist injektiv. □

3.2. Produkte. Die Inhomogenität unendlicher kompakter F-Räume kann auf gewisse Produkte übertragen werden.

SATZ 3.7. *Sei κ eine Kardinalzahl und $X = \prod_{\alpha<\kappa} X_\alpha$ Produkt von T_2-Räumen, wobei jedes X_α unendlicher kompakter F-Raum sei oder einen schwachen P-Punkt enthalte oder eine offene, nichtleere, folgenkleine Teilmenge besitze. Mindestens ein X_α sei unendlicher kompakter F-Raum. Dann ist X nicht homogen.*

BEWEIS. Sei (R, S, T) eine Partition von κ, so daß R nichtleer ist, X_α unendlicher kompakter F-Raum ist für $\alpha \in R$, einen schwachen P-Punkt enthält für $\alpha \in S$ und eine offene, nichtleere, folgenkleine Teilmenge besitzt für $\alpha \in T$. Für jedes $a \in X$ und $\alpha < \kappa$ sei $a_\alpha := \pi_\alpha(a)$.

Man wähle eine Folge $(d^n)_{n\in\omega}$ in X wie folgt:

- Für $\alpha \in R$ sei $(d^n_\alpha)_{n\in\omega}$ eine injektive, diskrete Folge in X_α.
- Für $\alpha \in S$ sei $d^n_\alpha = w$, für alle $n \in \omega$, wobei $w \in X_\alpha$ ein schwacher P-Punkt sei.
- Für $\alpha \in T$ sei U_α eine nichtleere, offene, folgenkleine Teilmenge von X_α. $(d^n_\alpha)_{n\in\omega}$ sei eine konstante Folge in U_α.

Weiter seien p und q Rudin-Keisler unvergleichbare schwache P-Punkte in ω^*, $x := \lim_p (d^n)_{n\in\omega}$ und $y := \lim_q (d^n)_{n\in\omega}$. Da $\big(\pi_{S\cup T}(d^n)\big)_{n\in\omega}$ konstant ist, existieren diese Limites, und sie sind eindeutig bestimmt. Sei $h : X \longrightarrow X$ ein Homöomorphismus, der x auf y abbildet, und $e^n := h(d^n)$ für alle $n \in \omega$.

Die d^n sind stark getrennt, da R nichtleer ist. Damit sind auch die e^n stark getrennt. Sei $J \subseteq \kappa$ abzählbar, so daß $\big(\pi_J(e^n)\big)$ stark getrennt ist in $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$. Für jedes $\alpha \in \kappa$ ist

$$x_\alpha = \lim_q (e^n_\alpha)_{n\in\omega} = \lim_p (d^n_\alpha).$$

Für alle $\alpha \in J \cap R$ gibt es $A_\alpha \in q$ mit $e^n_\alpha = x_\alpha$ für alle $n \in A_\alpha$. Ebenso für $\alpha \in J \cap S$, da x_α schwacher P-Punkt ist.

Für jedes $\alpha \in J \cap T$ gibt es eine Umgebung U_α von x_α, die folgenklein ist. Es gilt $A_\alpha := \{n \in \omega : e^n_\alpha \in U_\alpha\} \in q$.

Nun ist J abzählbar, und endliche Schnitte der A_α, $\alpha \in J$, sind unendlich, da die A_α Elemente desselben freien Ultrafilters sind. Damit gibt es eine unendliche Teilmenge B von ω, die in allen A_α, $\alpha \in J$, fast enthalten ist, das heißt für alle $\alpha \in J$ ist $|B \setminus A_\alpha| < \omega$. Für $\alpha \in J \cap (R \cup T)$ ist die Menge $\{e^m_\alpha : m \in B\}$ endlich.

Nun sei $\{\alpha_i : i \in \omega\}$ eine injektive Aufzählung von $J \cap T$. Man wähle $D_{-1} := B$ und , für alle $i \in \omega$, $D_i \subseteq D_{i-1}$ so, daß sich $\beta\omega$ nicht in $\overline{D_i}$ einbetten läßt und $\{e^n_{\alpha_i} : n \in D_i\}$ unendlich ist, bzw., falls $\{e^n_\alpha : n \in D_{\alpha_{i-1}}\}$ endlich ist, $D_{\alpha_i} := D_{\alpha_{i-1}}$. Dann existiert wie oben ein $D \subseteq \omega$, das in allen D_i fast enthalten ist.

Sei nun, für alle $\alpha \in J$, $P_\alpha := \overline{\{e^n_\alpha : n \in D\}}$. Dann läßt sich $\beta\omega$ in kein P_α einbetten und damit auch nicht in $\prod_{\alpha \in J} P_\alpha$. Der Abschluß von $\{\pi_J(e^n) : n \in D\}$ ist aber homöomorph zu $\beta\omega$.

Also kann es den Homöomorphismus h nicht geben. $\square$

KAPITEL 3

Beispiele

1. Die lexikographischen Ordnungen 2^γ

Für eine Ordinalzahl γ sei im Folgenden 2^γ der Raum der Funktionen von γ nach 2 versehen mit der lexikographischen Ordnung, die mit $<$ bezeichnet wird, und der Ordnungstopologie bezüglich dieser Ordnung. Diese Ordnungen wurden von Maurice untersucht. $0 \in 2^\gamma$ ist die Folge, die konstant den Wert 0 hat, $1 \in 2^\gamma$ ist die Folge, die konstant den Wert 1 hat.

Das Ziel dieses Kapitels ist zu zeigen, daß für unzerlegbare Ordinalzahlen $\gamma < \omega_1$ 2^γ homogen ist.

Definition und Lemma 1.1. *Eine Limesordinalzahl γ heißt* unzerlegbar *genau dann, wenn, für alle Ordinalzahlen $\alpha, \beta < \gamma$, $\alpha + \beta < \gamma$ gilt. Eine Limesordinalzahl γ ist unzerlegbar genau dann, wenn, für alle $\alpha < \gamma$, $\alpha + \gamma = \gamma$ gilt.* □

Folgende Notationen erweisen sich als günstig:

Definition 1.2. Sei $(X, <)$ eine lineare Ordnung und $x, y \in X$. Dann bilden x und y einen *Sprung* genau dann, wenn $x < y$ ist und $(x, y) = \emptyset$ gilt. Man schreibt dann $x \lessdot y$. □

Definition 1.3. Seien γ und δ zwei Ordinalzahlen. Für zwei Folgen $(a_\alpha)_{\alpha<\gamma}$ und $(b_\beta)_{\beta<\delta}$ bezeichne $(a_\alpha)_{\alpha<\gamma} \frown (b_\beta)_{\beta<\delta}$ die Folge $(c_\alpha)_{\alpha<\gamma+\delta}$ mit $c_\alpha := a_\alpha$ für $\alpha < \gamma$ und $c_\alpha = b_\beta$ für $\alpha = \gamma + \beta$ und $\beta < \delta$.

$(\bar{a})$ bezeichnet die Folge, die konstant den Wert a annimmt. Ihre Länge wird sich immer aus dem Zusammenhang ergeben. Sie kann auch null sein. □

Die Ordnungen 2^γ sind Boolesch, das heißt es gilt folgender Satz:

Satz 1.4. *Für jede Ordinalzahl γ ist 2^γ ein Boolescher Raum.*

Beweis. 2^γ ist kompakt: Es reicht zu zeigen, daß 2^γ vollständig ist. Um das zu zeigen genügt es Suprema zu betrachten, da $(2^\gamma, <)$ isomorph ist zu $(2^\gamma, >)$. Durch Induktion über γ sieht man, daß jede Teilmenge T von 2^γ ein Supremum in 2^γ besitzt.

Sei γ von der Form α^+ für eine Ordinalzahl α. Nach Induktionsannahme ist 2^α vollständig. Sei $a := \sup \pi_{<\alpha}[T]$. Ist $\alpha \frown (1) \in T$, so ist $\alpha \frown (1)$ das Supremum von T, sonst $\alpha \frown (0)$.

Falls γ eine Limesordinalzahl ist ist, so ist 2^α nach Annahme vollständig für alle $\alpha < \gamma$. Für alle $\alpha < \gamma$ sei $a_\alpha := \sup \pi_{<\alpha}[T]$. Dann sind die a_α verträglich, d.h. für $\alpha \leq \alpha' < \gamma$ ist $a_\alpha = a_{\alpha'} \restriction \alpha$. Das Supremum von T ist dann $\bigcup_{\alpha<\gamma} a_\alpha$.

2^γ ist nulldimensional: Es genügt zu zeigen, daß die Sprünge dicht in 2^γ liegen, d.h. für alle $a, b \in 2^\gamma$ mit $a < b$ existieren $x, y \in 2^\gamma$ mit $a \leq x < y \leq b$ und $(x, y) = \emptyset$.

Seien also $a, b \in 2^\gamma$ mit $a < b$. Sei $\alpha \leq \gamma$ minimal mit $\pi_\alpha(a) \neq \pi_\alpha(b)$. Dann ist $\pi_\alpha(a) = 0$ und $\pi_\alpha(b) = 1$, und $x := a \restriction \alpha^+ \frown (\bar{1})$ und $y := b \restriction \alpha^+ \frown (\bar{0})$ leisten das Gewünschte. □

Bemerkung 1.5. Für Limesordinalzahlen γ sind die Sprünge in 2^γ alle von der Form $a \frown (0, \bar{1}) \lessdot a \frown (1, \bar{0})$.

Beweis. Seien $x, y \in \gamma$ mit $x \lessdot y$ und $\alpha < \gamma$ minimal mit $\pi_\alpha(x) = 0$ und $\pi_\alpha(y) = 1$. Dann gilt

$$x \leq x \restriction \alpha \frown (0, \bar{1}) \lessdot y \restriction \alpha \frown (1, \bar{0}) \leq y$$

und damit $x = x \restriction \alpha \frown (0, \bar{1})$ und $y = x \restriction \alpha \frown (1, \bar{0})$. □

Lemma 1.6. *Für jede unzerlegbare Ordinalzahl $\gamma < \omega_1$ und jedes $x \in 2^\gamma \setminus \{0\}$, das ab einer Ordinalzahl $\alpha < \gamma$ konstant 1 wird, ist $[0, x]$ homöomorph zu 2^γ.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß $[0, x]$ und 2^γ als lineare Ordnungen isomorph sind. Für alle $a \in 2^\gamma$ und $\delta < \gamma$ sei

$$U_\delta(a) := \{y \in 2^\gamma : \pi_{<\delta}(y) = \pi_{<\delta}(a)\}.$$

Für alle $a \in 2^\gamma$ und $\delta < \gamma$ sind die linearen Ordnungen 2^γ und $U_\delta(a)$ isomorph. Bezeichne $\operatorname{type}(L)$ den Ordnungstyp der Wohlordnung L. Dann ist für $\delta < \gamma$ ist $\operatorname{type}(\gamma \setminus \delta) = \gamma$, da $\delta + \gamma = \gamma$ gilt. Sei $\mu : \gamma \setminus \delta \longrightarrow \gamma$ die Mostowski-Kollapsabbildung. Dann ist

$$f : U_\delta(a) \longrightarrow 2^\gamma; (y_\nu)_{\nu<\gamma} \longmapsto (y_{\mu^{-1}(\nu)})_{\nu<\gamma}$$

ein Ordnungsisomorphismus.

Seien nun α und x wie in der Voraussetzung des Lemmas. Für alle $\beta \leq \alpha$ mit $\pi_\beta(x) = 1$ sei $\tau_\beta := \operatorname{type}\{\nu < \beta : \pi_\nu(x) = 1\}$, und für $\beta < \alpha$ sei

$$f_\beta : U_\beta(x) \longrightarrow U_{\tau_\beta}\big((\bar{1})\big)$$

Ordnungsisomorphismus, ebenso

$$f_\alpha : U_\alpha(x) \longrightarrow U_{\tau_\alpha}\big((\bar{0})\big).$$

Dann sei $F := \bigcup_{\beta \leq \alpha} f_\beta$. F ist ordnungserhaltende Bijektion von $[0, x]$ nach 2^γ:

F ist eine totale Abbildung, da die Definitionsbereiche der f_β disjunkt sind und $[0, x]$ überdecken. Mittels vollständiger Induktion über β zeigt man die Surjektivität von F. F ist bijektiv, da die Bilder der f_β disjunkt sind. Da die f_β ordnungserhaltend sind und die Definitions- und Bildbereiche entsprechend geordnet sind, ist auch F ordnungserhaltend. □

Da die Räume 2^γ Boolesch sind, lassen sie sich mit Hilfe Stonescher Dualitätstheorie untersuchen.

Definition und Lemma 1.7. *Sei A eine Boolesche Algebra und $a \in A$. Dann ist*

$$A \restriction a := \{b \in A : b \leq a\}$$

zusammen mit der von A auf $A \restriction a$ eingeschränkten Halbordnung eine Boolesche Algebra, die Relativalgebra *von A bezüglich a.* □

Bemerkung 1.8. Für einen Booleschen Raum X, $A = \operatorname{Clop} X$ und $a \in A$ ist $A \restriction a$ isomorph zu $\operatorname{Clop} a$. □

Definition 1.9. Eine Boolesche Algebra A heißt algebraisch homogen, falls für jedes $a \in A \setminus \{\bot_A\}$ die Relativalgebra $A \restriction a$ isomorph zu A ist. □

Für einen Booleschen Raum X ist $A := \operatorname{Clop} X$ also genau dann algebraisch homogen, wenn X homöomorph zu jeder nichtleeren offen-abgeschlossenen Teilmenge von sich selbst ist.

Falls X das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, so folgt die topologische Homogenität von X aus der algebraischen von $\operatorname{Clop} X$:

Satz 1.10. *Sei X ein Boolescher Raum, der das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Wenn* $\operatorname{Clop} X$ *algebraisch homogen ist, so ist X homogen.*

Beweis. Falls X einen isolierten Punkt besitzt, so ist wegen der Homogenität von $\operatorname{Clop} X$ jeder Punkt von X isoliert und X damit diskret und endlich, also homogen.

Falls X keine isolierten Punkte besitzt, so seien x und y Elemente von X und $\{U_n : n \in \omega\}$ und $\{V_n : n \in \omega\}$ offen-abgeschlossene Umgebungsbasen von x und y mit $U_0 = V_0 = X$, so daß, für alle $n, m \in \omega$ mit $n < m$, $U_m \subset U_n$ und $V_m \subset V_n$ gelten.

Für alle $n \in \omega$ seien $A_n := U_n \setminus U_{n+1}$ und $B_n := V_n \setminus V_{n+1}$. Da $\operatorname{Clop} X$ homogen ist und alle A_n und B_n offen-abgeschlossen und nichtleer sind, existiert für jedes $n \in \omega$ ein Homöomorphismus $f_n : A_n \longrightarrow B_n$. Da nun die Definitions- und Bildbereiche der f_n disjunkt und offen-abgeschlossen sind und $X \setminus \{x\}$ bzw. $X \setminus \{y\}$ überdecken, ist

$$F := \bigcup_{n \in \omega} f_n : X \setminus \{x\} \longrightarrow X \setminus \{y\}$$

ein Homöomorphismus.

Da die offenen Umgebungen von x bzw. y genau die Teilmengen von X sind, die x bzw. y enthalten und deren Komplement kompakt ist, läßt sich F stetig auf ganz X fortsetzen durch $x \longmapsto y$. Diese Fortsetzung ist dann ein Homöomorphismus, der x auf y abbildet. □

Dieses Lemma läßt auf sich 2^γ anwenden, falls $\gamma < \omega_1$ unzerlegbar ist. Dazu benötigt man zunächst folgende Lemmata.

Lemma 1.11. *Für $\gamma < \omega_1$ erfüllt 2^γ das erste Abzählbarkeitsaxiom.*

Beweis. Es ist zu zeigen, daß, für jedes $x \in 2^\gamma$, $\mathrm{cf}\big([0,x)\big)$ und $\mathrm{ci}\big((x,1]\big)$ abzählbar sind. Aus Symmetriegründen genügt es, $\mathrm{cf}\big([0,x)\big) \leq \omega$ zu zeigen. Sei $\delta := \mathrm{type}\{\alpha < \gamma : \pi_\alpha(x) = 1\}$. Man unterscheide zwei Fälle:

1. δ ist eine Limesordinalzahl. Dann sei $S \subseteq \{\alpha < \gamma : \pi_\alpha(x) = 1\}$ kofinal mit $\mathrm{type}\, S = \omega$. Für $n \in \omega$ sei α_n das n-te Element von S. Dann ist $\big(x \restriction \alpha_n \frown (0,\bar{1})\big)_{n\in\omega}$ eine Folge, die kofinal in $[0,x)$ liegt.
2. δ ist keine Limesordinazahl. Dann ist $x = 0$, oder es gibt ein $\alpha < \gamma$ mit $x = x \restriction \alpha \frown (1,\bar{0})$. Im zweiten Falle ist $x \restriction \alpha \frown (0,\bar{1})$ das größte Element von $< x$. In jedem Falle ist $\mathrm{cf}\big([0,x)\big)$ endlich.

Insgesamt ist $\mathrm{cf}\big([0,x)\big) \leq \omega$. □

Lemma 1.12. *Für unzerlegbare Ordinalzahlen γ ist $\mathrm{Clop}\, 2^\gamma$ algebraisch homogen.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß, für alle $A \in (\mathrm{Clop}\, 2^\gamma) \setminus \{\emptyset\}$, A homöomorph zu 2^γ ist.

Falls A ein Intervall ist, so sei $x := \inf A$ und $y := \sup A$. Offenbar ist $A = [x,y]$, wobei x entweder 0 oder der größere Partner eines Sprunges ist und y entweder 1 oder der kleinere Partner eines Sprunges. Damit wird x ab einem $\alpha < \gamma$ konstant 0 und y ab einem $\beta < \gamma$ konstant 1.

Damit ist $[0,y]$ ordnungsisomorph zu 2^γ. Aus Symmetriegründen ist dann auch $[x,y]$ ordnungsisomorph zu 2^γ. Da A ein Intervall ist, stimmt die Unterraumtopologie auf A, die von 2^γ herkommt, mit der Ordnungstopologie, die von $<\restriction A$ induziert wird, überein. Also ist A homöomorph zu 2^γ.

Sei nun $A \in (\mathrm{Clop}\, 2^\gamma) \setminus \{\emptyset\}$ beliebig. Dann läßt sich A als Vereinigung offen-abgeschlossener Intervalle darstellen. Da 2^γ kompakt ist, genügen endlich viele Intervalle, die sich auch disjunkt wählen lassen. Seien also $n \in \omega$ und $I_0, \ldots, I_{n-1}$ disjunkte, nichtleere offen-abgeschlossene Intervalle in 2^γ mit $A = \bigcup_{m<n} I_m$.

Man wähle, für alle $m < n$, $x_m, y_m \in 2^\gamma$ mit

$$0 = x_0 < y_0 \lessdot x_1 < \cdots < y_{n-2} \lessdot x_{n-1} < y_{n-1} = 1$$

und Homöomorphismen $f_m : [x_m, y_m] \longrightarrow I_m$. Dann ist $F := \bigcup_{m<n} f_m$ Homöomorphismus von 2^γ nach A. □

Damit erhält man den folgenden Satz:

Satz 1.13. *Für unzerlegbare Ordinalzahlen $\gamma < \omega_1$ ist 2^γ homogen.* □

Die Zellularität eines topologischen Raumes X ist das Supremum der Mächtigkeiten disjunkter, offener Familien in X.

Für unzerlegbares γ mit $\omega < \gamma < \omega$ sind die Räume 2^γ Beispiele für homogene Räume mit der Zellularität 2^ω.

Satz 1.14. *Sei γ eine Limesordinalzahl und κ eine Kardinalzahl mit $\gamma > \kappa$. Dann hat 2^γ mindestens die Zellularität 2^κ.*

Beweis. Für jedes $a : \kappa \longrightarrow 2$ ist $U(a) := [a \frown (1, \bar{0}), a \frown (1, 0, \bar{1})]$ offen, und für $a, b : \kappa \longrightarrow 2$ mit $a \neq b$ gilt $U(a) \cap U(b) = \emptyset$. □

Ob es homogene kompakte Räume mit einer noch größeren Zellularität gibt, ist unbekannt.

2. Erweiterungen kompakter Räume

Jeder kompakte topologische Raum X ohne isolierte Punkte läßt sich so zu einem kompakten Raum $E(X)$ erweitern, daß sich die Eigenschaften Homogenität und Nulldimensionalität von X auf $E(X)$ übertragen. Sei im Folgenden X immer kompakt und ohne isolierte Punkte.

Für eine überabzählbare Kardinalzahl κ ist die Erweiterung $E(2^\kappa)$ des Cantorraumes 2^κ ein homogenes, nulldimensionales Bild eines Cantorraumes und nicht homöomorph zu einem Cantorraum.

Definition 2.1. Sei X ein kompakter topologischer Raum, der keine isolierten Punkte besitzt. Man definiere auf $X \times 2^X$ eine Äquivalenzrelation $\sim$ durch

$$\forall (x_0, y_0), (x_1, y_1) \in X \times 2^X \quad \big((x_0, y_0) \sim (x_1, y_1) :\Leftrightarrow x_0 = x_1 \wedge y_0 \restriction X \setminus \{x_0\} = y_1 \restriction X \setminus \{x_1\}\big).$$

Dann sei $E(X) := (X \times 2^X)/\sim$ und $f : X \times 2^X \longrightarrow E(X)$ die Quotientenabbildung. Eine Menge $Z \subseteq X \times 2^X$ sei ausgezeichnet genau dann, wenn es ein $Y \subseteq E(X)$ gibt mit $Z = f^{-1}[Y]$. □

Man beachte, daß jede Äquivalenzklasse bzgl. $\sim$ genau zwei Elemente enthält. Es gibt ein einfaches Kriterium, wann eine Teilmenge von $X \times 2^X$ ausgezeichnet ist.

Lemma 2.2. *Sei $U \subseteq X$ und V ein Element der kanonischen Basis $\mathcal{C}(2^X)$ von 2^X. Dann ist $U \times V$ ausgezeichnet genau dann, wenn $X \setminus U$ ein Träger von V ist.*

Beweis. V hat die Form $\{f \in 2^X : f \restriction T = g\}$ für eine endliche Teilmenge T von X und $g : T \longrightarrow 2$. Offenbar ist $U \times V$ genau dann ausgezeichnet, wenn für alle $x \in U$ und alle $f \in V$ auch $f \restriction X \setminus \{x\} \cup \big(x, 1 - f(x)\big) \in V$ ist. Das ist aber genau dann der Fall, wenn U und T disjunkt sind. □

Die offenen, ausgezeichneten Teilmengen von $X \times 2^X$ bilden eine π-Basis von $X \times 2^X$.

Lemma 2.3. *Jede nichtleere, offene Teilmenge W von $X \times 2^X$ enthält eine nichtleere, offene, ausgezeichnete Menge W_0.*

Beweis. Man wähle eine offene Menge $U \subseteq X$ und $V_0 \in \mathcal{C}(2^X)$ mit $\emptyset \neq U \times V_0 \subseteq W$. Da X keine isolierten Punkte hat und V_0 einen endlichen Träger T besitzt, gibt es eine offene, nichtleere Teilmenge U_0 von $U \setminus T$. Man setze $W_0 := U_0 \times V_0$. □

Äquivalenzklassen bzgl. $\sim$ in $X \times 2^X$ haben sogar Umgebungsbasen, die aus offenen, ausgezeichneten Teilmengen von $X \times 2^X$ bestehen.

Lemma 2.4. *Sei $z \in E(X)$ und $W \subseteq X \times 2^X$ eine offene Umgebung von $f^{-1}[\{z\}]$. Dann existiert $U_0 \subseteq X$ und eine kanonische Basismenge V_0 von 2^X, so daß $W_0 := U_0 \times V_0$ ausgezeichnet und offen in $X \times 2^X$ ist und $f^{-1}[\{z\}] \subseteq W_0$ gilt.*

Beweis. Sei $x \in X$ die erste Komponente der beiden Elemente von $f^{-1}\{[z\}]$, und seien y_1 und y_2 die beiden zweiten. Man wähle eine offene Umgebung von x in X und $V_1, V_2 \in \mathcal{C}(2^X)$ mit $U \times V_i \subseteq W$ und $y_i \in V_i$ für $i = 1$ und $i = 2$. Dann gibt es ein $V_0 \in \mathcal{C}(\in^{\mathcal{X}})$ mit $y_1, y_2 \in V_0 \subseteq V_1 \cup V_2$.

Sei nun T ein endlicher Träger von V_0, der x nicht enthält. Da X keine isolierten Punkte hat, gibt es eine offene Umgebung $U_0 \subseteq U$ von x, die T nicht trifft. U_0 und V_0 leisten das Gewünschte. $\square$

Bemerkung 2.5. Falls X nulldimensional ist, läßt sich U_0 auch aus $\operatorname{Clop} X$ wählen. Dann ist auch W_0 offen-abgeschlossen. $\square$

Aus Lemma 2.4 und der Bemerkung folgt nun

Satz 2.6. *$E(X)$ ist kompakt und, falls X nulldimensional ist, ebenfalls nulldimensional.* $\square$

Mit Lemma 2.3 erhält man

Satz 2.7. *Die Abbildung $f : X \times 2^X \longrightarrow E(X)$ ist irreduzibel.* $\square$

Das oben versprochene Beispiel für einen dyadischen Raum, d.h. ein stetiges Bild eines Cantorraumes, konstruiert man nun wie folgt:

Korollar 2.8. *Sei I eine beliebige Indexmenge. Dann ist die Quotientenabbildung $f : 2^I \times 2^{2^I} \longrightarrow E(2^I)$ stetig und irreduzibel. Die Menge der Punkte von $E(2^I)$, deren Urbild einelementig ist, ist leer.*

Der Beweis der angekündigten Eigenschaften dieses Beispiels erfordert noch einen gewissen Aufwand. Um zu zeigen, daß sich die Homogenität von X auf $E(X)$ überträgt, werden nun Autohomöomorphismen von 2^X konstruiert, die zusammen mit Autohomöomorphismen von X genügend Autohomöomorphismen von $E(X)$ induzieren, so daß sich die Homogenität von $E(X)$ zeigen läßt.

Man beachte, daß 2^X mit der üblichen Addition, die von der Gruppe $(2, +)$ herkommt, zu einer topologischen Gruppe wird.

Lemma 2.9. *Sei $\phi : X \longrightarrow X$ ein Homöomorphismus und $y_0, y_1 \in 2^X$. Dann ist*

$$\psi : 2^X \longrightarrow 2^X; y \longmapsto y_0 \circ \phi^{-1} + y_1 + y \circ \phi^{-1}$$

ein Autohomöomorphismus von 2^X mit $\psi(y_0) = y_1$.

Beweis. Die Abbildung $y \longmapsto y \circ \phi^{-1}$ ist ein Autohomöomorphismus von 2^X. $y_0 \circ \phi^{-1}$ und y_1 sind Konstanten in 2^X. Da 2^X eine topologische Gruppe ist, ist die Addition von Konstanten stetig und bijektiv. Damit ist ψ die Hintereinanderausführung dreier Autohomöomorphismen. Die Eigenschaft $\psi(y_0) = y_1$ rechnet man einfach nach. □

Satz 2.10. *Wenn X homogen ist, dann auch $E(X)$.*

Beweis. Seien $z_0 = f\big((x_0, y_0)\big)$ und $z_1 = f\big((x_1, y_1)\big)$ zwei beliebige Elemente von $E(X)$. Sei $\phi : X \longrightarrow X$ ein Homöomorphismus, der x_0 auf x_1 abbildet, und $\psi : E(X) \longrightarrow E(X)$ definiert wie im obigen Lemma.

Dann ist

$$\Phi : X \times 2^X \longrightarrow X \times 2^X; (x, y) \longmapsto \big(\phi(x), \psi(y)\big)$$

ein Homöomorphismus mit $\Phi(x_0, y_0) = (x_1, y_1)$. Offenbar gilt:

$$(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow \Phi(x, y) \sim \Phi(x', y').$$

Damit induziert Φ einen Autohomöomorphismus von $E(X)$, der z_0 auf z_1 abbildet. □

Daß $E(2^\kappa)$ für eine überabzählbare Kardinahlzahl κ nicht homöomorph zu einem Cantorraum ist, sieht man an folgender bekannter Eigenschaft der Cantorräume, die $E(2^\kappa)$ nicht hat:

Satz 2.11. *In einem Cantorraum 2^I ist jede regulär abgeschlossene Menge eine G_δ-Menge, d.h. Durchschnitt von abzählbar vielen offenen Mengen.* □

Im Folgenden wird nun für $\kappa > \omega$ eine regulär abgeschlossene Teilmenge von $E(2^\kappa)$ gesucht, die nicht G_δ ist. Eine regulär abgeschlossene Menge ist der Abschluss einer regulär offenen Menge. Das nächste Lemma liefert eine geeignete regulär offene Menge.

Lemma 2.12. *Für $x_0 \in X$ und $i \in 2$ ist $f[(X \setminus \{x_0\}) \times \pi_{x_0}^{-1}(i)]$ regulär offen in $E(X)$.*

Beweis. Sei $i \in 2$. Dann ist

$$\overline{(X \setminus \{x_0\}) \times \pi_{x_0}^{-1}(i)} = X \times \pi_{x_0}^{-1}(i)$$

und

$$f^{-1}\big[f[X \times \pi_{x_0}^{-1}(i)]\big] = \{x_0\} \times 2^X \cup (X \setminus x_0) \times \pi_{x_0}^{-1}(i) \qquad (*).$$

Sei z ein innerer Punkt von $f[X \times \pi_{x_0}^{-1}(i)]$. Es wird gezeigt, daß z ein Element von $f[(X \setminus \{x_0\}) \times \pi_{x_0}^{-1}(i)]$ ist. Es gilt

$$f^{-1}[\{z\}] \subseteq (X \setminus \{x_0\}) \times \pi_{x_0}^{-1}(i) \text{ oder } f^{-1}[\{z\}] \subseteq \{x_0\} \times 2^X,$$

da $f^{-1}[\{z\}]$ und $(X \setminus \{x_0\}) \times 2^X$ ausgezeichnet sind. Der zweite Fall ist unmöglich:

Da z im Inneren von $f[X \times \pi_{x_0}^{-1}(i)]$ liegt, gibt es eine offene Teilmenge W von $E(X)$ mit $z \in W \subseteq f[X \times \pi_{x_0}^{-1}(i)]$. Mit $(*)$ erhält man für geeignete Mengen $U \subseteq X$ und $V \subseteq 2^X$

$$f^{-1}[\{z\}] \subseteq U \times V \subseteq f^{-1}[W] \subseteq \{x_0\} \times 2^X \cup (X \setminus \{x_0\}) \times \pi_{x_0}^{-1}(i).$$

Nach Lemma 2.4 lassen sich U und V so wählen, daß $U \times V$ ausgezeichnet ist und V ein Element von $\mathcal{C}(2^X)$. Für $f^{-1}[\{z\}] \subseteq \{x_0\} \times 2^X$ ist $x_0 \in U$ und damit hat V einen Träger, der x_0 nicht enthält. Also gibt es ein $y' \in 2^X$ mit $y' \in V \cap \pi^{-1}(1-i)$. Man wähle ein $x' \in U \setminus \{x_0\}$. Dann gilt

$$(x', y') \in (U \times V) \setminus \big(\{x_0\} \times 2^X \cup (X \setminus \{x_0\}) \times \pi_{x_0}^{-1}(i)\big).$$

Das ist ein Widerspruch. □

Der Abschluß $f[X \times \pi_{x_0}^{-1}(i)]$ der Menge $f[(X \setminus \{x_0\}) \times \pi_{x_0}^{-1}(i)]$ ist damit regulär abgeschlossen.

Satz 2.13. *Sei $x_0 \in X$ mit $\mathrm{char}(x_0, X) > \omega$ und $i \in 2$. Dann ist die regulär abgeschlossene Menge $f[X \times \pi_{x_0}^{-1}(i)]$ keine G_δ-Menge.*

Beweis. Angenommen, die Menge $f[X \times \pi_{x_0}^{-1}(i)]$ ist doch G_δ. Dann gibt es eine offene Familie $\{W_k : k \in \omega\} \subseteq \mathcal{P}\big(E(X)\big)$ mit

$$f[X \times \pi_{x_0}^{-1}(i)] = \bigcap_{k \in \omega} W_k.$$

Es gilt

$$\{x_0\} \times 2^X \cup (X \setminus \{x_0\}) \times \pi_{x_0}^{-1}(i) = \bigcap_{k \in \omega} f^{-1}[W_k].$$

Nach Lemma 2.4 läßt sich jedes $f^{-1}[W_k]$ schreiben als

$$f^{-1}[W_k] = \bigcup_{\alpha < \gamma_k} (U_{\alpha k} \times V_{\alpha k}),$$

wobei γ_k eine Ordinalzahl, $U_\alpha \times V_\alpha$ für alle $\alpha < \gamma_k$ ausgezeichnet und V_{α_k} für alle $\alpha < \gamma_k$ ein Element von $\mathcal{C}(2^X)$ ist.

Sei $(x_0, y_0) \in \{x_0\} \times 2^X$. Für jedes $k \in \omega$ wähle man ein $\alpha < \gamma_k$ mit $(x_0, y_0) \in U_{\alpha k} \times V_{\alpha k}$ und setze $U_k \times V_k := U_{\alpha k} \times V_{\alpha k}$. Dann ist

$$(x_0, y_0) \in \bigcap_{k \in \omega} (U_k \times V_k) = \bigcap_{k \in \omega} U_k \times \bigcap_{k \in \omega} V_k.$$

Da die Mengen $U_k \times V_k$ ausgezeichnet sind, hat jedes V_k einen Träger, der x_0 nicht enthält. Damit gibt es ein $y_1 \in 2^X$ mit

$$y_1 \in \bigcap_{k \in \omega} V_k \cap \pi_{x_0}^{-1}(1-i).$$

Wegen $\mathrm{char}(x_0, X) > \omega$ gibt es ein $x_1 \neq x_0$ in $\bigcap_{k \in \omega} U_k$. Damit ist

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) \in \Big(\bigcap_{k \in \omega} (U_k \times V_k)\Big) &\setminus \big(\{x_0\} \times 2^X \cup (X \setminus \{x_0\}) \times \pi_{x_0}^{-1}(i)\big) \\ &\subseteq \bigcap_{k \in \omega} f^{-1}[W_k] \setminus \big(\{x_0\} \times 2^X \cup (X \setminus \{x_0\}) \times \pi_{x_0}^{-1}(i)\big) = \emptyset.\end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch. $\square$

Das bedeutet, daß $E(2^\kappa)$ für $\kappa > \omega$ nicht homöomorph zu einem Cantorraum sein kann:

KOROLLAR 2.14. *Sei κ eine überabzählbare Kardinalzahl. Dann ist $E(2^\kappa)$ homogen, nulldimensional, dyadisch und nicht homöomorph zu einem Cantorraum.*

BEWEIS. Es ist nur noch zu zeigen, daß 2^κ einen Punkt von überabzählbarem Charakter besitzt. Es hat aber jeder Punkt von 2^κ den Charakter κ. $\square$

Offen bleibt die interessante Frage, ob die Algebra $\operatorname{Clop} E(2^\kappa)$ für gewisse oder sogar für alle $\kappa > \omega$ algebraisch homogen ist.

3. Eine Baumalgebra

Einen Booleschen Raum zu konstruieren, dessen endliche Potenzen inhomogen sind, ist einfach. Man nehme die topologische Summe des Cantor-Raumes 2^ω mit dem einpunktigen Raum. Alle endlichen Potenzen dieses Raumes haben dann einen isolierten Punkt und können daher nicht homogen sein.

Einen Raum zu konstruieren, der das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, keine isolierten Punkte hat und dessen endlichen Potenzen inhomogen sind, ist schwieriger. Ein Boolescher Raum, der zu einer Baumalgebra dual ist, hat keine isolierten Punkte, wenn der Baum geschickt gewählt ist.

3.1. Vorbereitungen. In diesem Abschnitt wird in ZFC + $\diamond$ gearbeitet. $\diamond$ behauptet die Existenz einer $\diamond$-Folge. Hier nun die im Folgenden verwendete Definition einer solchen:

DEFINITION 3.1. Eine Folge $(A_\alpha \subseteq \omega_1 : \alpha < \omega_1)$ heißt $\diamond$-Folge genau dann, wenn

$$\forall A \subseteq \omega_1(\{\alpha < \omega_1 : A \cap \alpha = A_\alpha\} \text{ ist stationär in } \omega_1). \quad \square$$

Will man $\diamond$ anwenden, so muß man im Normalfall von einigen Teilmengen von ω_1 nachweisen, daß sie club sind. Dies erleichert folgendes Lemma:

LEMMA 3.2. *Sei $\mathcal{A}$ eine abzählbare Menge von endlichstelligen Funktionen auf ω_1. Dann ist*

$$\{\alpha < \omega_1 : \alpha \textit{ ist abgeschlossen unter } \mathcal{A}\}$$

club in ω_1. $\square$

Etwas handlicher ist diese modelltheoretische Version, dabei bezeichne „$\prec$“ die Relation „ist elementare Substruktur von“:

KOROLLAR 3.3. *Sei $B = (\omega_1, (f_n)_{n\in\omega}, (R_n)_{n\in\omega})$ eine Struktur mit den endlichstelligen Funktionen f_n und Relationen R_n. Für $n \in \omega$ sei i_n die Stelligkeit von f_n und j_n die von R_n. Dann ist*

$$\{\alpha < \omega_1 : (\alpha, (f_n \restriction \alpha^{i_n})_{n\in\omega}, (R_n \cap \alpha^{j_n})_{n\in\omega}) \prec (\omega_1, (f_n)_{n\in\omega}, (R_n)_{n\in\omega})\}$$

club in ω_1.

Beweis. Man wende das obige Lemma auf einen vollständigen Satz $\mathcal{A}$ von Skolemfunktionen für B an. $\square$

Da im wesentlichen Bäume konstruiert werden sollen, benötigt man einige Begriffe, um über Bäume gut reden zu können. Wie üblich wird von einem Baum $(T, \leq)$ meist einfach als T gesprochen.

Definition 3.4. Für einen Baum T und $t \in T$ sei

1. $\mathrm{pred}_T(t) := \{s \in T : s < t\}$ die Menge der Vorgänger von t,
2. $\mathrm{ht}_T(t) := \mathrm{type}(\mathrm{pred}_T(t))$ die *Höhe* von t in T,
3. $\mathrm{Lev}_\alpha(T) := \{s \in T : \mathrm{ht}_T(s) = \alpha\}$ der α-te *Level* von T für $\alpha \in \mathrm{ord}$,
4. $T_\alpha := \bigcup\{\mathrm{Lev}_\beta(T) : \beta < \alpha\}$ der Unterbaum von T unterhalb des α-ten Levels,
5. $\mathrm{ht}(T) := \min\{\alpha \in \mathrm{ord} : \mathrm{Lev}_\alpha(T) = \emptyset\}$ die *Höhe* von T und
6. $\mathrm{succ}_T(t) := \{s \in \mathrm{Lev}_{\mathrm{ht}_T(t)+1}(T) : t < s\}$ die Menge der unmittelbaren Nachfolger von t. $\square$

Definition 3.5. Ein Baum T mit $|T| = \omega_1$ heißt ω_1-*Souslin* genau dann, wenn jede Kette und jede Antikette abzählbar ist. $\square$

Definition 3.6. Ein Baum $(T, \leq)$ heißt *immer verzweigend*, falls für jedes $t \in T$ die Menge $\{s \in T : t \leq s\}$ durch $\leq$ nicht total geordnet ist. $\square$

Definition 3.7. Ein Baum T der Höhe ω_1 heißt ω_1-*Baum* genau dann, wenn

$$\forall \alpha < \omega_1 (|\mathrm{Lev}_\alpha(T)| < \omega_1). \quad \square$$

Lemma 3.8. *Ein immer verzweigender ω_1-Baum, in dem jede maximale Antikette abzählbar ist, ist ω_1-Souslin.* $\square$

Jedem Baum T läßt sich nun eine Boolesche Algebra B_T zuordnen.

Definition 3.9. Sei T ein Baum. Für jedes $t \in T$ sei $b_t := \{s \in T : t \leq s\}$. Die zu T gehörige *Baumalgebra* B_T ist die Subalgebra von $\mathcal{P}(T)$, die von der Menge $E_T := \{b_t : t \in T\}$ der *kanonischen Erzeuger* von B_T erzeugt wird. $\square$

Falls es nötig ist, auf den betrachteten Baum T Bezug zu nehmen, werden die b_t auch als b_t^T bezeichnet.

Wichtig ist die folgende Eigenschaft:

Lemma 3.10. *Sei T ein Baum mit $\forall t \in T(|\mathrm{succ}_T(t)| \geq \omega)$. Dann liegt E_T dicht in B_T.*

Beweis. Normalform-Lemma für Baumalgebren. $\square$

Freie Produkte Boolescher Algebren sind die zu Produkten topologischer Räume dualen Objekte. Für eine topologischen Raum X und eine Kardinalzahl κ ist die Algebra $\mathrm{Clop}\, X^\kappa$ die κ-te freie Potenz von $\mathrm{Clop}\, X$. Freie Potenzen lassen sich durch eine universelle Eigenschaft bis auf Isomorphie eindeutig definieren.

DEFINITION 3.11. Sei B eine Boolesche Algebra und κ eine Kardinalzahl. Ein Paar $((e_\gamma)_{\gamma<\kappa}, C)$ heißt *κ-te freie Potenz* von B genau dann, wenn C eine Boolesche Algebra ist, jedes e_γ ein Monomorphismus von B nach C und für jede Familie $(f_\gamma)_{\gamma<\kappa}$ von Homomorphismen von B in eine beliebige Boolesche Algebra D ein eindeutig bestimmter Homomorphismus $f : C \longrightarrow D$ existiert, so daß für alle $\gamma < \kappa$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "e_\gamma"] \arrow[dr, "f_\gamma"'] & C \arrow[d, "f"] \\ & D \end{tikzcd}$$

kommutiert. $\square$

Freie Potenzen haben folgende nützliche Eigenschaften:

LEMMA 3.12. *Sei $((e_\gamma)_{\gamma<\kappa}, C)$ freie Potenz von B. Dann gilt:*

1. *C wird erzeugt von $\bigcup\{e_\gamma[B] : \gamma < \kappa\}$.*
2. *Für $\gamma, \gamma' < \kappa$, $\gamma \neq \gamma'$ ist $e_\gamma[B] \cap e_{\gamma'}[B] = \{\perp, \top\}$.*
3. *Die Elemente der Form $\bigwedge\{e_\gamma(b_\gamma) : \gamma \in F\}$, wobei F eine endliche Teilmenge von κ ist und alle b_γ Elemente von B sind, bilden eine dichte Teilmenge von C.* $\square$

3.2. Eine starre Algebra. Eine Boolesche Algebra heißt starr, wenn die Identität ihr einziger Automorphismus ist. Das Ziel dieses Abschnittes ist es, induktiv einen ω_1-Souslin-Baum $T = (\omega_1, \lhd)$ zu konstruieren, dessen Baumalgebra B_T starr ist, und für den auch die endlichen freien Potenzen von B_T nur wenige Automorphismen haben. Die Konstruktion wird ermöglicht durch folgendes Lemma:

LEMMA 3.13. *Sei $n \in \omega$ und $B = (\omega_1, \lhd, A, f, \sqsubseteq, (e_m)_{m<n}, \sqsubseteq_n, h)$ eine Struktur, so daß gilt:*

1. *$T = (\omega_1, \lhd)$ ist ein ω_1-Baum.*
2. *$A \subseteq \omega_1$ ist eine maximale Antikette in T.*
3. *$\sqsubseteq$ ist Boolesche eine Halbordnung auf ω_1, so daß ein Isomorphismus $\varphi : (B_T, \subseteq) \longrightarrow (\omega_1, \sqsubseteq)$ derart existiert, daß für jedes $t \in T$ gilt: $\varphi(b_t) = f(t)$.*
4. *$\sqsubseteq_n$ ist eine Halbordnung auf ω_1, so daß $\big((e_m)_{m<n}, (\omega_1, \sqsubseteq_n)\big)$ eine n-te freie Potenz von $(\omega_1, \sqsubseteq)$ ist.*
5. *$h : \omega_1 \longrightarrow \omega_1$ ist ein Automorphismus von $(\omega_1, \sqsubseteq)$.*

Dann ist die Menge

$$\begin{aligned}\big\{\alpha < \omega_1 : T_\alpha = \alpha \wedge A \cap \alpha \text{ ist maximale Antikette in } T_\alpha \wedge h[\alpha] = \alpha \\ \wedge \ \sqsubseteq\restriction \alpha \text{ induziert eine Algebra, die erzeugt wird von } f[T_\alpha] \\ \wedge \ \sqsubseteq_n\restriction \alpha \text{ induziert eine Algebra, die erzeugt wird von } \bigcup\{e_m[\alpha] : m < n\}\big\}\end{aligned}$$

club in ω_1.

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß die einzelnen Konjunktionsglieder club-Mengen definieren, da abzählbare Schnitte von club-Mengen in ω_1 wieder club in ω_1 sind.

Die Abgeschlossenheit ist in jedem der Fälle klar. Um die Unbeschränktheit von $\{\alpha : T_\alpha = \alpha\}$ einzusehen, definiere $p(\xi) := \mathrm{ht}_T(\xi)$ und $q(\xi) := \sup\{\eta : \eta \in \mathrm{Lev}_\xi(T)\}$. Die Menge der $\alpha < \omega_1$, die unter p und q abgeschlossen sind, ist club, und für solche α gilt $T_\alpha = \alpha$.

Nach Korollar 3.3 ist $\{\alpha : B \restriction \alpha \prec B\}$ club in ω_1. „$A \cap \alpha$ ist maximale Antikette in $(\alpha, \lhd\restriction \alpha)$ und $h[\alpha] = \alpha$“ läßt sich durch eine erststufige Formel ausdrücken und gilt damit für eine in ω_1 unbeschränkte Menge.

Ebenso gelten die letzten beiden Konjunktionsglieder für jedes α mit $B \restriction \alpha \prec B$:

Klar ist, daß die Einschränkungen der Relationen $\sqsubseteq$ und $\sqsubseteq_n$ auf elementare Substrukturen von B Subalgebren von $(\omega_1, \sqsubset)$ und $(\omega_1, \sqsubseteq_n)$ induzieren. Für jedes $x \in \omega_1$ gibt es ein $i \in \omega$ und einen Booleschen Ausdruck τ, der von i Variablen abhängt, so daß gilt:

$$\exists x_0, \dots, x_{i-1}\big(x = \tau\big(f(x_0), \dots, f(x_{i-1})\big)\big).$$

Diese Formel gilt dann auch in jeder elementaren Substruktur von B, die x enthält. Damit wird für $\alpha < \omega_1$ mit $B \restriction \alpha \prec B$ die Algebra $(\alpha, \wedge, \vee, \dots)$ von $f[\alpha]$ erzeugt. Die Aussage bzgl. $\sqsubseteq_n$ beweist man analog. $\square$

Sei nun $(A_\alpha : \alpha < \omega_1)$ eine $\diamondsuit$-Folge. Mit dieser Folge sollen nicht nur Teilmengen von ω_1 codiert werden, sondern, mit Blick auf die Struktur B in obigem Lemma, eine Antikette A in $(\omega_1, \lhd)$, eine Relation $\sqsubseteq \subset \omega_1^2$ (ω_1^2 bezeichnet dabei $\omega_1 \times \omega_1$), eine natürliche Zahl n, eine Relation $\sqsubseteq_n \subset \omega_1^2$ und eine bijektive Abbildung $h : \omega_1 \longrightarrow \omega_1$. Dazu sei $c : \omega_1 \longrightarrow \omega_1 \times \omega_1^2 \times \omega_1 \times \omega_1^2 \times \omega_1^2$ eine Bijektion.

Lemma 3.14. *Die Menge* $\{\alpha : c[\alpha] = \alpha \times \alpha^2 \times \alpha \times \alpha^2 \times \alpha^2\}$ *ist club in* ω_1.

Beweis. Die Abgeschlossenheit ist klar, die Unbeschränktheit folgt aus der Tatsache, daß die $\alpha < \omega_1$ mit $(\alpha, c^{-1} \restriction \alpha^8) \prec (\omega_1, c^{-1})$ in der Menge liegen. $\square$

Die Eigenschaft „die endlichen freien Potenzen von B_T haben wenig Automorphismen“ wird nun präzisiert.

Definition 3.15. Sei $T = (\omega_1, \lhd)$ ein ω_1-Baum und C eine Boolesche Algebra, so daß es eine Injektion $f : \omega_1 \longrightarrow C$ und einen Isomorphismus $\varphi : B_T \longrightarrow C$ gibt, so daß, für alle $t \in \omega_1$, $\varphi(b_t) = f(t)$ ist. Die Algebra C hat die Eigenschaft † bzgl. T genau dann, wenn für jedes $n \in \omega$ und jede n-te freie Potenz $\big((e_m)_{m<n}, (D, \wedge_n, \vee_n, \dots)\big)$ von C, wobei $\sqsubseteq_n$ die kanonische Ordnung von D bezeichnet, gilt:

Wann immer für $h \in \mathrm{Hom}(D, D)$

$$\begin{aligned}\exists\, t_0, \dots, t_{n-1}, s_0, \dots, s_{n-1} \in T\, \exists\, a \in D\, \exists\, l < n\big(\forall m < n(b_{t_m} \cap b_{s_l} = \emptyset)\\ \wedge\ a \sqsubseteq_n e_0 \circ f(t_0) \wedge_n \cdots \wedge_n e_{n-1} \circ f(t_{n-1})\\ \wedge\ h(a) \sqsubseteq_n e_0 \circ f(s_0) \wedge_n \cdots \wedge_n e_{n-1} \circ f(s_{n-1})\big) \qquad (*)\end{aligned}$$

gilt, dann ist $h \notin \mathrm{Aut}(D)$. □

Diese Definition ist unabhängig von f und φ. Natürlich hat B_T die Eigenschaft † bzgl. T genau dann, wenn irgendeine isomorphe Algebra C sie hat. Da der Baum T immer aus dem Kontext heraus bestimmt sein wird, wird nicht mehr auf T Bezug genommen werden.

Lemma 3.16. *Wenn für einen Baum T mit $\forall t \in T(|\mathrm{succ}_T(t)| \geq \omega)$ die Algebra B_T die Eigenschaft † hat, dann ist B_T starr.*

Beweis. Sei $h \in \mathrm{Aut}(B_T)$ und $h \neq \mathrm{id}_{B_T}$. Dann existiert ein $b \in B_T$ mit $h(b) \neq \emptyset$ und $h(b) \cap b = \emptyset$ Da die Menge E_T der kanonischen Erzeuger dicht in B_T liegt, existieren $t, s \in T$ mit $b_t \subseteq b$ und $b_s \subseteq h(b_t)$. Sei $a := h^{-1}(b_s)$. Dann ist $a \cap h(a) = \emptyset$. Damit sind die Voraussetzungen für $(*)$ für die erste freie Potenz (id_{B_T}, B_T) von B_T erfüllt, jedoch nicht die Konsequenz. Also hat B_T nicht die Eigenschaft †. □

Nun wird mit Hilfe der $\diamondsuit$-Folge $(A_\alpha : \alpha < \omega_1)$ ein ω_1-Souslin-Baum konstruiert, dessen Baumalgebra die Eigenschaft † hat.

Satz 3.17. *Aus $\diamondsuit$ folgt die Existenz eines ω_1-Souslin-Baumes T, für den B_T die Eigenschaft † hat.*

Beweis. Der Baum T wird die Form $(\omega_1, \lhd)$ haben. Seien $I_\beta := \{\omega \cdot \beta + i : i \in \omega\}$ für alle $\beta < \omega_1$, $g : \omega^2 \longrightarrow \omega$ eine Bijektion, $f : \omega_1 \longrightarrow \omega_1$ eine Injektion mit $|\omega_1 \setminus f[\omega_1]| = \omega_1$ und, für jedes $m \in \omega$, $e_m : \omega_1 \longrightarrow \omega_1$ eine Injektion, so daß $\forall m, m' \in \omega(m \neq m' \Rightarrow e_m[\omega_1] \cap e_{m'}[\omega_1] = 2)$ und $|\omega_1 \setminus \bigcup\{e_m[\omega_1] : m < n\}| = \omega_1$. Die Ordnung $\lhd$ wird induktiv konstruiert, so daß gilt:

1. $\lhd$ ist eine Baumordnung auf ω_1 und für alle $\beta < \omega_1$ gilt $\mathrm{Lev}_\beta(T) = I_\beta$.
2. Für alle $\beta < \omega_1$ und $i, m \in \omega$ gilt $(\omega \cdot \beta + i) \lhd (\omega \cdot (\beta + 1) + g(m, i))$.
3. Falls $\beta < \alpha < \omega_1$ und $x \in I_\beta$, dann gibt ein $y \in I_\alpha$ mit $x \lhd y$.
4. Wann immer $\alpha < \omega_1$ eine Limesordinalzahl ist, $c[\alpha] = \alpha^8$, $T_\alpha = \alpha$ und $c[A_\alpha] = A \times \sqsubseteq \times \{n\} \times \sqsubseteq_n \times h$, wobei
   - A maximale Antikette in T_α ist,
   - $\sqsubseteq$ eine Halbordnung auf α, so daß es einen Isomorphismus $\varphi : (B_{T_\alpha}, \subseteq) \longrightarrow (\alpha, \sqsubseteq)$ gibt, für den, für jedes $t \in T_\alpha$, $\varphi(b_t^{T_\alpha}) = f(t)$ gilt,
   - $\sqsubseteq_n$ eine Halbordnung auf α, so daß $((e_m)_{m<n}, (\alpha, \sqsubseteq_n))$ eine n-te freie Potenz von $(\alpha, \sqsubseteq)$ ist, bzw., für $n = 1$, $\sqsubseteq = \sqsubseteq_n$, und
   - h Automorphismus von $(\alpha, \sqsubseteq_n)$,

dann

$$\forall x \in \mathrm{Lev}_\alpha(T)\exists y \in A_\alpha(y \lhd x).$$

5. Wenn für h, T_α und $n > 1$ zusätzlich $(*)$ aus Definition 2.3 gilt, bzw. für $n = 1$ $(*)$ gilt, wenn man e_0 durch id_α ersetzt, dann existieren Ketten $t_0^m \lhd t_2^m \lhd \dots$ und $t_1^m \lhd t_3^m \lhd \dots$ für $m < n$, die jeweils beliebig hohe Level von T_α treffen, so daß, mit $a_i := e_0 \circ f(t_{i+1}^0) \wedge_n \cdots \wedge_n e_{n-1} \circ f(t_{i+1}^{n-1})$, für gerade $i \in \omega$

$$a_{i+1} \sqsubseteq_n h(a_i)$$

gilt, für ungerade $i \in \omega$

$$a_{i+1} \sqsubseteq h^{-1}(a_i)$$

gilt, und außerdem

$$\exists x_0, \dots, x_{n-1} \in \mathrm{Lev}_\alpha(T)\forall i \in \omega\forall m < n(t_{2i}^m \lhd x_m)$$

und

$$\exists m < n\nexists x \in \mathrm{Lev}_\alpha(T)\forall i \in \omega(t_{2i+1}^m \lhd x).$$

Wenn es gelingt $\lhd$ mit diesen Eigenschaften zu konstruieren, sorgen (1) und (2) dafür, daß T ein immer verzweigender ω_1-Baum ist, wobei $\forall t \in T(|\mathrm{succ}_T(t)| = \omega)$ gilt. Wegen (4) ist T dann ω_1-Souslin:

Es genügt zu zeigen, daß jede maximale Antikette abzählbar ist. Sei also A eine maximale Antikette in T. Man wähle $\sqsubseteq$ so, daß es einen Isomorphismus $\varphi : (B_T, \subseteq) \longrightarrow (\omega_1, \sqsubseteq)$ mit $\forall t \in T(\varphi(b_t^T) = f(t))$ gibt. Dann ist die Menge

$$S = \{\alpha < \omega_1 : c[\alpha] = \alpha^8 \wedge c[A_\alpha] = A \cap \alpha \times \sqsubseteq \cap \alpha^2 \times \{n\} \times \sqsubseteq \cap \alpha \times id_\alpha\}$$

stationär in ω_1, denn sie läßt sich auch schreiben als

$$S = \{\alpha < \omega_1 : A_\alpha = c^{-1}[A \times \sqsubseteq \times \{n\} \times \sqsubseteq \times \mathrm{id}_\alpha] \cap \alpha\} \cap \{\alpha < \omega_1 : c[\alpha] = \alpha^8\}.$$

Wegen der Lemmata 3.13 und 3.14 existiert ein $\alpha \in S$ für das die Prämissen von (4) erfüllt sind. Man wähle solch ein α. Für ein $z \in T$ mit $\mathrm{ht}_T(z) > \alpha$ existiert nun ein $x \in Lev_\alpha(T)$ unterhalb von z. Wegen (4) liegt x oberhalb eines $y \in A \cap \alpha$. Da A Antikette ist, folgt daraus $A \subseteq T_{\alpha+1}$ und damit gilt $|A| \leq \omega$.

(5) garantiert, daß die Algebra B_T die Eigenschaft † hat:

Sei $\sqsubseteq$ wie oben. Für $n > 1$ sei $\sqsubseteq_n$ Boolesche Halbordnung auf ω_1, so daß $((e_m)_{m<n}, (\omega_1, \sqsubseteq_n))$ n-te freie Potenz von $(\omega_1, \sqsubseteq)$ ist. Für $n = 1$ ersetze man e_0 durch id_{ω_1} und wähle $\sqsubseteq_n := \sqsubseteq$. Weiter seien A eine maximale Antikette in $(\omega_1, \lhd)$ und $h \in \mathrm{Hom}\big((\omega_1, \sqsubseteq_n), (\omega_1, \sqsubseteq_n)\big)$, so daß $(*)$ aus Definition 3.15 erfüllt ist. Dann ist

$$S' = \{\alpha < \omega_1 : c[\alpha] = \alpha^8 \wedge c[A_\alpha] = A \cap \alpha \times \sqsubseteq \cap \alpha^2 \times \{n\} \times \sqsubseteq_n \cap \alpha \times h \restriction \alpha\}$$

stationär und damit gibt es ein $\alpha \in S'$, für welches die Prämissen von (4) und (5) erfüllt sind, denn die Voraussetzungen von (5) sind natürlich auch auf einer club-Menge erfüllt. Für ein solches α seien $t_0^m \lhd t_2^m \lhd \dots$ und $t_1^m \lhd t_3^m \lhd \dots$ für $m < n$ die in (5) garantierten Ketten in T_α. Weiter seien $x_0, \dots, x_{n-1} \in \mathrm{Lev}_\alpha(T)$ die versprochenen oberen Schranken der Ketten $(t_{2i}^m)_{i\in\omega}$. Sei

$$a := e_0 \circ f(x_0) \wedge_n \cdots \wedge_n e_{n-1} \circ f(x_{n-1}).$$

Dann ist $a \neq \perp_n$ und

$$\forall i \in \omega (a \sqsubseteq_n e_0 \circ f(t_{2i}^1) \wedge_n \cdots \wedge_n e_{n-1} \circ f(t_{2i}^{n-1})).$$

Damit gilt auch

$$\forall i \in \omega (h(a) \sqsubseteq_n e_0 \circ f(t_{2i+1}^1) \wedge_n \cdots \wedge_n e_{n-1} \circ f(t_{2i+1}^{n-1})).$$

Nun existiert wegen des letzten Teils von (5) ein $m < n$ mit $\bigwedge\{f(t_{2i+1}^m) : i \in \omega\} = \perp$ und damit gilt $h(a) = \perp_n$. Also ist $h \notin \mathrm{Aut}\big((\omega_1, \sqsubseteq_n)\big)$.

Man beachte, daß $T_\alpha = \omega \cdot \alpha$ ist. Die Konstruktion von $\lhd$ verläuft nun recht natürlich durch Induktion über die Höhe. Angenommen $\lhd$ ist bereits definiert auf $\omega \cdot \alpha$, so daß (1)-(5) unterhalb von α gelten. Für $\alpha = \beta + 1$ wird die Fortsetzung von $\lhd$ auf $\omega \cdot \alpha \cup I_\alpha$ bereits durch (2) bestimmt:

Für $x \in \omega \cdot \alpha$ und alle $m \in \omega$ sei $x \lhd (\omega \cdot \alpha + g(m, i))$ genau dann, wenn $x = (\omega \cdot \alpha + i)$ oder $x \lhd (\omega \cdot \alpha + i)$ gelten. Damit bleiben (1)-(3) erfüllt, (4) und (5) sind nur für Limeszahlen α relevant.

Sei α eine Limesordinalzahl unterhalb von ω_1, ohne daß die Voraussetzungen von (4) erfüllt sind. Für jedes $x \in T_\alpha = \omega \cdot \alpha$ sei $(\xi_i^x)_{i\in\omega}$ eine kofinale Folge in α mit $\mathrm{ht}_{t_\alpha}(x) < \xi_0^x < \xi_1^x < \dots$. Man wähle induktiv für jedes $i \in \omega$ ein $y_i^x \in \mathrm{Lev}_{\xi_i^x}(T_\alpha)$, so daß $x \lhd y_0^x \lhd y_1^x \lhd \dots$ gilt. Das geht wegen (3). Es sei

$$B(x) := \bigcup\{\mathrm{pred}_{T_\alpha}(y_i^x) : i \in \omega\}$$

Dann ist jedes $B(x)$ eine Kette in T_α durch x, die jeden Level von T_α schneidet. Nun sei $\{x_i : i \in \omega\}$ eine Aufzählung von $\omega \cdot \alpha$. Man definiere, für $z \in \omega \cdot \alpha$, $z \lhd (\omega \cdot \alpha + i)$ genau dann, wenn $z \in B(x_i)$. Da $B(x_i)$ jeden Level von T_α trifft, hat $(\omega \cdot \alpha + i)$ die Höhe α in T. Der Rest von (1)-(3) bleibt ebenso erfüllt.

Für eine Limesordinalzahl α, für die die Prämissen von (4) erfüllt sind, aber nicht die von (5), verbessert man die Wahl der $B(x)$ so, daß jedes $B(x)$ die Antikette A schneidet:

Für $x \in T_\alpha$ wählt man zunächst $y^x \in T_\alpha$ oberhalb von x und einem Element von A. Das geht, da A maximal ist. Nun ersetzt man $B(x)$ durch $B(y^x)$. Damit ist zusätzlich zu (1)-(3) auch (4) erfüllt.

Falls nun auch die Voraussetzungen von (5) erfüllt sind, seien $a \in (\alpha, \sqsubseteq_n)$ und $l < m$ wie in $(*)$ aus Definition 3.15. Seien $t_0, \dots, t_{n-1}, t_0', \dots, t_{n-1}' \in T_\alpha$, so daß

$$e_0 \circ f(t_0) \wedge_n \cdots \wedge_n e_{n-1} \circ f(t_{n-1}) \sqsubseteq_n a$$

und

$$e_0 \circ f(t_0') \wedge_n \cdots \wedge_n e_{n-1} \circ f(t_{n-1}') \sqsubseteq_n h(a)$$

gelten und jedes $f(t_m)$ oberhalb eines Elementes von A liegt. Für $m < n$ seien $(\xi^m_{2i})_{i\in\omega}$ und $(\xi^m_{2i+1})_{i\in\omega}$ kofinale Folgen in α mit $\mathrm{ht}_{T_\alpha}(t_m) < \xi^m_0 < \xi^m_2 < \dots$ und $\mathrm{ht}_{T_\alpha}(t'_m) < \xi^m_1 < \xi^m_3 < \dots$. Nun wähle man für alle $m < n$ Ketten $t^m_0 \lhd t^m_2 \lhd \dots$ und $t^m_1 \lhd t^m_3 \lhd \dots$ mit

- $t_m \lhd t^m_0$ und $t'_m \lhd t^m_1$,
- $\forall i \in \omega\big(\mathrm{ht}_{T_\alpha}(t^m_i) > \xi^m_i\big)$ und
- $\forall i \in \omega\big(e_0 \circ f(t^0_{i+1}) \wedge_n \dots \wedge_n e_{n-1} \circ f(t^{n-1}_i) \sqsubseteq_n h^{(-1)^i}(e_0 \circ f(t^0_{i+1}) \wedge_n \dots \wedge_n e_{n-1} \circ f(t^{n-1}_i))\big)$.

Das geht wegen der Lemmata 3.10 und 3.12. Nun sei für $m < n$

$$B(t_m) := \bigcup\{\mathrm{pred}_{T_\alpha}(t^i_m) : i \in \omega\}$$

und weiterhin

$$B' := \bigcup\{\mathrm{pred}_{T_\alpha}(t^l_i) : i \in \omega\}.$$

Für die restlichen $x \in \omega \cdot \alpha$ wähle man wie oben $B(x)$ mit $B(x) \cap A \neq \emptyset$ und zusätzlich $B(x) \neq B'$. Das geht, da T_α immer verzweigend ist. Dann definiert man die Fortsetzung von $\lhd$ auf $\omega \cdot \alpha \cup I_\alpha$ wie oben.

Dieses garantiert, daß die Ketten $(t^m_{2i})_{i\in\omega}$ obere Schranken in $\mathrm{Lev}_\alpha(T)$ haben, die Kette $(t^0_{2i+1})_{i\in\omega}$ jedoch nicht. Damit ist zusätzlich zu (1)-(4) auch (5) erfüllt. □

3.3. Aus topologischer Sicht. Die Motivation einen ω_1-Souslin-Baum zu konstruieren, dessen Baumalgebra die Eigenschaft † hat, liegt in den topologischen Eigenschaften des dualen Raumes der Algebra. Der Raum $X := \mathrm{Ult}(B_T)$ läßt sich als eine Art Erweiterung von T ansehen.

Lemma 3.18. *Für einen Baum T gibt es eine natürliche Bijektion zwischen den initialen Ketten von T und den Ultrafiltern von B_T, definiert durch*

$$\forall p \in \mathrm{Ult}\, B_T(\Phi(p) := \{t \in T : b_t \in p\}). \quad \square$$

Das ermöglicht eine gute Einsicht in die Topologie von X:

Lemma 3.19. *Sei T ein ω_1-Souslin-Baum. Dann erfüllt $X = \mathrm{Ult}\, B_T$ das erste Abzählbarkeitsaxiom.*

Beweis. Sei $x \in X$. Unterscheide drei Fälle:

1. Die Kette $\Phi(x)$ hat ein Maximum $t \in T$. Dann sei
$$E(x) := \{b_s : s \in \Phi(x)\} \cup \{T \setminus b_s : s \in \mathrm{succ}(t)\}.$$
2. Die Kette $\Phi(x)$ ist beschränkt in T, hat aber kein Maximum. Dann sei $S(x) \subseteq T$ die Menge der minimalen oberen Schranken von $\Phi(x)$ und
$$E(x) := \{b_s : s \in \Phi(x)\} \cup \{T \setminus b_s : s \in S(x)\}.$$
3. $\Phi(x)$ ist unbeschränkt in T. Dann sei
$$E(x) := \{b_s : s \in \Phi(x)\}.$$

Offenbar gilt $E(x) \subseteq x$. $E(x)$ erzeugt den Ultrafilter x:

Für $y \in X$ mit $E(x) \subseteq y$ gilt wegen Lemma 3.18 $y = x$. Damit existiert für jedes $a \in x$ eine endliche Teilmenge $F \subseteq E(x)$ mit $\bigcap F \subseteq a$, da sonst $E(x) \cup \{T \setminus a\}$ in einem von x verschiedenen Ultrafilter enthalten wäre.

Sei $\overline{E(x)}$ der Abschluß von $E(x)$ unter endlichen Durchschnitten. Die $s \in T$ mit $b_s \in E(x)$ oder $T \setminus b_s \in E(x)$ liegen in der Vereinigung von einer Kette mit einer Antikette von T. Damit ist $E(x)$ abzählbar und somit auch $\overline{E(x)}$. Da x von $E(x)$ erzeugt wird, ist $\big\{\{y \in X : a \in y\} : a \in \overline{E(x)}\big\}$ eine abzählbare Umgebungsbasis von x. $\square$

Jetzt kommt die Eigenschaft † ins Spiel.

Lemma 3.20. *Sei T ein Baum mit $|\operatorname{succ}_T(t)| \geq \omega$, so daß B_T die Eigenschaft † hat. Dann sind alle endlichen Potenzen von $X = \operatorname{Ult}(B_T)$ inhomogen. Genauer gilt für jedes $n \in \omega$ und jeden Autohomöomorphismus h von X^n:*

$$\forall x_0, \dots, x_{n-1}, y_0, \dots, y_{n-1} \in X\big(h\big((x_0, \dots, x_{n-1})\big) = (y_0, \dots, y_{n-1}) \\ \Rightarrow \{x_0, \dots, x_{n-1}\} = \{y_0, \dots, y_{n-1}\}\big).$$

Beweis. Seien $n \in \omega$, $h : X^n \longrightarrow X^n$ ein Homöomorphismus und $x_m, y_m \in X$ für alle $m < n$, sodaß $h\big((x_0, \dots, x_{n-1})\big) = (y_0, \dots, y_{n-1})$ und $\{x_0, \dots, x_{n-1}\} \neq \{y_0, \dots, y_{n-1}\}$. O.B.d.A. existiere ein $l < n$ mit $x_l \notin \{y_0, \dots, y_{n-1}\}$, sonst gehe man von h zu h^{-1} über. Für alle $m < n$ bezeichne $\pi_m : X^n \longrightarrow X$ die m-te Projektionsabbildung. Seien A und B disjunkte offene Mengen in X mit $x_l \in A$ und $y_m \in B$ für alle $m < n$. Dann gibt es $U_0, \dots, U_{n-1} \in \operatorname{Clop} X$ mit $U_0 \times \dots \times U_{n-1} \subseteq \pi_m^{-1}[B]$ und $h^{-1}[U_0 \times \dots \times U_{n-1}] \subseteq \pi_m^{-1}[A]$. Für $a \in B_T$ sei $s(a) := \{x \in X : a \in x\}$. Damit ist $s : B_T \longrightarrow \operatorname{Clop} X$ der kanonische Isomorphismus. Dann existieren $t_0, \dots, t_{n-1} \in T$ mit $s(b_{t_m}) \subseteq U_m$ für alle $m < n$. Nun wähle man $s_0, \dots, s_{n-1} \in T$ mit

$$s(b_{s_0}) \times \dots \times s(b_{s_{n-1}}) \subseteq h^{-1}[s(b_{t_0}) \times \dots \times s(b_{t_{n-1}})].$$

Man setze $a := h[s(b_{s_0}) \times \dots \times s(b_{s_{n-1}})]$. Sei $h^* : \operatorname{Clop} X^n \longrightarrow \operatorname{Clop} X^n$ definiert durch

$$\forall b \in \operatorname{Clop} X^n (h^*(b) = h^{-1}[b]).$$

Dann ist h^* Automorphismus von $\operatorname{Clop} X^n$ und es gilt $h^*(a) = s(b_{s_0}) \times \dots \times s(b_{s_{n-1}})$ und $a \subseteq s(b_{t_0}) \times \dots \times s(b_{t_{n-1}})$. Außerdem gilt $b_{s_l} \cap b_{t_m} = \emptyset$ für alle $m < n$. Da B_T die Eigenschaft † hat, kann es solch ein h^* nicht geben. Damit ist X^n inhomogen, da es für $x, y \in X$ mit $x \neq y$ keinen Autohomöomorphismus h von X^n gibt, so daß $h\big((x, \dots, x)\big) = (y, \dots, y)$ gilt. $\square$

Für einen geeigneten Baum hat der Raum, der zu der zu dem Baum gehörigen Algebra dual ist, keine isolierten Punkte.

Lemma 3.21. *Sei T ein Baum, so daß für jedes $t \in T$ gilt: $|\operatorname{succ}_T(t)| \geq \omega$. Dann hat $X = \operatorname{Ult} B_T$ keine isolierten Punkte.*

Beweis. Sei $x \in X$ und $U \subseteq X$ Umgebung von x. Da die Menge der kanonischen Erzeuger b_t von B_T dicht in B_T liegt, gibt es ein $t \in T$, so daß $V := \{y \in X : b_t \in y\} \subseteq U$ gilt. V ist unendlich, denn V enthält die disjunkten, nichtleeren Mengen $\{y \in X : b_s \in y\}$ für $s \in \mathrm{succ}_T(t)$. Also sind alle Umgebungen von x unendlich. □

Damit läßt sich das Lemma 3.20 noch etwas verbessern.

Lemma 3.22. *Sei T ein Baum wie in Lemma 3.20. Dann gilt für $n \in \omega$, $X = \mathrm{Ult}\, B_T$ und jeden Autohomöomorphismus $h : X^n \longrightarrow X^n$:*

$$\forall x_0, \ldots, x_{n-1} \in X \exists \sigma \in \mathrm{S}_n \big(h\big((x_0, \ldots, x_{n-1})\big) = (x_{\sigma(0)}, \ldots, x_{\sigma(n-1)})\big).$$

Beweis. Da X keine isolierten Punkte hat, liegt die Menge

$$N := \{(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in X^n : \forall i, j < n (i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j)\}$$

dicht in X^n.

Sei nun $x = (x_0, \ldots, x_{n-1})$ ein beliebiges Element von X^n und $(x^i)_{i \in I}$ ein Netz in N, das gegen x konvergiert. Wegen Lemma 3.20 gibt es für jedes $x^i = (x_0^i, \ldots, x_{n-1}^i)$ eine eindeutig bestimmte Permutation $\sigma^i \in \mathrm{S}_n$ mit

$$h\big((x_0, \ldots, x_{n-1})\big) = (x_{\sigma^i(0)}, \ldots, x_{\sigma^i(n-1)}).$$

Nun existiert eine kofinale Teilmenge $I' \subseteq I$ und ein $\sigma \in \mathrm{S}_n$ mit $\sigma = \sigma^i$ für alle $i \in I'$. Für jedes $m < n$ konvergiert das Netz $(x_m^i)_{i \in I'}$ gegen x_m und damit konvergiert $(x_{\sigma(0)}^i, \ldots, x_{\sigma(n-1)}^i)_{i \in I'}$ einerseits gegen $(x_{\sigma(0)}, \ldots, x_{\sigma(n-1)})$ und andererseits gegen $h(x)$. Es ist also $h\big((x_0, \ldots, x_{n-1})\big) = (x_{\sigma(0)}, \ldots, x_{\sigma(n-1)})$. □

Insgesamt erhält man schließlich folgenden Satz:

Satz 3.23. *Aus $\diamond$ folgt die Existenz eines kompakten, nulldimensionalen topologischen Raumes X ohne isolierte Punkte, der das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, sodaß für jedes $n \in \omega$ und jeden Autohomöomorphismus h von X^n gilt:*

$$\forall x_0, \ldots, x_{n-1} \in X \exists \sigma \in \mathrm{S}_n \big(h\big((x_i)_{i<n}\big) = (x_{\sigma(i)})_{i<n}\big).$$

Insbesondere sind alle endlichen Potenzen von X inhomogen.

Beweis. Wähle $X = \mathrm{Ult}\, B_T$, wobei $T = (\omega, \lhd)$ der in Satz 3.17 konstruierte Baum ist. □

Man könnte nun hoffen, daß sich das Lemma 3.22 dahingehend verbessern läßt, daß man zu jedem Punkt $x \in X^n$ eine Umgebung U von x und ein $\sigma \in \mathrm{S}_n$ finden kann, so daß, für alle $y = (y_0, \ldots, y_n - 1) \in U$, $h(y) = (y_{\sigma(0)}, \ldots, y_{\sigma(n-1)})$ gilt. Dies geht jedoch nicht, zumindest nicht unter $\diamond$, wie folgendes Gegenbeispiel zeigt:

Sei $X = \mathrm{Ult}\, B_T$, T wie in Satz 3.17, und x ein beliebiger Punkt von X. Wegen Lemma 3.21 ist x nicht isoliert. Weiter sei $(U_i)_{i \in \omega}$ eine offen-abgeschlossene Umgebungsbasis von x, die absteigend geordnet ist, mit $U_0 = X$. Dann zerfällt $X \setminus \{x\}$ in die offen-abgeschlossenen Mengen $A_i := U_i \setminus U_{i+1}$. Nun kann man einen Autohomöomorphismus h von X^2 wie folgt definieren:

$$h\big((x_0,x_1)\big) = \begin{cases} (x_0,x_1) & \text{, falls } x_0 \text{ und } x_1 \text{ in demselben } A_i \text{ liegen} \\ & \quad \text{oder } x_0 = x \text{ oder } x_1 = x \text{ gilt,} \\ (x_1,x_0) & \text{, falls } x_0 \text{ und } x_1 \text{ in verchiedenen } A_i \text{ liegen.} \end{cases}$$

Daß h Homöomorphismus ist, ist klar. Nun gibt es in jeder Umgebung von (x,x) sowohl Punkte (x_0,x_1) mit $x_0 \neq x_1$ und $h\big((x_0,x_1)\big) = (x_1,x_0)$ als auch mit $x_0 \neq x_1$ und $h\big((x_0,x_1)\big) = (x_0,x_1)$.

Literaturverzeichnis

[1] A.V. Arkhangel'skiĭ, *Topological homogeneity. Topological groups and their continuous images*, Russian Math. Surveys, **42** (1987), 83-131

[2] Murray G. Bell, *Nonhomogeneity of Powers of Cor Images*, Rocky Mountain J. Math. **22** (1992), 805-812

[3] W.W. Comfort, *Topological Groups*, Handbook of Set-theoretic Topology, North Holland, Amsterdam (1984), 1145-1263

[4] W.W. Comfort, S. Negrepontis, *The Theory of Ultrafilters*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band **211**, Springer, Berlin (1974), 206-210

[5] E. van Douwen, *Nonhomogeneity of Products and π-weight*, P.A.M.S. **69** (1978), 183-192

[6] E. van Douwen, *A compact space with a measure that knows which sets are homeomorphic*, Adv. Math., **52** (1981), 1-33

[7] R. Engelking, *General Topology*, Sigma Series in Pure Mathematics, Volume **6**, Heldermann Verlag, Berlin (1989)

[8] L. Heindorf, *On zero-dimensional continous images of compact ordered spaces*, Preprint No. A-2/95, Mathematik, Freie Universität Berlin (1995)

[9] R. Hodel, *Cardinal functions I*, Handbook of Set-theoretic Topology, North Holland, Amsterdam (1984), 1-57

[10] O.H. Keller, *Die Homoiomorphie der konvexen Mengen im Hilbertschen Raum*, Math. Ann. **105** (1931), 748-758

[11] S. Koppelberg, *Handbook of Boolean Algebras*, North Holland, Amsterdam (1989)

[12] S. Koppelberg, *A lattice structure on the isomorphism type of complete Boolean algebras*, Set Theory and Model Theory, Lecture Notes in Mathematics, Volume **872**, Springer, Berlin (1981), 98-126

[13] K. Kunen, *Weak P-Points in ω^**, Topology, Coll. Math. Soc. Bolyai Janos **23**, Budapest (1978), 741-749

[14] K. Kunen, *Large Homogeneous Compact Spaces*, Open Problems in Topology, North Holland, Amsterdam (1990), 263-269

[15] K. Kunen, *Set Theory*, Studies in Logic, Volume **102**, North Holland, Amsterdam (1980)

[16] Kuz'minov, *On a hypothesis of P.S. Alexandroff in the theory of topological groups*, Doklady Akad. Nauk. SSSR N.S., **125**, (1959), 727-729

[17] J. van Mill, *An Introduction to $\beta\omega$*, Handbook of Set-theoretic Topology, North Holland, Amsterdam (1984), 505-557

[18] V.V. Pašenkov, *extensions of compact spaces*, Soviet Math. Dokl., Volume **15**, (1974), 43-47

[19] S. Shelah, *Proper Forcing*, Lecture Notes in Mathematics, Volume **940**, Springer, Berlin (1982), 213-220