Von Pascal über Euler bis Fermat

(Fermat 3.1 DE)

Verfasst im Försterhaus in der Zeit von 2003 bis 24.06.2021

0. Inhalt

a. Literaturnachweis:

Lehrbuch der Mathematik für Grundschule aus den fünfziger Jahren

b. Verzeichnis der benutzten Abkürzungen:

G.................Elementarer Generator.
G(..).............Reihen Generator
eF_n..............Elementare Folge ***n***-tes Grades
FT................Fermatsches Tripel
P-Δ.............Pascalsches Dreieck
PH...............Pascalsche Halbebene
PZE.............Pascalsche Zahlenebene
uG................unendlicher Generator
ZT.................Zahlen-Tripel.

c. Verzeichnis der benutzten Symbole in Gleichungen:

G(a;b;c)....... Werte eines Reihen-Generators in Grundposition
$G_{(m;n)}(.a;bc\ )$..Werte eines Reihen-Generators in beliebiger Position
$F_n(a;b;c)$........Folge ***n***-ten Grades gebildet mittels $G_{(0;-1)}(.a;b;c)$
$w_{(m;n)}$.............Wert eines Elements mit den Koordinaten ***m*** und ***n***

1. Der Sinn des Unternehmens

Es war nur eine Laune; einmal habe ich für eine Lösung eines technischen Problems eine arithmetische Folge höheren Grades benötigt. Und ich konnte nicht weiterkommen. Bei der suche nach der Lösung ist mir etwas eingefallen, was ich noch nirgendwo gelesen habe (ich muss gestehen - ich habe auch nicht besonders fleißig gesucht) und was mir im nachhinein eine großes Vergnügen bei dem bis an meine geistige Grenze gehenden Durchdenkens der Idee gebracht hat. Es war einfach eine abenteuerliche Reise vom Einfachsten so tief wie es mein Gehirn verfolgen konnte. Und am Ende dieses Spieles sind einige neue und faszinierende Rätsel aufgetaucht.

2. Das Pascalsche Dreieck und dessen Rotation–die Beziehungen und Definitionen.

a. Eine Konstrution und Berechnung eines Elements des P-Δ

j = 0					1				
j = 1				1		1			
j = 2			1		2		1		
j = 3		1		3		***w***		1	
j = 4	1		4		6		4		1

….

k= 0 ***k***= 1 ***k***= 2 ***k***= 3 ***k***= 4 …….

Jedes Element eines ***P***-Δ gleicht der Summe der Elemente unmittelbar rechts und links in der Zeile über ihm. Das Element in der Zeile ***j* = *0*** ist per Definition eine Eins. Die Positionen außerhalb ***P***-Δ sind stillschweigend alle gleich Null.
Eine Berechnung des numerischen Werts desselben Elements kann mittels der Koordinaten direkt (***j***..waagerechte Zeile, ***k*..**Diagonale) gemäß folgender Gleichung getätigt werden:

$$w_{(j;k)} = \left|\begin{matrix} j \\ k \end{matrix}\right|$$

b. Eine Konstrukion und Berechnung eines Elementen des gedrehten *P*-Δ

Durch Rotation eines ***P***-Δ um seine Spitze in den ersten Quadranten der orthogonalen Koordinaten entsteht folgendes Gebilde:

.....

n= 4	1	5	15	35	70	126	210	330	495
n= 3	1	4	10	20	***w***	56	84	120	165
n= 2	1	3	6	10	15	21	28	36	45
n= 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n= 0	1	1	1	1	1	1	1	1	1

m=0 m= 1 m= 2 m= 3 m= 4 m= 5 m= 6 m= 7 m= 8 ....

Jedes Element eines gedrehten ***P***-Δ gleicht der Summe der Elemente unmittelbar links neben ihm und unter ihm. Vorläufig gilt, das Element mit den Koordinaten $m = 0$ und $n = 0$ ist per Definition gleich ***1,*** und die Elemente mit den Koordinaten $m < 0$ oder $n < 0$ sind zuerst stillschweigend alle gleich Null. Die Berechnung kann direkt in neuen Koordinaten durchführt werden. Die urspüngliche Koordinate ***k*** wird in Koordinate ***n*** umbenannt; die urspüngliche Koordinate ***j*** wird in der Formel durch die Addition der neuen Koordinaten ***m* + *n*** ersetzt**.**.
Damit wird die Berechnung des $w_{(m;n)}$ so verändert;

$$w_{(m;n)} = \left|\begin{matrix} (m+n) \\ m. \end{matrix}\right|$$

oder anders

$$w_{(m;n)} = \left|\begin{matrix} (m+n) \\ n \end{matrix}\right|$$

oder in Bruchform

$$w_{(m;n)} = \frac{(m+n)!}{}$$

$m!\,n!$

(gilt nur für $m,n \geq 0$. Dabei ist $0!=1$.)

3. Erweiterung des P-Δ in die gesamte Ebene

a. Erweiterung in die erste Zeile ($m \geq 0$, $n =-1$) des vierten Quadranten ($m \geq 0$, $n < 0$)

Was die Drehung des ***P***-Δ in dem vierten Quadranten der Zahlenebene bewirkt, wird anhand des Verfahrens in Absatz **2. b.** umgeändert in die passende Form „der numerische Wert des Elements gleicht dem Wert des direkt über ihm liegenden Elements nach Subtraktion des Wertes des Elementes links über ihm". Für diesen Fall sollte auch weiter gelten, dass alle Elemente für $m < 0$ gleich Null sind.

Die Konstruktion des Elements in der Zeile $n = -1$ ergibt für alle Werte $m > 0$ das Ergebnis $w_{(m;-1)} = 0$, außer für $m = 0$, wo das Ergebnis $w_{(0;-1)} = 1$ lautet.

b. Erweiterung in die erste Spalte ($m = -1$ und $n \geq 0$) des zweiten Quadranten ($m < 0$ und $n \geq 0$)

Das Ergebnis für die Koordinaten $m < 0$ und $n \geq 0$ kann man analog wie oben bestimmen; diesmal lautet die passende Form „der numerische Wert eines Elements gleicht dem Wert des rechts neben ihm liegenden Elementes nach Subtraktion des Wertes des Elementes rechts unter ihm". Für diesen Fall sollte auch weiter gelten, dass alle Elemente für $n < 0$ gleich Null sind.

Die Konstruktion des Elements in der Spalte $m = -1$ gibt für alle Werte $n>0$ das Ergebnis $w_{(-1;n)} = 0$.ausser für $n = 0$, wo das Ergebnis $w_{(-1;0)} = 1$ lautet.

c. Gleichung der Pascalschen Zahlenebene (*PZE*)

Die „Einser" $w_{(0;-1)} = 1$ im Absatz **3.a**. und $w_{(-1;0)} = 1$ im Absatz **3.b.** können nicht gleichzetig existieren, weil bei deren rückwärtiger Konstruktion im erstes Quadranten alle Elemente einen doppelten Wert gegenüber dem umgedrehten ***P***-Δ hätten. Falls die Werte gleich bleiben sollen, muss der Wert bei den Koordinaten $m = 0$ und $n = -1$ gleich 1 und gleichzeitig der Wert bei den Koordinaten $m = -1$ und $n = 0$ gleich Null sein, oder umgekehrt. Oder anders; Summe dieser beiden Werte muss gleich 1 sein.

Bei der Wahl der Anfangsbedingungen $w_{(0;-1)} = 1$ und $w_{(-1;0)} = 0$ und Konstruktion gemäß des in den Absatz **3. a.** aufgeführten Algorithmus auch für die übrigen Elemente mit $n < -1$ enstehen im vierten Quadranten ($m \geq 0$, $n < 0$) weitere Elemente. Der zweite Quadrant bleibt leer, also mit Nullen gefüllt.

Bei der Wahl der Anfangsbedingungen $w_{(0;-1)} = 0$ und $w_{(-1;0)} = 1$ und Konstruktion gemäß des im Absatz **3. b.** aufgeführten Algorithmus auch für die übrigen Elementen mit $m < -1$ enstehen im zweiten Quadranten ($m < 0$, $n \geq 0$) weitere Elemente $\neq 0$. Der vierte Quadrant bleibt leer (mit Nullen gefüllt).

Der dritte Quadadrant ($m < 0$, $n < 0$) beinhaltet in beiden vorherigen Möglichkeiten nur Nullen.

Ein Teil der ***PZE*** in der Umgebung des Koordinatenursprungs mit berechneten Werten für diese Anfangsbedingungen, und mit berechneten Werten für die zweiten möglichen Anfangsbedingungen (rot) sind im folgenden Bild dargestellt:

				1	5	15	***a***	***c***

	-1				1	4	10	20	***b***
n= 4	3	1			1	3	6	10	15
n= 3	-3	-2	-1		1	2	3	4	5
n= 2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
n= 1					1				
n= 0					1	-1			
n= -1					1	-2	1		
n= -2					1	-3	3	-1	
n= -3									
n= -4									
	m= -4	***m***= -3	***m***= -2	***m***= -1	***m***= 0	***m***= 1	***m***= 2	***m***= 3	***m***= 4 .....

Bemerkung: Da die neugewonnenen Werte in den übrigen Zeilen und Spalten des zweiten und vierten Quadraten um die Diagonale des ersten und dritten Quadranten symmetrisch sind, ist es nicht sinnvoll die beide Alternativen zu untersuchen. Es ist es günstiger nur mit der rechten ***Pascalschen Halbebene*** (***PH***) zu arbeiten**,** weil die Abbildungen dann besser auf die Seite passen. Die Werte in der rechten ***PH*** sind eindeutig durch die Gleichung

$$w_{(m;n)} = \left| \begin{matrix} m+n \\ n \end{matrix} \right|$$

mit Anfangsbedingungen $w_{(0;-1)} = 1$ und $w_{(-1;0)} = 0$ bestimmt.

d. Die Begriffe Generator *G*, Pascalsche Halbebene *PH* und Elementarfolge eF_n

PH (Feld) ist durch die Beziehungen zwischen benachbarten Elementen $c = a + b$ (oder $a = c - b$ oder $b = c - a$) und Festlegung der Anfangsbedingung $w_{(0;-1)} = 1$ definiert. Die ***PH*** kann mittels einer Geraden auf verschiedene Arten in zwei Teile zerschnitten werden. Jeder Teil kann anhand Werte an der teilenden Geraden und der Beziehungen, die die ganze Ebene beherrschen, wieder restlos rekonstruiert werden.

Besonders günstig ist die Wahl der teilenden Geraden parallel zu der waagerechten Koordinatenachse, durch die Zeile $n = -1$. Dann trifft die Gerade nur $w_{(0;-1)} = 1$. Die ganze ***PH*** wird durch dieses einzige Element definiert. Dieses Element hat für den ersten Quadranten eine ähnliche Bedeutung wie das Anfangsglied und gleichzeitig die Differenz einer arithmetischen Folge. Es hat aber auch andere Eigenschaften - z.B. bildet es einen Zahlenkeil unter sich. Um eindeutig zu sein, wird hier $w_{(0;-1)} = 1$ ein elementarer Generator ***G*** genannt. Sein Wert ist 1 und er hat die Koordinaten $m = 0$ und $n = -1$.
Ein Generator ***G*** erfüllt die Anfangsbedingungen, bei denen die Gleichung der ***PZE*** die Werte $\neq 0$ nur in der rechten Halbebene erzeugt.

Jede ***n***-te Zeile der ***PH*** für $n \geq 0$ ist eine aritmetische Folge ***n***-tes Grades. Da diese Folgen in ***PH*** durch ***G*** entstehen, werden die elementare (minimale) Folgen ***n***-tes Grades eF_n benannt.

4. Multiplizieren mit Konstante; Addition; absolute u. relative Position des Generators

a. Multiplizieren des Generators *G* mit einer Konstante $K \neq 1$

kann als Addition von ***K*** - gleichliegenden ***PH*** verstanden werden. Dabei werden die ***PH*** *K*-mal aufeinander gelegt.

$$w_{(m;n)} = K \left| \begin{matrix} m+n \\ n \end{matrix} \right|$$

b. Absolute Position der Koordinaten; Anfang der *PH*

Generator ***G*** allein bestmmt den Koordinatenanfang $m = 0$ und $n = -1$.

c. Relative Position; der Koordinaten Anfang der *PH* mit mehreren *G*

Beim Addieren oder Subtrahieren zweier oder mehrerer nicht gleichliegender ***G*,** die an der Achse ***m*** oder ***n*** oder auf beiden verschoben sind**,** müssen die ***G*** einen Index $_{(m,n)}$ besitzen **.** In diesem Fall wird festgelegt, dass das $G_{(m,n)}$ mit der kleinste Koordinate ***m*** die absolute Koordinate $m = 0$ erhält und $G_{(m,n)}$ mit der kleinste Koordinate ***n*** die absolute Koordinate $n = -1$ erhält. Im Bezug auf diesen Koordinatenanfang (wo unter Umständen kein ***G*** liegt) enthält jeder andere $G_{(m,n)}$ einen relativen Index, der durch dessen Entfernung zum Koordinatenanfang festgelegt wird.

d. Addition und Subtraktion *PH*, Reihengenerator *G(..)*

Falls mehrere Generatoren $G_{(m,-1)}$ vorhanden sind, können deren Glieder in ein Reihengenerator **G(..)** als deren Summe (falls sie gleichliegend sind), oder als Aufzählung, getrennt durch Semikolon und mit Abständen entsprechend deren ***m***- Koordinaten eingetragen werden. Falls in einigen Positionen zwischen dem ersten und letzten kein $G_{(m,-1)}$ liegt, wird in der Aufzählung eine Null eingetragen. Subtraktion eines $G_{(m,-1)}$ wird durch ein Minuszeichen dargestellt. Das erste Glied der Aufzählung wird immer der Position $m = 0$ und $n = -1$ zugeordnet und kann auch Null sein. Die Aufzählung endet mit dem letzen $G_{(m,-1)}$, der nicht gleich Null ist. Die ***PH***, die durch Aufeinanderlegen der ***PH*** der einzelnen Glieder entsteht, wird eine ***PH*** von ***G(..)*** genannt. Die Folgen in der ***PH*,** die durch ***G(..)*** entstanden ist, also die Zeilen der ***PH*,** werden als $F_n(..)$ (Folge des ***n***-tes Grades) des Reihengenerators ***G(..)*** bezeichnet.

Manchmal (bei Rechnungen mit Reihengeneratoren) ist es nötig deren Position zu respektieren. Dafür wird die Bezeichnung $G_n(..)$ benutzt.
Die Generatoren, die nicht in der Zeile $n=-1$ liegen, müssen in diese Zeile transformiert werden. Das geschieht so, dass man gedanklich in dessen Position die Spitze des Zahlenkeiles aus dem vierten Quadranten projiziert (ev. mit Konstante multipliziert) und die Zahlen, die in der Zeile $n = -1$ erscheinen, übernimmt.

5. Beziehungen zwischen Elementen der PH und G(..)

a. Konstruktion der Elemente *PH* aus den G(..).

Konstruktion ist ähnlich wie beim gedrehten ***P-Δ*.** Die einzelne Glieder des ***G(..)*** werden in die Zeile $n=-1$ in der gleichen Reihenfolge in die Spalten eingetragen und wie in **3.b** nach oben addiert.

Diese Konstruktion kann man einfach mittels Tabellenkalkulation (z.B. EXCEL) durchführen.

b. Berechnung einen beliebigen Wertes in der *PH aus G(..)*

Gemäß Gleichung **4.a.** kann man für jedes Glied $\neq 0$ des ***G(..)*** den Wert eines jeden beliebigen Elements berechnen. Für mehrere Glieder wird der Endwert des gesuchten Elements aus Beiträgen der einzelnen Glieder (mit Berücksichtigung der Gliederentfernung von $m = 0$) aufsummiert.

c. Ableitung des *G(..)* aus den Werten der Elemente einer bestimmten Zeile des *PH*

Diese Ableitung ist zwar möglich aber mühsam. Viel einfacher ist die Benutzung der Tabellenkalkulation.

6. Praktische Folgen.

a. Darstellung der Binomialkoeffizienten für Potenzen der Variablen - Subtraktion

Der Zahlen-„Keil“ unter dem ***G*** ist ein Analogon zum ***P- Δ***. Im Gegensatz zu letzterem zeigt es aber die Binomialkoeffizienten für Potenzen der Variablensubtraktion, aber mit den richtigen Vorzeichen.

b. Transformation der arithmetischen Folgen in ein *G(..)*

PH transformiert eine beliebige arithmetische Folge beliebigen Grades in ein ***G(..)*** und umgekehrt. Die Berechnungen mit arithmetischen Folgen können durch Berechnungen mittels ***G(..)*** ersetzt werden und umgekehrt.

Einige Beispiele:

Folge des Generator ***G(..)***.	liegt in der Zeile	Folge	Vermerk
$F_1(1)$	$n = 1$	$(m + 1)^1$	***Potenzen***
$F_2(1;1)$	$n = 2$	$(m + 1)^2$	-- „--
$F_3(1;4;1)$	$n = 3$	$(m + 1)^3$	-- „ --
$F_4(1;11;11;1)$	$n = 4$	$(m + 1)^4$	-- „ --
$F_5(1;26;66;26 ;1)$	$n = 5$	$(m + 1)^5$	-- „ --
$F_6(1;57;302;302; 57;1)$	$n = 6$	$(m + 1)^6$	-- „ --
$F_7(1;120;1191;2416;1191;120;1)$	$n = 7$	$(m +1)^7$	-- „ --
$F_1(1;1)$	$n = 1$	$(2 m + 1)^1$	***Potenzen d. Ungeraden***
$F_2(1;6; 1)$	$n = 2$	$(2 m + 1)^2$	-- „ --
$F(1;23; 23;1)$	$n = 3$	$(2 m + 1)^3$	-- „ --
$F_1(2)$	$n =1$	$(2 m + 2)^1$	***Potenzen d. Geraden***
$F_2(4;4)$	$n = 2$	$(2 m + 2)^2$	-- „ --
$F_3(8;32;8)$	$n = 3$	$(2 m + 2)^3$	-- „ --
$F_2(1)$	$n = 2$		**** eine aus m***
$F_4(0;2;1)$	$n = 4$		**** zwei aus m***
$F_6(0;0;6;8;1)$	$n = 6$		**** drei aus m***
$F_8(0;0;0;24;58;22;1)$	$n = 8$		**** vier aus m***
$F_{10}(0;0;0;0;120;444;328;52;1)$	$n = 10$		**** fünf aus m***

* Es sind die Summen der Produkte von nacheinander liegenden Elementen. Zum Beispiel für drei aus m:

$a_1 = (0*0*1) = 0$
$a_2 = (0*1*2) = 0$
$a_3 = (1*2*3) = 6$
$a_4 = (1*2*4) + (1*3*4) + (2*3*4) = 44$
$a_5 = (1*2*5) + (1*3*5) + (1*4*5) + (2*3*5) + (2*3*5) + (2*4*5) + (3*4*5) = 175$
$a_6 = (1*2*6) +............ + (4*5*6) = 510$
.....

$F_2(0;3;-1)$	$n = 2$	$m^2 - m^0$	***Kombinierte Folgen***
$F_2(0;2)$	$n = 2$	$m^2 - m^1$	
$F_3(0;7;-2;1)$	$n = 3$	$m^3 – m^0$	
$F_3(0;6)$	$n = 3$	$m^3 – m^1$	
$F_3(0;4;2)$	$n = 3$	$m^3 - m^2$	
$F_2(2;-1;1)$	$n = 2$	$m^2 + m^0$	
$F_2(2)$	$n = 2$	$m^2 + m^1$	
$F_3(2;1;4;-1)$	$n = 3$	$m^3 + m^0$	
$F_3(2;2;2)$	$n = 3$	$m^3 + m^1$	

$F_3(2;4)$ $\qquad\qquad$ $n = 3$ $\qquad$ $m^3 + m^2$

c. Berechnung der Reihe der Teilsummen einer Folge

Teilsummen einer Folge sind einfach in einer Zeile über dieser Folge liegende Elemente.
.

d. Berechnung mit unterschiedlich gewählten teilenden Linien eines *PH*

Durch eine Wahl der teilende Linie anders als in **4.d.**, kann man verschiedene Generatoren, die zwar unterschiedliche Form, aber das gleiche Resultat haben, erhalten. Als Beispiel dient die dritte Potenz:

n = 3	*1*	*8*	*27*	*64*	*125*	*216*	*343* ....
n = 2	*1*	*7*	*19*	*37*	*61*	*91*	
n = 1	*1*	*6*	*12*	*18*	*24*	*30*	
n = 0	*1*	*5*	*6*	*6*	*6*	*6*	
n = -1	*1*	*4*	*1*	*0*	*0*	*0*	
	m=0	***m= 1***	***m= 2***	***m= 3***	***m= 4***	***m= 5***	***m= 6*** .

Die übliche Berechnung des Wertes eines Elements, z.B. ***m = 6*** und ***n = 3,*** ist definiert in einem Verfahren entlang der schrägen Linie:

$$a_6 = a_0 + \binom{6}{1}\Delta_1 + \binom{6}{2}\Delta_2 + \binom{6}{3}\Delta_3 = 1 + 6*7 + 15*12 + 20*6 = 343$$

Dagegen ergibt die Berechnung entlang der waagerechten Linie mit ***G(..) = $G_3(1,4,1)$*** gemäß des Verfahrens in **5.*b***:

$$a_6 = 1*\binom{6+3}{3} + 4*\binom{5+3}{3} + 1*\binom{4+3}{3},$$ was ebenso die Zahl ***343*** ist.

Die zweite Verfahren ist effektiver, da ein Glied der Berechnung weniger benötigt.

Ähnlich ist es selbstverständlich möglich auch Berechnungen der Teilsummen durchzuführen.

e. Bildung der besonderer (z.B. nicht kontinuierlicher) Folgen.

Durch die geeignete Wahl des Generators ist es möglich, die unterschiedlichsten Folgen zu bilden und rechnerisch zu beherschen. Z.B. für ***G(1;4;1;0;2)*** ist die Folge in der dritte Zeile ***F_3(1;4;1;0;2)***:

n = 3	*1*	*8*	*27*	*64*	*127*	*224*	....
n = 2	*1*	*7*	*19*	*37*	*63*	*97*	
n = 1	*1*	*6*	*12*	*18*	*26*	*34*	
n = 0	*1*	*5*	*6*	*6*	*8*	*8*	
n = -1	*1*	*4*	*1*	*0*	*2*	*0*	
	m=0	***m= 1***	***m= 2***	***m= 3***	***m= 4***	***m= 5***	***m= 6*** .

die ein positive Sprung **+ *2*** ab ***m = 4*** hat.

f. Rechnen mit Fn(..) und mit G(..)

Folgen, die man mittels Generatoren ausdrücken kann, können auch subtrahiert, addiert und mit einer Konstanten multipliziert werden. Es gibt Regeln, die befolgt werden müssen. Eine Operation, die oben erwähnt wurde, bezieht sich bei Folgen nur auf eine Zeile ***n***. Beim

Reihengenerator dagegen bezieht sie sich auf eine ganze ***PH***. Wir betrachten zum Beispiel die Folge der dritten Potenzen:

Aus den Absatz ***6.b.*** ist ersichtlich, dass für die Folge der dritten Potenzen minus der Folge der erste Potenzen nur mit zwei Zeilen gearbeitet wird:
:

$$F_3(1;4;1) - F_1(1) = F_3(0;6)$$

Oder anders

$$F_3(1;4;1) = F_1(1) + F_3(0;6)$$

Die linke Seite dieser Gleichung ergibt ein Element der Folge der dritten Potenzen:

$$F_3(1;4;1) = ((m+3)!)/m!3! + 4((m+3-1)!)/(m-1)!3! + ((m+3-2)!)/(m-2)!3! = (m+1)^3$$

Die rechte Seite der Gleichung ergibt

$$F_1(1) + F_3(0;6) = (m+1)!/m!1! + 6(m+3-1)!/(m-1)!3! = m*(m+1)*(m+2)+(m+1)$$

Wobei die beiden Ergebnisse gleichwertig sind.

Bei Generatoren ***G(..)***, die eine ***PH*** generieren, müssen die einzelnen Elemente ***G(..)*** in einer Zeile liegen.
Dazu ist es nötig den $G_1(1)$ aus der Zeile ***n=1*** in die Zeile ***n=3*** zu verscheiben.Das geschieht mit der Hilfe des Zahlenkeils unter dem ***G.***

n= 4	1	5	15	***a***	***c***
n= 3	1	4	10	20	***b***
n= 2	1	3	6	10	15
n= 1	1	2	3	4	5
n= 0	1	1	1	1	1
n= -1	1				
n= -2	1	-1			
n= -3	1	-2	1		
n= -4	1	-3	3	-1	

(***G***)

m= 0 ***m***= 1 ***m***= 2 ***m***= 3 ***m***= 4 .....

Durch diese Verschiebung wird auch die Zeile ***n= -3*** in die Generatorzeile ***n= -1*** verschoben.
Diese Verschiebung ändert auch $G_1(1)$ in $G_3(1;-2;1)$ so das die Addition von $G_3(..)$ möglich ist.

$$G_1(1) + G_3(0;6) = G_3(1;-2;1) + G_3(0;6;0) = G_3(1;4;1)$$

7. Unendliche Generatoren.

a. Begriff „unendlicher Generator“ *(uG).*

Im Absatz **3.d.** wurde für die Definition des ***G*** eine waagerechte Linie durch die Zeile ***n = -1*** als Teilungslinie der ***PH*** gewählt. Die Teilungslinie kann aber auf verschiedene Arten gewählt werden. Auf der Linie kann auch eine Folge liegen, die wir für einen unendlichen Generator ***(uG)*** halten können. Durch die Wirkung der Eigenschafften der ***PH*** werden aus diesem ***uG*** in einer anderen Linie neue Elementen erzeugt, die eine neue Folge bilden.

b. Geometrische Folgen

Bei der Wahl der Teilungslinie auf der Diagonalen des vierten Quadranten und bei Eintrag von Einsen auf der Linie (rot), entstehen durch die Wirkung der ***PH*** in der Zeile $n = 0$ die Elemente einer geometrische Folge (blau)..

	m=0	*m= 1*	*m= 2*	*m= 3*	*m= 4*	*m= 5*	*m= 6*	*m= 7*	*m= 8* ....
n = 0	1/1	2	4	8	16	32	64	128	256
n= -1		1	2	4	8	16	32	164	128
n= -2			1	2	4	8	16	32	64
n= -3				1	2	4	8	16	32
n= -4					1	2	4	8	16

Die Werte in der Zeile $n=0$ sind die Summen der Beiträge der Einzelgeneratoren gemäß deren Entfernung vom gesuchten Element. Z.B. wird der Wert in der Spalte $m= 4$ durch die Summe

$$\left|\begin{matrix}(4+0)\\0\end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix}(3+1)\\1\end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix}(2+2)\\2\end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix}(1+3)\\1\end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix}(0+4)\\0\end{matrix}\right| = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$$ gegeben.

Im folgenden sind einige wenige Beispiele für die ***uG*** und die entstanden Folgen aufgeführt..

Folge an der Diagonale (***uG***)	Formel	Ergebnisfolge in der Reihe $n=0$	Formel
1, 1, 1, 1, 1, 1,.1....	1^m	*1, 2, 4, 8, 16, 32, 64.....*	2^m
1, 2, 4, 8, 16, 32, 64...	2^m	*1, 3, 9, 27, 81, 243 .....*	3^m
1, 3, 9, 27, 81, 243	3^m	*1,4, 16, 64, 256, 1024 .....*	4^m
1, -1, 1, -1, 1, -1, 1....	$(-1)^m$	*1, 0, 0, 0,0,0....*	0^m
1, -2, 4, -8, 16, -32, 64....	$(-2)^m$	*1, -1,1, -1, 1, -1, 1.....*	$(-1)^m$
1, -3, 9, -27, 81,- 243	$(-3)^m$	*1, -2, 4, -8, 16,- 32, 64.....*	$(-2)^m$

Offensichtlich transformiert die ***PH*** die geometrische Folge auf der Diagonalen in eine andere geometrische Folge in der Zeile $n = 0$, mit dem Quotient um eins grosseren.

c. Fibonacci-Folge

Beim halbieren des Winkels zwischen Diagonale und Achse n transformiert die ***PH*** die Einser-Reihe auf der Linie in eine Fibonacci Folge in der Zeile $n = 0$.

	m=0	*m= 1*	*m= 2*	*m= 3*	*m= 4*	*m= 5*	*m= 6*	*m= 7*	*m= 8* ....
n= 0	*1/1*	*1*	*2*	*3*	*5*	*8*	*13*	*21*	*34*
n= -1			*1*	*1*	*2*	*3*	*5*	*8*	*13*
n= -2					*1*	*1*	*2*	*3*	*5*
n= -3							*1*	*1*	*2*
n= -4								*0*	*1*

Die Werte in der Zeile $n=0$ sind die Summen der Beiträge der Einzelgeneratoren gemäß deren Entfernung vom gesuchten Element. Z.B. wird der Wert in der Spalte ***m= 4 (gerade)*** durch die Summe:

$$\left|\begin{matrix}(4+0)\\0\end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix}(2+1)\\2\end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix}(0+2)\\2\end{matrix}\right| = 1 + 3 + 1 = 5$$ gegeben.

Für die Spalte ***m= 5 (ungerade)*** ist die Berechnung modifiziert.:

$$\left|\begin{matrix}(5+0)\\0\end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix}(3+1)\\3\end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix}(1+2)\\1\end{matrix}\right| = 1 + 4 + 3 = 8$$

d. Oszillierende Folge

Ähnlich wie im vorherigen Absatz, aber bei Eingabe der alternierenden Einser, entsteht eine oszillierende Folge.

	m=0	m= 1	m= 2	m= 3	m= 4	m= 5	m= 6	m= 7	m= 8 ..
n= 0	*1/1*	*1*	*0*	*-1*	*-1*	*0*	*1*	*1*	*0*
n= -1			*-1*	*-1*	*0*	*1*	*1*	*0*	*-1*
n= -2					*1*	*1*	*0*	*-1*	*-1*
n= -3							*-1*	*-1*	*0*
n= -4									*1*

e. Geometrisch-arithmetische Folge.

Z.B. die Folge $m*2^m$ wird aus der Folge der geraden Zahlen auf der Diagonale gebilder.

	m=0	*m= 1*	*m= 2*	*m= 3*	*m= 4*	*m= 5*	*m= 6* ......
n= 0	*0/0*	*2*	*8*	*24*	*64*	*160*	*384*
n= -1		*2*	*6*	*16*	*40*	*96*	*224*
n= -2			*4*	*10*	*24*	*56*	*128*
n= -3				*6*	*14*	*32*	*72*
n= -4					*8*	*16*	*40*
n= -5						*10*	*22*
n= -6							*12*

f. Teil-Fibonacci-Folge

Liegt der ***uG*** wie im folgenden Bild, so entsteht in der Zeile ***n = 0*** eine Folge, die nur die ungeraden Elementen der Fibonacci-Folge beinhaltet..

	m=0	*m= 1*	*m= 2*	*m= 3*	*m= 4*	*m= 5*	*m= 6* ......
n= 0	*1/1*	*2*	*5*	*13*	*34*	*89*	*233*
n= -1		*1*	*3*	*8*	*21*	*55*	*144*
n= -2		*1*	*2*	*5*	*13*	*34*	*89*
n= -3			*1*	*3*	*8*	*21*	*55*
n= -4			*1*	*2*	*5*	*13*	*34*
n= -5				*1*	*3*	*8*	*21*
n= -6				*1*	*2*	*5*	*13*

8. Einige weitere Eigenschaften der PH

a. Anteil der geraden und ungeraden Werte im ersten Quadranten.

Im abgebildeten Ausschnitt des ersten und vierten Quadranten der ***PH*** sind die letzten Ziffern der Werte farblich gekennzeichnet; (rot die Nullen, grün die übrigen geraden Ziffern, und ohne Hintergrundfarbe die ungeraden Ziffern)**.**

Es ist sichtbar, dass die Paritätsverteilung im ersten und vierten Quadrant ein selbsähnliches Muster bildet. Weiter ist sichtbar, dass der Anteil der ungeraden Werte an der Gesamtanzahl, mit dem kleinsten Quadrat über ***G*** (gekennzeichnet mit einer roten Ziffer) angefangen, in den weiteren angedeuteten Quadraten sinkt. Das Verhältnis bildet eine Folge 1/1; 3 /4; 9/16; 27/64; 81/256…..3n/4n mit Limes = ***0***.

1	3	6	0	0	0	0	0	5	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	8	6

1	2	3	4	0	0	0	0	5	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	2	8
1	1	1	1	6	0	0	0	5	5	5	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	6	6
1	0	0	0	5	4	0	0	5	0	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0
1	9	0	0	5	9	6	0	5	5	0	0	5	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	4	0
1	8	1	0	5	4	7	4	5	0	5	0	5	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	8	6
1	7	3	9	5	9	3	7	1	5	5	5	5	5	5	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	2	8
1	6	6	6	6	4	4	4	4	4	0	0	0	0	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0	6	6	6
1	5	0	0	0	8	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	5	5	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0
1	4	5	0	0	8	2	0	0	0	6	4	0	0	0	0	5	0	5	0	0	0	0	0	0	6	4	0
1	3	1	5	0	8	4	8	0	0	6	8	6	0	0	0	5	5	5	5	0	0	0	0	0	6	8	6
1	2	8	4	5	8	6	4	2	0	6	2	8	4	0	0	5	0	0	0	5	0	0	0	0	6	2	8
1	1	6	6	1	3	8	8	8	8	6	6	6	6	6	0	5	5	0	0	5	5	0	0	0	6	6	6
1	0	5	0	5	2	5	0	0	0	8	0	0	0	0	4	5	0	5	0	5	0	5	0	0	6	0	0
1	9	5	5	5	7	3	5	0	0	8	2	0	0	0	4	1	5	5	5	5	5	5	5	0	6	4	0
1	8	6	0	0	2	6	2	5	0	8	4	8	0	0	4	7	4	0	0	0	0	0	0	5	6	8	6
1	7	8	4	0	2	4	6	3	5	8	6	4	2	0	4	3	7	6	0	0	0	0	0	5	1	2	8
1	6	1	6	6	2	2	2	7	2	3	8	8	8	8	4	9	4	9	4	0	0	0	0	5	6	1	6
1	5	5	5	0	6	0	0	5	5	1	5	0	0	0	6	5	5	5	5	6	0	0	0	5	1	5	5
1	4	0	0	5	6	4	0	5	0	6	4	5	0	0	6	9	0	0	0	1	4	0	0	5	6	4	0
1	3	6	0	5	1	8	6	5	5	6	8	1	5	0	6	3	1	0	0	1	3	6	0	5	1	8	6
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1																											
1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	-3	3	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	-4	6	-4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	-5	0	0	5	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	-6	5	0	5	-6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	-7	1	-5	5	9	7	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	-8	8	-6	0	4	-2	-8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

b. Die Zeilen mit ausschlieslich ungerader Parität:

In der Abbildung ist weiter sichtbar, dass nur eine Zeile und eine Spalte ausschließlich mit ungeraden Werten gefüllt sind. Es ist einfach zu zeigen (Excel), dass die Position der Zeile mit ausschließlich ungeraden Werten von ***G(..)*** bzw dessen Paritätsformat abhängt. Dieser Zusammenhang ist im Folgenden abgebildet.

Zeile mit ungeraden Einträgen	Paritätsformat des ***G(..)***
$n = 0$	*1*
$n = 1$	*1 1*
$n = 2$	*1 0 1*
$n = 3$	*1 1 1 1*
$n = 4$	*1 0 0 0 1*
$n = 5$	*1 1 0 0 1 1*
$n = 6$	*1 0 1 0 1 0 1*
$n = 7$	*1 1 1 1 1 1 1 1*
$n = 8$	*1 0 0 0 0 0 0 0 1*

Paritätsformat von ***G(..)*** ist identisch mit dem Paritätsformat des ***P***-Δ.

c. Sonderzeilen mit ausschließlich ungerader Parität; Zeilen mit Potenzfolgen

Die Elemente der Potenzfolgen beliebigen Grades n sind (angefangen mit dem ersten Element 1^n) abwechselnd mit Elementen mit ungerader und gerader Parität gebildet. Das kommt daher, dass die Zeile unter der Zeile mit der Potenzfolge nur aus ungeraden Zahlen besteht. Dadurch ist ersichtlich, dass die ***G(..)*** der Potenzfolgen dem Paritätsmuster im vorherigen Absatz entsprechen. Ausserden sind auch andere Eigenschaften der ***G(..)*** der Potenzfolgen sichtbar:

G(..) der Potenzfolgen vom Grad n für $n>2$ hat:

- n unmittelbar nacheinander liegender Glieder > 0

- das erste und letzte Generatorglied sind immer $= 1$

- die Generatorglieder sind immer symmetrisch angeordnet

- die Summe der Generatorglieder ist immer $n!$,.

Zeilen mit nur ungeraden Werten	*G(..)* in der Zeile $n = -1$	Potenzfolge in der Zeile	Potenzgrad v řádku	$n!$
$n = 0$	*1*	$n = 1$	n^1	*1*
$n = 1$	*1 1*	$n = 2$	n^2	*2*
$n = 2$	*1 4 1*	$n = 3$	n^3	*6*
$n = 3$	*1 11 11 1*	$n = 4$	n^4	*24*
$n = 4$	*1 26 66 26 1*	$n = 5$	n^5	*120*
$n = 5$	*1 57 302 302 57 1*	$n = 6$	n^6	*720*
$n = 6$	*1 120 1191 2416 1191 120 1*	$n = 7$	n^7	*5040*
.....				

Ich wurde darauf aufmersam gemacht, dass diese Gebilde als Eulersches Dreieck (Euler-Zahlen) bekannt ist.

9. Zusammenhang der PH mit dem großen Fermatschen Satz

a. Bedeutung des *G(..)* für die Potenzfolgen

Jede Potenzfolge $F_n(G..)$ ist eine Summe der eF_n, in einer Anzahl und in der Position die durch ***G(..)*** festgelegt sind. Z.B. kann die Potenzfolge $F_3(1;4;1)$ dritten Grades durch die Summe der eF_3, der vierfachen der eF_3 um eine Spalte nach rechts verschoben und schließlich noch einer eF_3, die um zwei Spalten nach recht verschoben ist, gebildet werden. Dadurch, dass jede Potenzfolge vom Grad n ausschließlich aus Elementarfolgen des gleiches Grades gebildet ist, überträgt sich die Ursache des großen Fermatsches Satzes auf eine niedrigere Stufe. Anders gesagt, die Grundursache des genannten Satzes liegt nicht direkt in den Eigenschaften der Potenzfolgen, sondern in den Eigenschaften der elementaren Folgen gleiches Grades.

Dritte Zeile $(n = 3)$ der ***PH*** $=eF_3$	1	4	10	20	35	56	84	120...
eF_3 mal vier und um eine Spalte nach rechts verschoben	-	4	16	40	80	140	224	336
eF_3T um eine Spalte um zwei Spalten nach rechrs verschoben.	-	-	1	4	10	20	35	56
Summe = Potenzfolge des ***3-*** Grades	1	8	27	64	125	216	343	512

b. Begriff „Zahlen-Tripel“ (ZT) und „Fermat-Tripel“ (FT):

Für weitere Überlegungen werden diese zwei neue Begriffe eingeführt. Die beiden entstehen durch Beziehung dreier verschiedener Elemente einer beliebigen Folge. Deren Beziehung entspricht der Formel:

$$w_{(m;n)} + w_{((a+m);n)} - w_{((a+b+m);n)} = x, \text{ geltend für } 0 < a,\ 0 < b.$$

Die Koordinate ***m*** wird die Position des Tripels genannt. Ein Tripel wird ***ZT*** genannt, wenn das Ergebnis ***x*** von ***0*** verschieden ist. Lautet das Ergebnis ***x*** = 0, so wird das Tripel ***FT*** genannt.

Für weitere Überlegungen werden zwei neue Begriffe eingeführt. Die beiden entstehen durch Beziehung dreier verschiedener Elemente einer beliebigen Folge. Deren Beziehung enspricht der Formel:

$$w_{(m;n)} + w_{((a+m);n)} - w_{((a+b+m);n)} = x, \text{ geltend für } 0 < a,\ 0 < b.$$

Die Koordinate ***M*** wird die Position des Tripels genannt. Die Konstante ***a*** ist Abstand auf der Achse ***m*** zwischen dem ersten und zweten Glied des Tripels; die Konstante ***b*** ist der Abstand auf der Achse ***m*** zwischen dem zweiten und dritten Glied des Tripels. Ein Tripel wird ***ZT (Zahlentripel)*** genannt, wenn das Ergebnis ***x*** von ***0*** verschieden ist. Lautet das Ergebnis ***x*** = 0, so wird das Tripel ***FT (Fermat-Tripel)*** genannt.

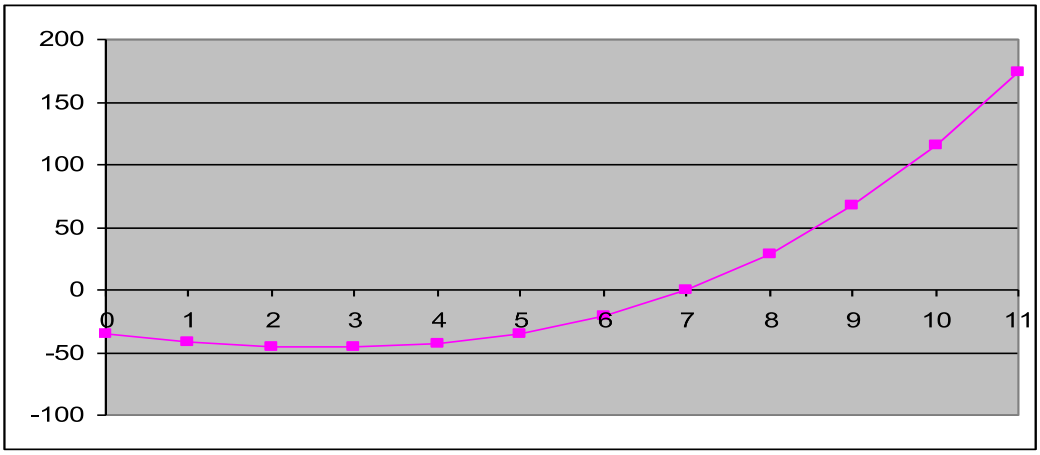
Für das weitere Vorgehen ist eine Feststellung wichtig. Zu einem ***FT*** mit bestimmten Abständen ***a*** und ***b*** existiert kein zweites ***FT*** mit gleichen Abständen.

Falls wir einen Tripel mit Abständen ***a*** und ***b*** auf der Achse von ***m = 0*** bis ***m*** → ∞ bewegen, wird höchstens in eine Position ein Ergebnis ***x = 0*** direkt mit einer ganzen Zahl der Achse ***m*** übereinstimmen und diese Position ist dann Position eines ***FT***. Bei der Bewegung über die Achse ***m*** nach links oder nach rechts von der Position des ***FT***, steigt oder sinkt das Ergebnis ***x*** und alle diese Positionen sind dann die Positionen eines ***ZT***.

Ein Beispiel für die Konstanten ***a = 6*** und ***b = 1*** und ***FT 120; 560*** und ***680***

----------------a = 6------------------ b = 1

eF_3	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	364	455	560	680
m=	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
x=	-35	-41	-45	-46	-43	-35	-21	0	29	67	115	174	245	329	427



Die Kurve (***x***) schneidet die Achse (***m***) exakt im Punkt ***M=7*** und das ist auch die Position des ersten Gliedes eines ***FT***. Alle anderen Positionen sind die Anfangspositionen der ***ZT***. Selbstverständlich gibt's nicht für alle mögliche Werte ***a*** und ***b*** ein ***FT***. Bei nicht existierenden ***FT*** schneidet die Kurve die Achse ***m*** irgendwo zwischen den ganzen Zahlen.

Diese Feststellung garantiert, dass beim Addieren der verschobenen Folgen alle vorhanden ***FT*** in ***ZT*** degradiert werden.

Für die ***ZT*** und ***FT*** in der Folgen gelten einfache Regel:

1) Die Summe zweier Folgen, die in der gleichen Position ein ***FT*** haben, ist eine Folge mit einem ***FT*** in derselben Position.

2) Die Summe zweier Folgen, die in der gleichen Position ein ***FT*** und ein ***ZT*** haben, ist eine neue Folge mit einem ***ZT*** in derselben Position..

3) Die Summe zweier Folgen, die in der gleichen Position beide kein ***FT*** haben, ist eine neue Folge, die in derselben Position ein ***FT*** haben kann.

c. Eine Folge der dritten Potenzen, die mittels der identischen eF_3 erzeugt wird:

Elementarfolge in der dritte Zeile, sowie die Summen ersten funf eF_3 beinhalten wahrscheinlich jede einen unendlichen Anzahl der ***FT***. Nach dem Aussummiereung allen sechs eF_3 nach den Vorschrifft des Generators, entsteht eine Folge, die der ***FT*** frei ist.

Bemerkung:
Die erstem 1500 Glieder der Elementarfolge eF_3 (***F_3(1;0;0)***) enthalten 40 ***FT***. Dagegen enthalten die aufsummierten Folgen ***F_3(1;1;0)*** oder ***F_3(0;1;1)*** jeweils nur 18 ***FT,*** die Folge ***F_3(1;2;1)*** nur 3 ***FT*** und schließlich die Folge ***F_3(1;3;1)*** nur 2 ***FT***. Selbstverständlich enthält die Folge ***F_3(1;4;1),*** die die Folge der dritten Potenzen ist, keine ***FT***. Daraus ist ersichtlich, wie das schrittweise Aufsummieren der eF_3 die Anzahl der ***FT*** reduziert. Das wurde mittels einer Computerberechnung festgestellt und ist in der Anlage 1 dokumentiert.

Das Mechanismus des Abbaus der ***FT*** ist überall derselbe. Eine Folge ***F_3(1;0;0)*** bzw ***F_3(0;1;0)*** wird zu einer identischen, aber um 1 Spalte nach rechts verschobenen Folge ***F_3(0;1;0)*** bzw. ***F_3(0;0;1)*** addiert. Durch die Verschiebung werden die ***FT*** der ersten Folge ***ZT*** der zweite Folge gegenüber gestellt. Dadurch werden in der Summe alle ***FT*** in ***ZT*** umgewandelt. In einigen Positionen aber entstehen aus ***ZT*** sekundäre ***FT.***
Bei der nächsten Addition (***F_3(1;1;0))*** mit (***F_3(01;1))*** geschieht dasselbe, die sekundären ***FT*** werden gelöscht, und aus einigen ***ZT*** entstehen terziäre ***FT***.
Bei der nächsten Addition von ***F_3(1;2;1)*** zu ***F_3(0;1;0)*** geschieht dasselbe, die terziären ***FT*** werden gelöscht, und aus einigen ***ZT*** entstehen wieder ***FT*** der vierten Stufe.
Bei der letzten Addition von ***F_3(1;3;1)*** zu ***(F_3(0;1;0)),*** geschieht dasselbe, die ***FT*** der vierten Stufe werden gelöscht.. Ob aus einigen ***ZT*** nun ***FT*** der fünften Stufe entstehen, kann auf diese Weise leider nicht festgestellt werden. Gemäß dem Beweis des großen Fermatschen Satzes von Andrew Wiles entstehen tatsächlich keine. Also ist es auf diese Art ist es nicht möglich, den o.g. Satz zu beweisen.

Es entsteht aber eine neue Frage: Die eF_n für n > 3 besitzen offensichtlich die gemeinsame Eigenschaft, dass nach ihrem Aufsummieren gemäß dem entsprechenden Reihengenerator im letzten Schritt keine neuen ***FT*** entstehen.

d. Die Folge der dritten Potenzen, erzeugt mittels verschiedener eF_3

Konzept des Reihengenerators ***G(..)*** und der elementaren Folgen funktioniert auch für zusammengesetzte eF_n unterschiedlichen Grades. Wie aus Absatz ***6.b*** ersichtlich ist, kann die Folge ***F_3(1;4;1)*** als Summe ***F_0(1)*** + ***F_3(0;7;-2;1)*** oder ***F_1(1)*** + ***F_3(0;6)*** oder auch als ***F_2(1;1)*** + ***F_3(0;4;2)*** geschrieben werden**.** Entsprechend kann die Folge der dritten Potenzen in Summen von elementaren Folgen zerlegt werden.

10. Schlussbemerkung

Es wurde zwar keine große Entdeckung gemacht, es wurden aber die Zusammenhänge zwischenden Arbeiten dreier großen Mathematiker gefunden, und das Konzept des Reihengenerators ***G(..)*** und der elementaren Folgen eF_n kann vielleicht für einige Anwendungen nützlich sein.

Anlage 1

a) FT der Folge $F_3(1)$ für $m = 0$ bis $m = 1500$

m_1	m_2	m_3	w_1	w_2	w_3
854	1342	1449	104536860	404619040	509155900
366	1435	1443	8305944	494559836	502865780
289	1429	1433	4106980	488390760	492497740
921	1285	1427	131054924	355290936	486345860
967	1000	1240	151642040	167668501	319310541
877	1043	1219	113191760	190194180	303385940
702	1063	1157	58152160	201324760	259476920
774	949	1097	77881300	143347400	221228700
488	868	917	19608085	109750355	129358440
229	902	907	2054360	123127060	125181420

607	753	867	37644320	71728020	109372340
377	789	817	9073260	82485480	91558740
423	704	752	12794200	58649185	71443385
531	642	746	25236484	44514890	69751374
348	712	739	7145775	60665605	67811380
303	694	713	4728720	56192140	60920860
271	687	701	3391024	54513680	57904704
323	662	687	5721300	48792380	54513680
398	587	643	10666600	34055980	44722580
433	494	587	13718740	20337240	34055980
313	526	561	5209260	24532904	29742164
423	447	549	12794200	15086400	27880600
135	531	534	428536	25236484	25665020
218	514	527	1774630	22897930	24672560
361	414	491	7971964	11998480	19970444
247	449	473	2573000	15288900	17861900
251	423	451	2699004	12794200	15493204
148	428	434	562475	13251095	13813570
326	335	417	5881204	6378736	12259940
99	289	293	171700	4106980	4278680
186	200	244	1107414	1373701	2481115
118	153	174	287980	620620	908600
47	137	139	19600	447580	467180
33	117	118	7140	280840	287980
83	89	109	102340	125580	227920
60	101	108	39711	182104	221815
38	69	73	10660	59640	70300
29	54	57	4960	29260	34220
19	53	54	1540	27720	29260
7	13	14	120	560	680

b) FT der Folge ***$F_3(1;1)$*** für ***m = 0*** bis ***m = 1500***

m_1	m_2	m_3	w_1	w_2	w_3
416	1478	1489	24257585	1079502380	1103759965
741	1291	1368	136448235	719731210	856179445
218	1081	1084	3525170	422826665	426351835
398	908	933	21253400	250776435	272029835
374	844	868	17648500	201474195	219122695
144	714	716	1026745	122097690	123124435
460	642	713	32763731	88822734	121586465
438	521	609	28297940	47548545	75846485
303	376	433	9411080	17932005	27343085
188	394	408	2268315	20621370	22889685
135	343	350	847756	13628420	14476176
211	223	274	3198550	3771600	6970150
123	224	236	643250	3822225	4465475
125	211	225	674751	3198550	3873301
49	144	146	42925	1026745	1069670
23	68	69	4900	111895	116795
41	44	54	25585	31395	56980
7	13	14	480	2240	2720

c) FT der Folge ***$F_3(1;2;1)$*** für ***m = 0*** bis ***m = 1500***

m_1	***m_2***	***m_3***	***w_1***	***w_2***	***w_3***
190	453	464	4645311	62384594	67029905
16	39	40	3281	42680	45961
4	5	6	85	146	231

d) FT der Folge ***$F_3(1;3;1)$*** für ***m = 0*** bis ***m = 1500***

m_1	***m_2***	***m_3***	***w_1***	***w_2***	***w_3***
347	769	792	35120218	380444295	415564513
5	7	8	181	428	609

e) FT der Folge ***$F_3(1;4;1)$*** für ***m = 0*** bis ***m = 1500*** ist selbstverständlich leer**.**