

Reelle Analysis

Übungsblatt 11

Die Lösungsblätter sind bis

Donnerstag, 13. Januar 2011, 9:15 Uhr

in das in Flur D1 befindliche grüne Schließfach Nr. 116 zu werfen.

Aufgabe 42

(7 Punkte)

Sei μ ein translationsinvariantes Borelmaß auf \mathbb{R}^n .

1. Zeigen Sie, daß ein $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ existiert, so daß $\mu = c\mu_{\text{Lebesgue}}$ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ gilt.
2. Bestimmen Sie c .

Aufgabe 43

(8 Punkte)

Zeigen Sie:

1. Ein Dynkinsystem ist genau dann eine σ -Algebra, wenn es durchschnittsstabil ist.
2. Das von einer durchschnittsstabilen Menge $\mathcal{E} \subseteq 2^X$ erzeugte Dynkinsystem ist die von \mathcal{E} erzeugte σ -Algebra.

Aufgabe 44

(5 Punkte)

Zeigen Sie, daß es zu jeder nichtleeren abgeschlossenen Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ eine monotone Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, für die $f(\mathbb{R}) = A$ gilt.

Aufgabe 45

(6 Punkte)

Zeigen Sie, daß für $f \in \mathcal{M}^+$

$$\int_X f \, d\mu = 0 \iff f \text{ ist fast überall gleich } 0.$$

gilt.

Aufgabe 46

(6 Punkte)

Sei $f \in \mathcal{M}^+$ mit endlichem Integral. Zeigen Sie, daß für $\varepsilon > 0$ auch $\mu(\{f > \varepsilon\})$ endlich ist.