

Funktionalanalysis I

Übungsblatt 7

Abgabetermin: Montag, 8. Dezember 2008, zur Übung¹

Aufgabe 29

(5 Punkte)

Seien X und Y normierte Räume. Für jedes $T : X \rightarrow Y$ definiere die **duale Abbildung** $T' : Y' \rightarrow X'$ via $T'f := f \circ T$ für $f \in Y'$. Zeigen Sie für alle $T \in L(X, Y)$ und $S \in L(Y, Z)$:

- $T' \in L(Y', X')$ sowie $\|T'\|_{L(Y', X')} = \|T\|_{L(X, Y)}$;
- $T'S' = (ST)'$;
- $T'' \circ \iota_X = \iota_Y \circ T$ mit den üblichen $\iota_X : X \rightarrow X''$ und $\iota_Y : Y \rightarrow Y''$.

Bemerkung: T' heißt zuweilen auch transponierte oder adjungierte Abbildung.

Aufgabe 30

(7 Punkte)

Sei X ein Banachraum. Definiere

$$\begin{aligned} S^\perp &:= \{F \in X' \mid F(x) = 0 \quad \forall x \in S\} && \text{für } S \subseteq X \\ {}^\perp U &:= \{x \in X \mid F(x) = 0 \quad \forall F \in U\} && \text{für } U \subseteq X', \end{aligned}$$

und sei nun S ein abgeschlossener linearer Unterraum von X .

1. Welche Beziehungen gibt es zwischen X'/S^\perp und S' bzw. zwischen $(X/S)'$ und S^\perp ?
2. Zeigen Sie, daß S^\perp schwach*-abgeschlossen ist.
3. Bestimmen Sie ${}^\perp(S^\perp)$.

Wo kann die Voraussetzung, daß X vollständig ist, weggelassen werden?²

Hinweis: Die Norm auf X/V für abgeschlossene Untervektorräume V sei definiert durch

$$\|[x]\| := \inf_{v \in V} \|x - v\|.$$

X/V ist vollständig, falls X vollständig ist. Es gibt zwei Zusatzpunkte, wenn Sie dies zeigen.

Aufgabe 31

(5 Punkte)

Seien X und Y Banachräume. Zeigen Sie für $T \in L(X, Y)$:

- T' ist injektiv genau dann, wenn T dichtes Bild hat;
- T ist injektiv genau dann, wenn T' schwach*-dichtes Bild hat;

Aufgabe 32

(7 Punkte)

Bestimmen Sie den schwachen Abschluß der Einheitssphäre in Banachräumen.

Hinweis: Unterscheiden Sie zwischen endlich- sowie unendlichdimensionalen Banachräumen.

Spezialtip: Nicht vom Ergebnis verwirren lassen!

¹bzw. zur Vorlesung, falls Sie an der Übung am Dienstag teilnehmen

²Bei der dritten Teilaufgabe heißt dies: Gilt das Ergebnis auch für nichtvollständiges X ? Daß X ein normierter Raum ist, soll natürlich bei allen drei Teilaufgaben vorausgesetzt bleiben.