Christian Fleischhack Universität Paderborn

Analysis I

Übungsblatt 11

Die Lösungsblätter sind bis

Montag, 11. Januar 2010, 11:00 Uhr

in die in Flur D1 befindlichen grünen Schließfächer
Nr. 116 (Gruppen 1 bis 3) bzw. Nr. 129 (Gruppen 4 bis 7) zu werfen.

Aufgabe 68 *(17 Punkte)*

Die trigonometrischen Funktionen $\sin z$ und $\cos z$ sind auf $\mathbb{C}$ definiert durch

$$\sin z \ := \ \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} \quad \text{und} \quad \cos z \ := \ \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}.$$

Zeigen Sie:

1. Die beiden Funktionen haben absolut konvergente Potenzreihenentwicklungen, und zwar
$$\sin z \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \quad \text{bzw.} \quad \cos z \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}.$$
2. Beide Funktionen sind stetig auf ganz $\mathbb{C}$.
3. Es gilt $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i} \sin z$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
4. Es gelten die Additionstheoreme
$$\begin{aligned} \sin(w \pm z) &= \sin w \cos z \pm \cos w \sin z \\ \cos(w \pm z) &= \cos w \cos z \mp \sin w \sin z. \end{aligned}$$
Hinweis: Homomorphieeigenschaft der Exponentialfunktion.
5. Es gilt $(\sin z)^2 + (\cos z)^2 = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
6. Beide Funktionen sind reellwertig auf $\mathbb{R}$ und beschränkt durch 1.
7. Es gibt ein kleinstes positives $x \in \mathbb{R}$ mit $\cos x = 0$.
Hinweis: Zwischenwertsatz.
8. Beide Funktionen haben eine kleinste positive reelle Periode. Dabei ist ein $u \in \mathbb{C}$ genau dann Periode für eine Funktion $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, wenn $f(z+u) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.
Hinweis: Vorherige Teilaufgabe sowie Additionstheoreme. Mit Kosinus beginnen.

Hinweis: Die Zahl π haben wir noch nicht definiert. Sie sollten sie deshalb nicht verwenden.

Aufgabe 69 *(9 Punkte)*

In welchen Punkten sind die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jeweils stetig? Warum?

1. $$f(x) \ := \ \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$
2. $$f(x) \ := \ \begin{cases} x & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ -x & \text{für } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$
3. $$f(x) \ := \ \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Skizzieren Sie zudem die Funktionen in ihrem jeweiligen Stetigkeitsbereich.

Aufgabe 70 *(4 Punkte)*

Finden Sie Funktionen $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sowie $a, b, c \in \mathbb{R}$, so daß

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad \text{und} \quad \lim_{y\to b} g(y) = c\,, \quad \text{aber} \quad \lim_{x\to a} g(f(x)) \neq c$$

gilt.

Aufgabe 71 *(5 Punkte)*

Sei $n \in \mathbb{N}_+$, und sei $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ eine stetige Abbildung mit $f(0) \neq 1$, für die $f^n = \mathrm{id}$ gilt.[1]

- Zeigen Sie, daß dann bereits $f = \mathrm{id}$ gilt.
- Gilt diese Schlußfolgerung noch, wenn die Stetigkeitsannahme fallengelassen wird?

Hinweis: Ist f streng monoton?

[1] Das heißt, es gilt $f^n(x) = x$ für alle $x \in [0,1]$. Hierbei gilt $f^n = f \circ \cdots \circ f$, d. h., f^n ist die Verkettung von n-mal der Funktion f. In der Regel gilt nicht $f^n(x) = (f(x))^n$.