Übungen zur Mengenlehre
WiSe 2015/16

3. Übungsblatt

(Abgabe: 27.11.2015)

Aufgabe 1 (Ordinalzahlarithmetik) – 5P.

Wir definieren $\alpha \boxplus \beta$, $\alpha \boxtimes \beta$ und α^β durch Rekursion über β wie folgt:

$$\alpha \boxplus \beta := \begin{cases} \alpha & \text{für } \beta = 0, \\ s(\alpha \boxplus \gamma) & \text{für } \beta = s(\gamma), \\ \bigcup\{\alpha \boxplus \gamma \mid \gamma < \beta\} & \text{für Limes-Ordinalzahl } \beta. \end{cases}$$

$$\alpha \boxtimes \beta := \begin{cases} 0 & \text{für } \beta = 0, \\ (\alpha \boxtimes \gamma) \boxplus \alpha & \text{für } \beta = s(\gamma), \\ \bigcup\{\alpha \boxtimes \gamma \mid \gamma < \beta\} & \text{für Limes-Ordinalzahl } \beta. \end{cases}$$

Es seien nun α, β beliebige Ordinalzahlen.

1. Zeigen Sie, dass $\alpha \boxplus \beta = \alpha + \beta$ und $\alpha \boxtimes \beta = \alpha \cdot \beta$ ist.
2. Es sei $\alpha \leq \beta$. Zeigen Sie, dass es dann eine eindeutige Ordinalzahl γ gibt, sodass $\alpha + \gamma = \beta$. Gibt es immer auch γ mit $\gamma + \alpha = \beta$?
3. Es sei $\gamma > 0$. Zeigen Sie: Wenn $\alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$ oder $\gamma \cdot \alpha \leq \gamma \cdot \beta$, so ist $\alpha \leq \beta$. Gilt eine der beiden Implikationen auch, wenn wir $\leq$ durch $<$ ersetzen?

Aufgabe 2 (Exponentiation) – 7P.

Es seien $(X, <_X)$ und $(Y, <_Y)$ wohlgeordnete Mengen.

1. Zeigen Sie, dass die Menge ${}^Y X$ durch die lexikographische Ordnung $<^{\text{lex}}$ streng totalgeordnet wird, wobei $f <^{\text{lex}} f'$ für $f, f' \in {}^Y X$ genau dann gelte, wenn es ein $y \in Y$ gibt, sodass $f(y) <_X f'(y)$ ist, aber $f(y') = f'(y')$ für alle $y' <_Y y$.
   Angenommen, dass X mindestens zwei Elemente hat; zeigen Sie außerdem, dass $<^{\text{lex}}$ genau dann eine Wohlordnung ist, wenn Y endlich ist.

Bitte wenden!

2. Es sei x_0 das $<_X$-minimale Element von X. Eine Funktion $f \in {}^Y X$ habe *endlichen Träger*, wenn die Menge $\{y \in Y \mid f(y) \neq x_0\}$ endlich ist. Es sei $({}^Y X)_0 := \{f \in {}^Y X \mid f \text{ hat endlichen Träger}\}$. Zeigen Sie, dass $({}^Y X)_0$ durch die kolexikographische Ordnung $<^{\text{colex}}$ wohlgeordnet wird, wobei $f <^{\text{colex}} f'$ für $f, f' \in {}^Y X$ genau dann gelte, wenn es ein $y \in Y$ gibt, sodass $f(y) <_X f'(y)$ ist, aber $f(y') = f'(y')$ für alle $y' \in Y$ mit $y <_Y y'$.
   Wird $({}^Y X)_0$ auch durch die lexikographische Ordnung wohlgeordnet?

3. Für Ordinalzahlen α, β definieren wir die ordinale Exponentiation α^β durch Rekursion über β wie folgt:

$$\alpha^\beta := \begin{cases} 1 & \text{für } \beta = 0, \\ (\alpha^\gamma) \boxtimes \alpha & \text{für } \beta = s(\gamma), \\ \bigcup\{\alpha^\gamma \mid \gamma < \beta\} & \text{für Limes-Ordinalzahl } \beta. \end{cases}$$

   Zeigen Sie, dass α^β die eindeutige Ordinalzahl ist, sodass $(\alpha^\beta, \in) \cong (({}^\beta\alpha)_0, <^{\text{colex}})$ ist.

4. Zeigen Sie, dass immer $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$ und $\alpha^{\beta\cdot\gamma} = (\alpha^\beta)^\gamma$ gilt. Gilt im Allgemeinen auch $(\alpha \cdot \beta)^\gamma = \alpha^\gamma \cdot \beta^\gamma$?

Aufgabe 3 (Cantorsche Normalform) – 4P.

Eine Ordinalzahl ist in *Cantorscher Normalform*, wenn sie geschrieben werden kann als

$$\omega^{\alpha_1} n_1 + \omega^{\alpha_2} n_2 + \cdots + \omega^{\alpha_k} n_k$$

mit Ordinalzahlen $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_k$ und natürlichen Zahlen $k, n_1, \ldots, n_k$.

(a) Zeigen Sie, dass jede Ordinalzahl eine *eindeutige* Cantorsche Normalform hat.

(b) Es sei $\varepsilon_0 := \bigcup \left\{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \ldots\right\}$.
   Was ist die Cantorsche Normalform von ε_0 ?

Aufgabe 4* (Bonusaufgabe) – 4 Bonus-P.

Es sei ω_1 die Menge aller abzählbaren Ordinalzahlen.
Gibt es eine injektive Funktion $f : (\omega_1 \setminus \omega) \to \omega_1$, sodass für alle $\omega < \alpha < \omega_1$ gilt, dass $f(\alpha) < \alpha$?