Übungen zur Mengenlehre
WiSe 2015/16

2. Übungsblatt

(Abgabe: 13.11.2015)

Aufgabe 1 (Rekursion und Induktion) – 1P. + 1P. + 1P.

Es sei R eine lokale und fundierte binäre Relation auf V.

1. Zeigen Sie, dass es genau eine $f : V \to V$ gibt mit der Eigenschaft, dass für alle $x \in V$ gilt:
$$f(x) = \{x\} \cup \bigcup \{f(y) \mid y \, R \, x\}. \tag{$*$}$$
2. Sei $f : V \to V$ die Funktion mit Eigenschaft $(*)$. Zeigen Sie, dass dann $f(x) = \{x\}{\downarrow_R}$ für alle $x \in V$ gilt.
3. Warum haben wir nicht diese Definition für $\{x\}{\downarrow_R}$ im Beweis von Satz 2.3 verwendet?

Aufgabe 2 (Transitiver R-Abschluss und Fundiertheit) – 4P.

Sei R eine lokale binäre Relation auf V. Dann definieren wir eine Relation $\overline{R}$, indem wir für $x, y \in V$ folgendes setzen:
$$x \, \overline{R} \, y \ :\Leftrightarrow \ x \in \{y\}{\downarrow_R}.$$

Zeigen Sie, dass $\overline{R}$ genau dann fundiert ist, wenn R fundiert ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (Peano-Strukturen) – 9P.

Es sei V_ω wie in der Vorlesung definiert. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir dann eine Menge $V_{\omega+n}$ rekursiv wie folgt:

$$V_{\omega+0} := V_\omega, \qquad V_{\omega+(n+1)} := \mathcal{P}(V_{\omega+n}).$$

Weiterhin setzen wir dann $V_{\omega+\omega} := \bigcup\{V_{\omega+n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.
Prüfen Sie (mit Beweis), welche der Axiome von **ZF** die Struktur $(V_{\omega+\omega}, \in)$ erfüllt:

1. Extensionalitätsaxiom (0,5P.)
2. Leermengenaxiom (0,5P.)
3. Fundiertheitsaxiom (0,5P.)
4. Paarmengenaxiom (0,5P.)
5. Unendlichkeitsaxiom (1P.)
6. Vereinigungsmengenaxiom (1P.)
7. Potenzmengenaxiom (1P.)
8. Aussonderungsaxiom (2P.)
9. Ersetzungsaxiom (2P.)