Matroidentheorie: Übungsblatt 6

1. Sei G ein zusammenhängender Multigraph und seien A und B kantendisjunkte zusammenhängende Teilmultigraphen von G. Beweisen Sie, dass die minimale Größe einer Menge $S \subseteq V(G)$, die alle Wege von A nach B trifft, genau

$$\min_{E(A) \subseteq X \subseteq E(G) - E(B)} \kappa_{M(G)}(X) + 1$$

ist.

2. Sei k ein Körper. Beweisen Sei, dass die Klasse aller Matroide, die über k darstellbar sind, unter 2-Summen abgeschlossen ist.

3. Seien M_1 und M_2 zusammenhängende Matroide mit $|E(M_1)| \geq 2$, $|E(M_2)| \geq 2$ und $|E(M_1) \cap E(M_2)| = 1$. Beweisen Sie, dass $M_1 \oplus_2 M_2$ zusammenhängend ist.

4. (a) Sei M ein Matroid und F eine Menge mit 2 Elementen, sodass $|E(M) \cap F| = 1$. Beweisen Sie, dass $M \cong M \oplus_2 U_{1,F}$.
   (b) Sei M ein Matroid, und sei $e_0 \in E(M)$, sodass $\{e_0\}$ kein Kreis oder Kokreis von M ist. Beweisen Sie, dass M einen Minor der Form $U_{1,F}$ besitzt, sodass $e_0 \in F$ und $|F| = 2$.
   (c) Seien M_1 und M_2 Matroide auf E_1 und E_2 mit $E_1 \cap E_2 = \{e_0\}$, sodass e_0 kein Kreis oder Kokreis von M_1 oder M_2 ist. Beweisen Sie, dass $M_1 \oplus_2 M_2$ einen M_1-Minor und einen M_2-Minor hat.