Graphentheorie I: Übungsblatt 10

1. Bestimmen Sie den Wert von $\mathrm{ex}(n, K_{1,r})$ für alle $r, n \in \mathbb{N}$.

2. Zeigen Sie, dass $t_{r-1}(n)/\binom{n}{2}$ für $n \to \infty$ gegen $\frac{r-2}{r-1}$ konvergiert.
(Tip: $t_{r-1}((r-1)\lfloor\frac{n}{r-1}\rfloor) \leq t_{r-1}(n) \leq t_{r-1}((r-1)\lceil\frac{n}{r-1}\rceil)$.)

3. Die *obere Kantendichte* eines unendlichen Graphen G ist das Infimum aller reellen Zahlen α, sodass G bis auf Isomorphie nur endlich viele endliche Teilgraphen der Kantendichte $> \alpha$ hat. Zeigen Sie, dass die obere Kantendichte stets einen der abzählbar vielen Werte $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$ annimmt.
(Tip: Erdős-Stone.)

4. Sei G ein unendlicher bipartiter Graph mit Partitionsklassen A, B, sodass jede Ecke in A endlichen Grad hat, und sodass $|N(S)| \geq |S|$ für jede Teilmenge S von A. Beweisen Sie, dass G eine Paarung von A enthält.

5.$^+$ Zeigen Sie, dass ein unendlicher local endlicher Graph G genau dann einen 1-Faktor besitzt wenn, für jede endliche Menge S von Ecken, der Graph $G - S$ höchstens $|S|$-viele ungeraden (endlichen) Komponenten hat. Finden Sie aber ein nicht lokal endliches Gegenbeispiel.