Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Lösungen zu 'Mathematik II (Elementare Lineare Algebra)'
Blatt 9
Nathan Bowler

A: Präsenzaufgaben

1. *Basen in* $\mathbb{R}^2$ *erkennen*
   Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ sind Basen?

   (a) $\{(1,3)\}$
   (b) $\{(1,3),(2,4)\}$
   (c) $\{(1,3),(2,6)\}$
   (d) $\{(2,3),(-1,1),(4,2)\}$

   Lösung:

   (a) Diese Menge ist zu klein, um eine Basis von $\mathbb{R}^2$ zu sein.
   (b) Diese Menge ist linear unabhängig, weil sie nur zwei Elemente hat, und kein Element ein Vielfach eines Anderen ist. Deshalb ist sie eine Basis, weil sie zwei Elemente hat, und die Dimension von $\mathbb{R}^2$ ist 2.
   (c) Diese Menge ist keine Basis, weil sie linear abhängig ist ($(2,6) = 2(1,3)$).
   (d) Diese Menge ist zu groß, um eine Basis von $\mathbb{R}^2$ zu sein.

2. *Basis eines Unterraums finden*
   Finden Sie eine Basis des Unterraums $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+y+z=0\}$ von $\mathbb{R}^3$.

   Lösung: Wir beweisen, dass die Menge $\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$ eine Basis ist. Sie ist linear unabhängig, weil kein Element ein Vielfach eines Anderen ist. Sie ist aufspannend denn für (x,y,z) in dem gegebenen Unterraum gilt $(x,y,z) = (x,y,-x-y) = x(1,0,-1) + y(0,1,-1)$.

3. *Lösungsmenge in Parameterform darstellen*
   Stellen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x+y-z &= 2 \\ y+z &= 3 \end{aligned}$$

   in der Form $\{P + tv | t \in \mathbb{R}\}$ dar.

   Lösung: Für P können wir eine beliebige Lösung des Systems nehmen, zum Beispiel $(-1,3,0)$. Wir müssen v so wählen, dass $\{v\}$ eine Basis des Kerns der Koeffizientenmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist. Insbesondere ist die Dimension des Kerns 1. Also nehmen wir für v ein beliebiges von Null verschiedene Element des Kerns, zum Beispiel $(2,-1,1)$. Dann können wir die Lösungsmenge wie folgt darstellen:

$$\{(-1,3,0) + t(2,-1,1) | t \in \mathbb{R}\}$$

B: Aufgaben

1. *Basen von $\mathbb{R}^3$ erkennen*
   Welche der folgenden Mengen sind Basen von $\mathbb{R}^3$?
   (a) $\{(1,-1,2),(2,7,-2),(1,2,0)\}$
   (b) $\{(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\}$
   (c) $\{(21,-17,9),(53,82,-12),(\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{2}{7}),(\pi,\pi+1,\pi^2)\}$

   Lösung:

   (a) Wir überprüfen mithilfe des Gauß-Verfahrens ob diese Menge linear abhängig ist. Das relevante Gleichungssystem ist $\lambda\cdot(1,-1,2)+\mu\cdot(2,7,-2)+\nu\cdot(1,2,0)=(0,0,0)$. Die entsprechende erweiterte Koeffizientenmatrix ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 7 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Wir subtrahieren bzw. addieren passende Vielfäche der ersten Zeile von bzw. zu den Anderen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

   Wir teilen die zweite Zeile durch 9, und addieren das 6-Fache davon zu der Dritten.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Durch Rückwärtssubstitution mit $\nu=3$ finden wir jetzt die nicht-triviale Lösung $\lambda=-1$, $\mu=-1$, $\nu=3$. Die Menge ist also linear abhängig. Deshalb ist sie keine Basis.

   (b) Wir überprüfen mithilfe des Gauß-Verfahrens ob diese Menge linear abhängig ist. Das relevante Gleichungssystem ist $\lambda\cdot(0,1,1)+\mu\cdot(1,0,1)+\nu\cdot(0,1,1)=(0,0,0)$. Die entsprechende erweiterte Koeffizientenmatrix ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Wir vertauschen die ersten zwei Zeilen, dann subtrahieren die erste Zeile von der Dritten.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Wir subtrahieren die zweite Zeile von der Dritten.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

   Wir teilen die dritte Zeile durch -2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Jetzt sehen wir durch Rückwärtssubstitution, dass die einzige Lösung $\lambda = \mu = \nu = 0$ ist. Deshalb ist die gegebene Menge linear unabhängig. Weil sie schon 3 Elemente hat, und die Dimension von $\mathbb{R}$ 3 ist, muss sie eine Basis von $\mathbb{R}^3$ sein.

(c) Diese Menge ist zu groß, um eine Basis von $\mathbb{R}^3$ zu sein.

2. *Koeffizienten bezüglich einer gegebenen Basis finden*
Finden Sie Koeffizienten λ_1, λ_2 und λ_3, sodass $\lambda_1(-2,-1,-6)+\lambda_2(2,1,5)+\lambda_3(5,2,3) = (1,0,-1)$.

Wir wenden das Gauß-Verfahren an. Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ -6 & 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Wir teilen die erste Zeile durch -2, und addieren passende Vielfäche davon zu den Anderen.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -12 & -4 \end{pmatrix}$$

Wir vertauschen die zweiten und dritten Zeilen, dann multiplizieren die Zweite mit -1 und die Dritte mit -2.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 12 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Jetzt können wir durch Rückwärtssubstitution die Lösung $\lambda_1 = -6$, $\lambda_2 = -8$, $\lambda_3 = 1$ finden.

3. *Basis unter gegebenen Vektoren finden*
Finden Sie eine Basis von $\mathbb{R}^3$ unter den Vektoren $(-1,3,-3)$, $(4,2,5)$, $(1,1,1)$ und $(2,0,-2)$.

Lösung: Wir überprüfen zunächst mithilfe des Gauß-Jordan-Verfahrens, ob die Menge $\{(4,2,5),(1,1,1),(2,0,-2)\}$ linear unabhängig ist. Die relevante erweiterte Koeffizientenmatrix ist

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir teilen die erste Zeile durch 4 und subtrahieren passende Vielfäche davon von den Anderen.

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{9}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Wir multiplizieren die zweite Zeile mit 2, dann addieren ein Viertel der zweiten Zeile zu der Dritten.

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir teilen die dritte Zeile durch -5.

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Jetzt sehen wir durch Rückwärtssubstitution, dass die einzige Lösung $\lambda = \mu = \nu = 0$ ist. Deshalb ist diese Menge linear unabhängig. Weil sie schon 3 Elemente hat, und die Dimension von $\mathbb{R}$ 3 ist, muss sie eine Basis von $\mathbb{R}^3$ sein.

4. *Dimension eines Unterraums finden*
   Was ist die Dimension des Unterraums $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x = y \text{ und } z = t\}$ von $\mathbb{R}^4$?

   Lösung: Wir beweisen, dass die Menge $\{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}$ eine Basis des Unterraums ist. Sie ist linear unabhängig, weil kein Element ein Vielfach eines Anderen ist. Sie ist aufspannend denn für (x, y, z, t) in dem gegebenen Unterraum gilt $(x, y, z, t) = (y, y, t, t) = y(1, 1, 0, 0) + t(0, 0, 1, 1)$. Diese Basis hat zwei Elemente. Deshalb ist die Dimension des Unterraums zwei.

5. *Lösungsmenge in Parameterform darstellen*
   Stellen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$ in der Form

   $$\{P + t_1 v_1 + t_2 v_2 + t_3 v_3 | t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}\}$$

   dar.

   Lösung: Für P können wir eine beliebige Lösung des Systems nehmen, zum Beispiel $(2, 0, 0, 0)$. Wir müssen v_1, v_2 und v_3 so wählen, dass $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis des Kerns der Koeffizientenmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist. Insbesondere ist die Dimension des Kerns 3. Also nehmen wir eine beliebige linear unabhängige Menge von drei Vektoren im Kern, zum Beispiel $\{(1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1)\}$. Dann können wir die Lösungsmenge wie folgt darstellen:

   $$\{(2, 0, 0, 0) + t_1(1, 0, 0, -1) + t_2(0, 1, 0, -1) + t_3(0, 0, 1, -1) | t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}\}$$