Zu Steger S. 222   Zwischenergebnis nach den ersten vier Zeilen: Die Anzahl der verschieden gefärbten Tischplatten ist nach dem Lemma von Burnside gegeben durch

$$(*)\qquad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{fix}(\tau_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 2^{\mathrm{ggT}(n,i)}.$$

Diese Formel ist noch nicht befriedigend, da sehr viele Summanden denselben Wert haben können – diese sollen zusammengefasst werden.

Gegeben: $d \in \{1,\dots,n\}$ mit $d \mid n$.

Frage: Wie viele $i \in \{1,\dots,n\}$ mit $\mathrm{ggT}(n,i) = \frac{n}{d}$ gibt es?

Antwort: $\varphi(d)$.

Beweis: Es brauchen nur diejenigen $i \in \{1,\dots,n\}$ betrachtet zu werden, die Vielfache von $\frac{n}{d}$ sind. Es gelte also $i = k\cdot\frac{n}{d}$ für ein $k \in \{1,\dots,d\}$. Betrachtet man außerdem die Gleichung $n = d\cdot\frac{n}{d}$, so erkennt man: $\mathrm{ggT}(n,i) = \frac{n}{d} \Leftrightarrow k$ ist teilerfremd zu d. Da $\varphi(d)$ gleich der Anzahl der zu d teilerfremden Zahlen aus $\{1,\dots,d\}$ ist, folgt die Beh. $\square$

Man erhält

$$(**)\qquad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{fix}(\tau_i) = \frac{1}{n}\sum_{d\mid n} \varphi(d)\cdot 2^{n/d}.$$