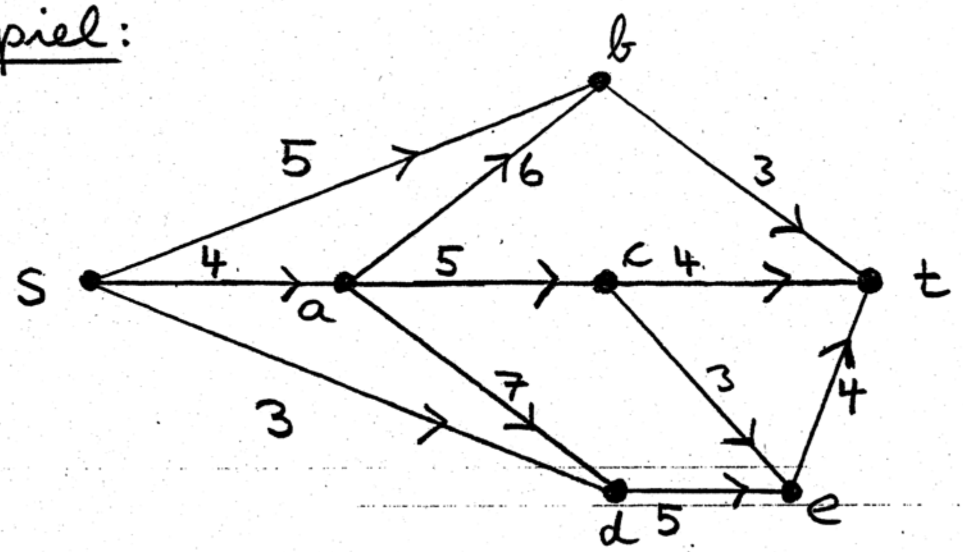
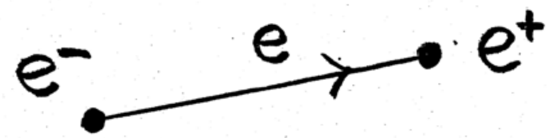
Beispiel:




Die Zahlen bezeichnen die Kapazitäten der Kanten.

Ist $e \in E$ eine Kante des Netzwerks, so bezeichnen wir mit $e^-$ denjenigen Knoten, von dem $e$ ausgeht, und mit $e^+$ denjenigen Knoten, zu dem $e$ hinführt.




Wir wollen uns vorstellen, dass in jeder Kante ein Fluss von $e^-$ nach $e^+$ stattfindet: Beispielsweise kann man sich die Kanten als Wasserleitungen denken; oder man kann sich die Kanten als Straßen vorstellen, auf denen irgendeine Ware von $e^-$ nach $e^+$ transportiert wird. Durch $f(e) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ soll die „Stärke des Flusses" von $e^-$ nach $e^+$ modelliert werden. Wir werden im Folgenden von einem Fluss auf $N$ nur dann sprechen, wenn für alle Kanten $e \in E$

der Wert $f(e)$ die Kapazität $c(e)$ nicht überschreitet; außerdem soll eine <u>Erhaltungsregel</u> für alle Knoten $v \neq s,t$ gelten: Es soll in $v$ ebensoviel hinaus wie hinein fließen.

Die Vorbemerkungen des letzten Absatzes führen zu folgender Definition.

<u>Definition</u>. Gegeben sei ein Netzwerk $N=(G,c,s,t)$ mit $G=(V,E)$. Eine Abbildung

$$f: E \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$$

heißt ein <u>Fluss</u> auf $N$, wenn $f$ den beiden folgenden Bedingungen genügt:

(F1) $f(e) \leq c(e)$ für alle $e \in E$,

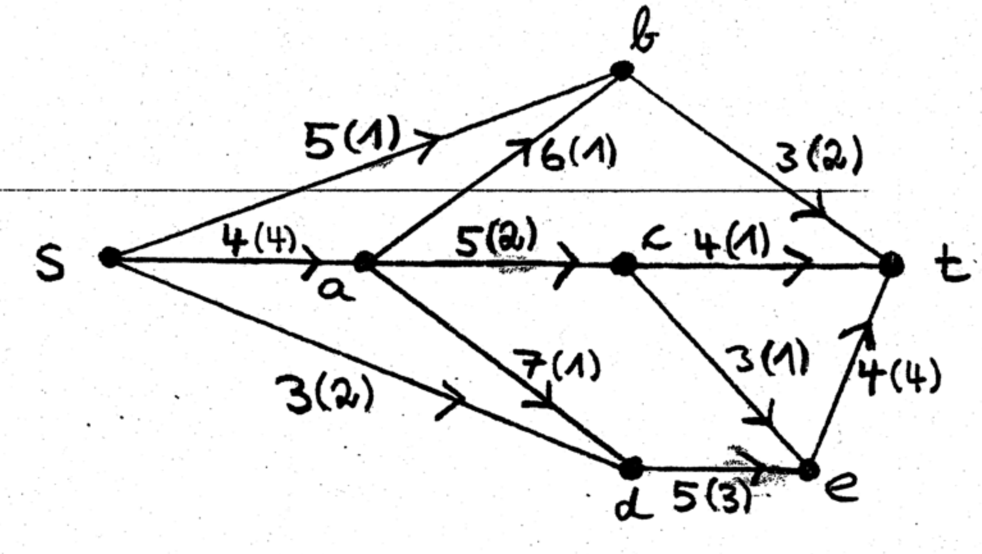
(F2) $\displaystyle\sum_{e^- = v} f(e) = \sum_{e^+ = v} f(e)$ für alle Knoten $v \neq s,t$.

Die Bedingung (F2) bedeutet gerade, dass für alle Knoten $v \neq s,t$ gilt: <u>Aus $v$ fließt ebensoviel hinaus wie hinein fließt.</u>

Beispiel. Für das obige Netzwerk sei $f$ gegeben durch

| $(x,y)$ | $f(x,y)$ |
|---|---|
| $(s,a)$ | 4 |
| $(s,b)$ | 1 |
| $(s,d)$ | 2 |
| $(a,b)$ | 1 |
| $(a,c)$ | 2 |
| $(a,d)$ | 1 |
| $(c,e)$ | 1 |
| $(d,e)$ | 3 |
| $(b,t)$ | 2 |
| $(c,t)$ | 1 |
| $(e,t)$ | 4 |

Trägt man diese Werte in die zugehörige Zeichnung ein, so erkennt man sofort, dass (F1) und (F2) erfüllt sind, dass also ein Fluss vorliegt:



Da an den „Zwischenknoten" $v \neq s,t$ die Erhaltungsregel (F2) gilt, ist es plausibel, dass aus s ebensoviel wegfließt, wie in t ankommt: Dies ist der Inhalt der folgenden Feststellung.

<u>Feststellung 1.</u> $\sum\limits_{e^- = s} f(e) = \sum\limits_{e^+ = t} f(e)$.

<u>Beweis</u>. Da es zu jeder Kante $e \in E$ genau einen Knoten $v \in V$ gibt mit $e^- = v$, haben wir

$\sum\limits_{v \in V} \sum\limits_{e^- = v} f(e) = \sum\limits_{e \in E} f(e)$; ganz entsprechend

gilt auch $\sum\limits_{v \in V} \sum\limits_{e^+ = v} f(e) = \sum\limits_{e \in E} f(e)$. Also:

$$0 = \sum_{v \in V} \sum_{e^- = v} f(e) - \sum_{v \in V} \sum_{e^+ = v} f(e)$$

$$= \sum_{v \in V} \Big( \sum_{e^- = v} f(e) - \sum_{e^+ = v} f(e) \Big)$$

$$\overset{(F2)}{=} \sum_{e^- = s} f(e) - \sum_{e^+ = s} f(e) + \sum_{e^- = t} f(e) - \sum_{e^+ = t} f(e).$$

Da zu s keine Kanten hinführen und von t keine Kanten wegführen, sind die beiden mittleren Summen gleich Null; wir haben also erhalten, dass

$$0 = \sum_{e^- = s} f(e) - \sum_{e^+ = t} f(e)$$

gilt, woraus die Behauptung folgt. $\square$

Den aufgrund von Feststellung 1 gemeinsamen Wert von $\sum_{e^- = s} f(e)$ und $\sum_{e^+ = t} f(e)$ nennt man den <u>Wert des Flusses $f$</u> (Bezeichnung: $w(f)$).

Man definiert also

$$w(f) := \sum_{e^- = s} f(e) = \sum_{e^+ = t} f(e).$$

In unserem obigen Beispiel gilt

$$\sum_{e^- = s} f(e) = 1 + 4 + 2 = 7,$$

$$\sum_{e^+ = t} f(e) = 2 + 1 + 4 = 7;$$

also $w(f) = 7$.

Ein Fluss $f$ auf einem Netzwerk $N$ heißt <u>maximal</u>, falls $w(f) \geq w(\tilde{f})$ für alle Flüsse $\tilde{f}$ auf $N$ gilt.

Eines der wichtigsten Probleme, um die es im Zusammenhang mit Fluss-Netzwerken geht, ist die <u>Konstruktion eines maximalen Flusses</u> für ein gegebenes Netzwerk $N$.

Eine wichtige Rolle spielen dabei obere Schranken, die kein Fluss übertreffen kann. Ein einfaches Beispiel für eine solche obere Schranke erhält man, wenn man sich im Beispiel des letzten Abschnitts die drei Kanten anschaut, die von $s$ ausgehen: die Summe ihrer Kapazitäten ist $5+4+3=12$; folglich kann es keinen Fluss mit einem Wert $>12$ geben.

Oder, anders ausgedrückt:

es gilt $w(f) \leq 12$ für alle Flüsse $f$ auf unserem Netzwerk.

Bei der Suche nach besonders guten oberen Schranken, die kein Fluss übertreffen kann, spielt der folgende Begriff eines Schnitts von $N$ eine besondere Rolle.

<u>Definition</u>. Ein <u>Schnitt</u> von $N$ ist eine Zerlegung der Knotenmenge $V$ in zwei disjunkte Mengen $S$ und $T$ derart, dass $s \in S$ und $t \in T$ gilt.

In unserem Beispiel ist etwa

$$S = \{s, a, b, c\}, T = \{d, e, t\}$$

ein solcher Schnitt, oder auch

$$S = \{s, c, d\}, T = \{a, b, e, t\},$$

oder auch $S = \{s\}, T = \{a, b, c, d, e, t\}$.

Der letztgenannte Schnitt ist derjenige, der zur Schranke

$$w(f) \leq 12$$

für alle Flüsse $f$ auf $N$ geführt hat.

In ähnlicher Weise führen alle Schnitte von $N$ zu einer oberen Schranke von $w(f)$; dies soll im Folgenden präzisiert werden.

Zu diesem Zweck definieren wir, was die Kapazität eines Schnitts ist:

<u>Definition</u>. Ist $(S,T)$ ein Schnitt von $N$, so wird die <u>Kapazität</u> $c(S,T)$ des Schnittes ~~(S,T) definiert durch~~

$$c(S,T) := \sum_{e^- \in S,\, e^+ \in T} c(e) .$$

Die Kapazität eines Schnittes $(S,T)$ ist somit die Summe der Kapazitäten aller Kanten, die von $S$ ausgehen und nach $T$ führen.

---

<u>Beispiele</u>: Es liege das Netzwerk von S. 134 zugrunde.

1. $S=\{s,a,b,c\}, T=\{d,e,t\}$.
Die Kanten, die von $S$ ausgehen und nach $T$ führen sind dann $(s,d)$, $(a,d)$, $(b,t)$, $(c,e)$ und $(c,t)$. Es gilt also: $c(S,T)=3+7+3+3+4=20$.

2. $S=\{s,c,d\}, T=\{a,b,e,t\}$.
Die Kanten, die von $S$ ausgehen und nach $T$ führen sind $(s,a)$, $(s,b)$, $(c,e)$, $(c,t)$ und $(d,e)$. (Kanten, die wie $(a,c)$ von $T$ nach $S$ führen, spielen hier selbstverständlich keine Rolle.) Es gilt $c(S,T)=4+5+3+4+5=21$.

3. $S=\{s\}, T=\{a,b,c,d,e,t\} \Rightarrow c(S,T)=12$.

<u>Feststellung 2</u>. Ist $f$ ein beliebiger Fluss auf $N=(G,c,s,t)$ und ist $(S,T)$ ein beliebiger Schnitt, so gilt

$$w(f)\leq c(S,T).$$

Diese Feststellung gibt die anschaulich einleuchtende Tatsache wieder, dass von $s$ nach $t$ niemals mehr fließen kann, als die Kapazität eines Schnittes zulässt.

<u>Beweis von Feststellung 2</u>. Es gilt $w(f) \overset{(F2)}{=}$

$$\sum_{e^-\in S} f(e)-\sum_{e^+\in S} f(e) = \sum_{\substack{e^-\in S\\ e^+\in S}} f(e)+\sum_{\substack{e^-\in S\\ e^+\in T}} f(e)-\Big(\sum_{\substack{e^+\in S\\ e^-\in S}} f(e)$$

$$+\sum_{\substack{e^+\in S\\ e^-\in T}} f(e)\Big) = \sum_{\substack{e^-\in S\\ e^+\in T}} f(e)-\sum_{\substack{e^-\in T\\ e^+\in S}} f(e)\leq \sum_{\substack{e^-\in S\\ e^+\in T}} f(e)\overset{(F1)}{\leq}$$

$$\sum_{\substack{e^-\in S\\ e^+\in T}} c(e) = c(S,T).\ \square$$

Ein Schnitt $(S,T)$ von $N$ heißt <u>minimal</u>, falls $c(S,T) \leq c(S',T')$ für alle Schnitte $(S',T')$ von $N$ gilt.

Ist $f_0$ ein maximaler Fluss und $(S_0,T_0)$ ein minimaler Schnitt von $N$, so gilt nach Feststellung 2:

$$(*) \qquad w(f_0) \leq c(S_0,T_0).$$

Der folgende Satz von Ford und Fulkerson (1956) besagt, dass in $(*)$ sogar Gleichheit gilt.

<u>Satz</u> (<u>Max-Flow Min-Cut Theorem</u>). In einem Netzwerk ist der Wert eines maximalen Flusses immer gleich der Kapazität eines minimalen Schnittes.

Kurzfassung: max-flow = min-cut.

Beweis: siehe Seite E.146.

Wir beschreiben nun eine Methode, mit der man einen gegebenen Fluss $f$ verbessern kann, d.h., man konstruiert aus $f$ einen neuen Fluss $f_1$ mit $w(f_1) > w(f)$ – vorausgesetzt, dass $f$ nicht bereits den maximalen Flusswert hat. Diese Methode ist nicht nur die Grundlage für einen Algorithmus zur Berechnung eines maximalen Flusses, sondern liefert auch einen Beweis des Max-Flow Min-Cut Theorems. Wir erläutern die Methode an unserem obigen Beispiel.

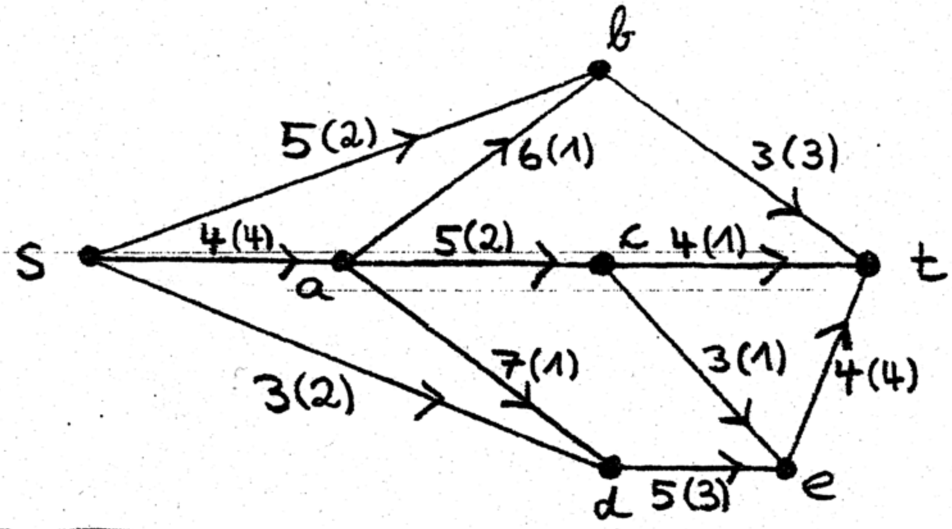
Beispiel: Für das Netzwerk von S. 130 sei $f$ wie auf S. 132 gegeben. Wir betrachten den (gerichteten) Pfad $(s, b, t)$. Weder für $(s, b)$ noch für $(b, t)$ wird die Kapazität ausgeschöpft; deshalb können wir in diesen beiden Kanten den Fluss soweit erhöhen, bis in einer der beiden Kanten die Kapazität erreicht ist. Dementsprechend definieren wir

$$f_1(s, b) = 2,$$
$$f_1(b, t) = 3,$$
$$f_1(x, y) = f(x, y) \text{ für alle anderen Kanten.}$$

Da wir in beiden Kanten des Pfads $(s, b, t)$ den Fluss um den gleichen Betrag angehoben haben, ist $f_1$ wiederum ein Fluss; es gilt

$$w(f_1) = w(f) + 1 = 7 + 1 = 8.$$

Ersetzen wir in der Zeichnung von S. 132 den alten Fluss $f$ durch den neuen Fluss $f_1$, so erhalten wir



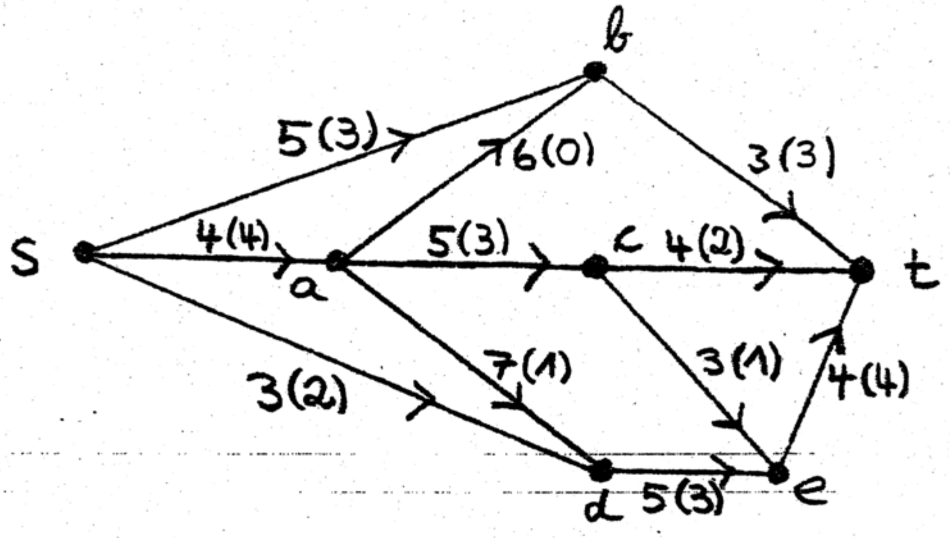

Wollen wir den Fluss weiter verbessern, so müssen wir etwas raffinierter vorgehen und diesmal einen Pfad von s nach t betrachten, in dem Kanten vorkommen, die entgegen ihrer Richtung durchlaufen werden[1], wie z. B. der Pfad $(s, b, a, c, t)$: Für die „Vorwärtskanten" dieses Pfades ist die Kapazität nicht ausgeschöpft, und für die rückwärts durchlaufene Kante $e = (a, b)$ gilt $f_1(e) > 0$. Wir definieren $f_2$ wie folgt:

$$f_2(s,b) = f_1(s,b) + 1, \quad f_2(a,b) = f_1(a,b) - 1,$$
$$f_2(a,c) = f_1(a,c) + 1, \quad f_2(c,t) = f_1(c,t) + 1,$$

sowie $f_2(x,y) = f_1(x,y)$ für die übrigen Kanten. Es ergibt sich folgende Darstellung von $f_2$:

---

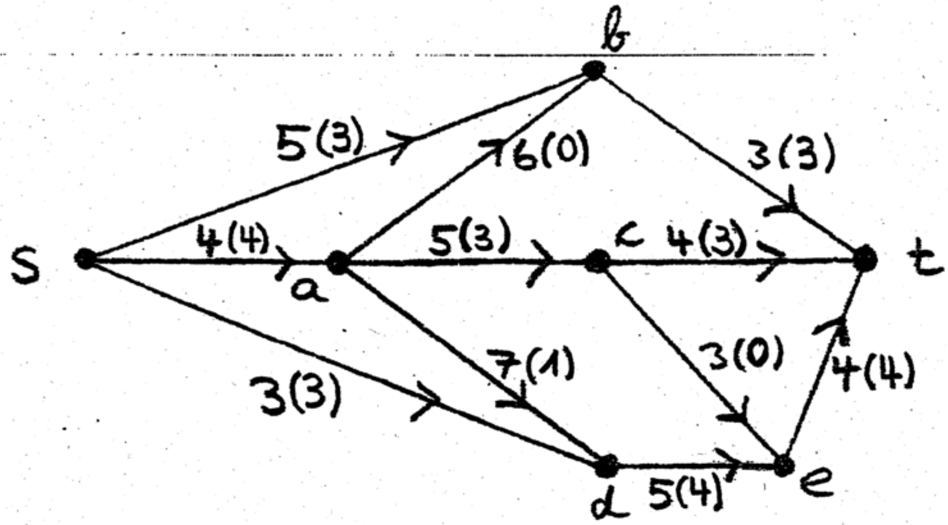
1) Es handelt sich also streng genommen um einen s-t-Pfad im zugrunde liegenden ungerichteten Graphen.




Da wir für alle „Vorwärtskanten" des betrachteten Pfades den Fluss um denselben Betrag erhöht haben und gleichzeitig für alle „Rückwärtskanten" den Fluss um genau diesen Betrag erniedrigt haben (ohne die Kapazitäten zu überschreiten bzw 0 zu unterschreiten), ist $f_2$ wiederum ein Fluss. Es gilt

$$w(f_2) = w(f_1) + 1 = 8 + 1 = 9.$$

Mit Hilfe des Pfades $(s, d, e, c, t)$ verbessern wir $f_2$ zu $f_3$ mit $w(f_3) = 10$:



Nun können wir keinen „flussvergrößernden Pfad" mehr finden. Da es einen Schnitt $(S,T)$ gibt mit $c(S,T) = w(f_3)$ (Welchen nämlich?), können wir sicher sein, dass $f_3$ ein maximaler Fluss ist.

---

<u>Definition</u>. Gegeben sei ein Netzwerk $N = (G, c, s, t)$ mit $G = (V, E)$ sowie ein Fluss $f$ auf $N$. Ein Pfad

$$s = v_1, v_2, \ldots, v_k = t$$

des zugrundeliegenden ungerichteten Graphen heißt <u>flussvergrößernder Pfad</u> (oder <u>$f$-vergrößernder Pfad</u>), falls für jedes $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ entweder

$$(v_i, v_{i+1}) \in E \text{ und } f(v_i, v_{i+1}) < c(v_i, v_{i+1})$$

oder

$$(v_{i+1}, v_i) \in E \text{ und } 0 < f(v_{i+1}, v_i)$$

gilt.

---

Es gilt (mit Bezeichnungen wie in der obigen Definition): Existiert ein flussvergrößernder Pfad $s = v_1, v_2, \ldots, v_k = t$, so kann man $f$ wie folgt zu einem Fluss $f^+$ mit $w(f^+) > w(f)$ abändern: Es sei für $i = 1, \ldots, k-1$

$$\alpha_i = \begin{cases} c(v_i, v_{i+1}) - f(v_i, v_{i+1}), & \text{falls } (v_i, v_{i+1}) \in E \text{ und} \\ & f(v_i, v_{i+1}) < c(v_i, v_{i+1}) \\ f(v_{i+1}, v_i) & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Es sei $\alpha = \min\{\alpha_i : i = 1, \ldots, k-1\}$. Man beachte, dass $\alpha > 0$ gilt.

Wir definieren nun $f^+$ wie folgt: Für $i = 1, \ldots, k-1$ sei $f^+(v_i, v_{i+1}) = f(v_i, v_{i+1}) + \alpha$, falls $(v_i, v_{i+1}) \in E$ und $f(v_i, v_{i+1}) < c(v_i, v_{i+1})$, und $f^+(v_{i+1}, v_i) = f(v_{i+1}, v_i) - \alpha$ andernfalls. Für alle anderen $e \in E$ gelte $f^+(e) = f(e)$. Es folgt, dass $f^+$ ein Fluss auf $N$ ist mit $w(f^+) = w(f) + \alpha$.

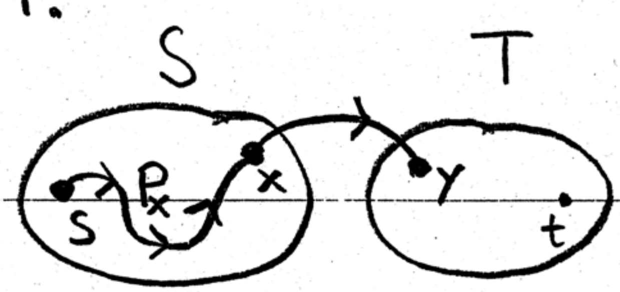
Der Begriff „partieller $f$-vergrößernder Pfad" wird wie „$f$-vergrößernder Pfad" definiert mit dem einzigen Unterschied, dass für einen solchen Pfad $s = v_1, v_2, \ldots, v_k$ nicht unbedingt $v_k = t$ gelten muss. Der Fall $k = 1$, d.h., der Fall, dass ein solcher Pfad nur aus $s$ besteht, ist dabei eingeschlossen.

## Beweis des Max-Flow Min-Cut Theorems:

Es sei $f$ ein maximaler Fluss. Der Kürze halber wollen wir im Folgenden statt „partieller $f$-vergrößernder Pfad" einfach „$*$-Pfad" sagen. Wir definieren $S$ als die Menge derjenigen $v \in V$, für die es einen $*$-Pfad von $s$ nach $v$ gibt; dann gilt $s \in S$. Es sei $T = V \setminus S$. Dann gilt $t \in T$, da man andernfalls mit Hilfe eines $*$-Pfades, der $t$ erreicht, den Fluss $f$ vergrößern könnte. Es handelt sich bei $(S,T)$ also um einen Schnitt. Unser Satz ist bewiesen, wenn wir

$$w(f) = c(S,T)$$

zeigen. Zum Nachweis sei $(x,y) \in E$ mit $x \in S$ und $y \in T$. Wegen $x \in S$ existiert ein $*$-Pfad $P_x$, der in $x$ endet. Es folgt $f(x,y) = c(x,y)$, da man andernfalls $P_x$ zu einem in $y$ endenden $*$-Pfad verlängern könnte, im Widerspruch zu $y \in T$.




Für eine Kante $(y,x) \in E$ mit $x \in S$ und $y \in T$ erhält man auf ähnliche Art $f(x,y) = 0$. Es folgt

$$w(f) \overset{1)}{=} \sum_{\substack{e^- \in S \\ e^+ \in T}} f(e) - \sum_{\substack{e^- \in T \\ e^+ \in S}} f(e) = \sum_{\substack{e^- \in S \\ e^+ \in T}} c(e) = c(S,T). \;\square$$

1) vergleiche Beweis von Feststellung 2

Der Beweis des Max-Flow Min-Cut Theorems enthält folgende Grundidee zur algorithmischen Bestimmung eines Maximalflusses in einem Netzwerk $N=(G,s,t,c)$:

<u>1.</u> Starte mit dem <u>Nullfluss</u> $f_0$. (Dies ist der (triviale) Fluss mit $f(e)=0$ für alle $e \in E$.)

<u>2.</u> Ist ein Fluss $f_n$ bereits konstruiert, so suche man nach einem $f_n$-vergrößernden Pfad P.

(2.1) Existiert kein solcher Pfad P, so ist $f_n$ ein Maximalfluss (, da ein Schnitt $(S,T)$ mit $w(f_n)=c(S,T)$ existiert; vergl. Beweis des Max-Flow Min-Cut Theorems).

(2.2) Existiert ein solches P, so benutze man P um aus $f_n$ einen Fluss $f_{n+1}$ mit $w(f_{n+1}) > w(f_n)$ zu gewinnen; wiederhole <u>2.</u> mit $f_{n+1}$ anstelle von $f_n$.

Weitere Details findet man in vielen Lehrbüchern, beispielsweise in Biggs, Discrete Mathematics oder Jungnickel, Graphen, Netzwerke und Algorithmen.