Diskrete Mathematik

SS 2010 Thomas Andreae

Der Vorlesung liegt als Basistext das folgende Lehrbuch zugrunde:

Angelika Steger, Diskrete Strukturen 1, Springer-Verlag, 2007.

Das vorliegende Skript enthält Ergänzungen zu diesem Buch.

Ergänzungen zu Abschnitt 0.2

Ein typisches Beispiel für eine Quasiordnung, die keine partielle Ordnung ist: Es sei R die Teilbarkeitsrelation auf der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen, d.h.

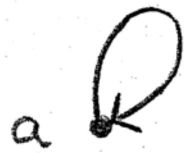
$$R := \{(m,n) \mid m,n \in \mathbb{Z} \text{ mit } n = k \cdot m \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}\}$$

Die Relation R ist reflexiv und transitiv, aber nicht antisymmetrisch. (Wieso nicht?)

Ist $\mathcal{R}$ eine Relation auf der Menge A und gilt

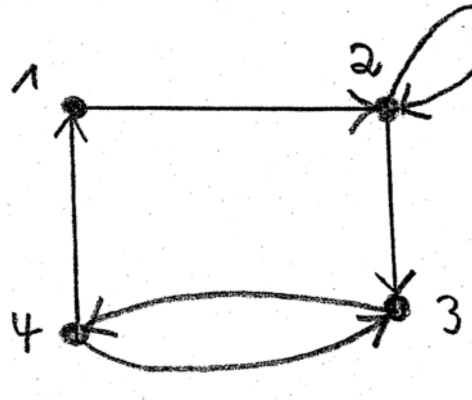
$$(a,a) \in \mathcal{R}$$

für ein $a \in A$, so stellt man dies in der graphischen Darstellung von $\mathcal{R}$ als eine Schlinge dar:



Statt „Schlinge" sagt man auch „Schleife" (englisch: loop).

Beispiel: Es sei $A = \{1,2,3,4\}$ und die Relation $\mathcal{R}$ auf A sei gegeben durch $\mathcal{R} = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,1),(4,3),(2,2)\}$.
Graphische Darstellung von $\mathcal{R}$:



Die Eigenschaften reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch und transitiv lassen sich anhand der graphischen Darstellung einer

Relation R veranschaulichen:

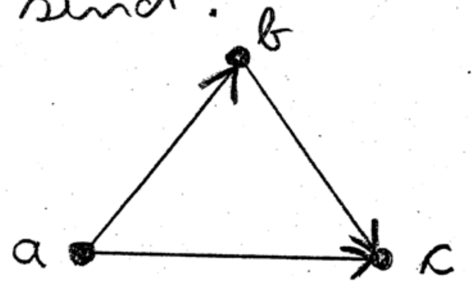
- R ist <u>reflexiv</u> bedeutet, dass in der graphischen Darstellung jedes Element von A eine Schlinge besitzt;

- R ist <u>symmetrisch</u> bedeutet: Immer wenn in der graphischen Darstellung ein Pfeil von a nach b geht, so geht auch umgekehrt ein Pfeil von b nach a;

- R ist <u>antisymmetrisch</u>: Immer wenn für zwei verschiedene Elemente a und b ein Pfeil von a nach b vorhanden ist, so ist der umgekehrte Pfeil von b nach a nicht vorhanden.

– R ist <u>transitiv</u> bedeutet: Immer wenn ein Pfeil von a nach b und ein Pfeil von b nach c vorhanden ist, so ist auch ein Pfeil von a nach c vorhanden.

Veranschaulichung der Transitivität für den Fall, dass a, b und c drei verschiedene Elemente sind:



Unter den Fällen, dass a, b und c nicht alle verschieden sind, gibt es einen Fall, der nicht trivial ist, nämlich der Fall, dass $a = c$ und $a \neq b$ gilt. Veranschaulichung der Transitivität in diesem Fall:

<u>0,1-Matrizen</u> liefern eine weitere Möglichkeit, Relationen und ihre Eigenschaften zu veranschaulichen. Ist eine Relation R auf einer endlichen Menge A gegeben, so nummeriert man zunächst einmal die Elemente von A, etwa $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Sodann definiert man eine 0,1-Matrix $M = (m_{ij})$ wie folgt:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (a_i, a_j) \in R \\ 0 & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

<u>Beispiel</u>: Es sei $A = \{1,2,3,4\}$ und R sei wie im Beispiel auf Seite E.2. Dann entspricht jeder Zeile und ebenso jeder Spalte ein Element aus A, und die dazugehörige Matrix M sieht wie folgt aus:

	1	2	3	4
1	0	1	0	0
2	0	1	1	0
3	0	0	0	1
4	1	0	1	0

Eine weitere Eigenschaft, die eine Relation haben kann: Ein Relation R auf der Menge A heißt

- <u>irreflexiv</u>, wenn für alle $a \in A$ gilt:

$$(a,a) \notin R.$$

<u>Feststellung</u>: Ist eine Relation R auf A irreflexiv und transitiv, so ist R auch antisymmetrisch.

<u>Beweis</u>: Sei R irreflexiv und transitiv. Angenommen R wäre nicht antisymmetrisch, d.h., es gibt $a, b \in A$ mit $(a,b) \in R$, $(b,a) \in R$ und $a \neq b$. Aufgrund der Transitivität von R folgt aus $(a,b), (b,a) \in R$, dass $(a,a) \in R$ gilt, im Widerspruch zu Irreflexivität von R. $\square$

Beispiel 0.10 (Steger, Seite 11/12) in leicht geänderter Darstellung:

Es sei $f(n) = \sum_{i=0}^{d} a_i n^i$ ein Polynom, und $k \geq d$ sei eine natürliche Zahl.

Behauptung: Dann gilt $f(n) = O(n^k)$.

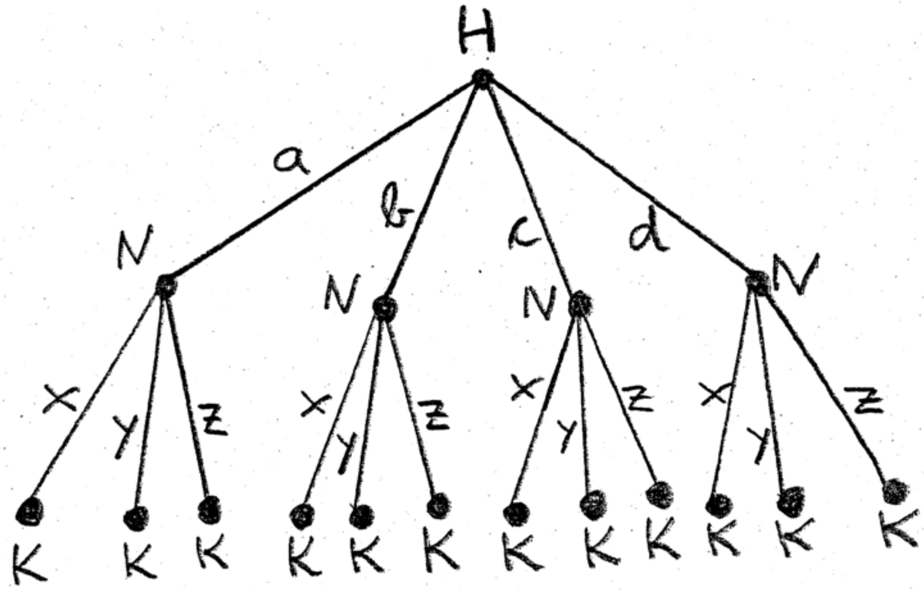
Zum Nachweis dieser Behauptung sei C die Summe der Beträge aller Koeffizienten von f, d.h.

$$C = \sum_{i=0}^{d} |a_i|.$$

Es folgt $|f(n)| = \left|\sum_{i=0}^{d} a_i n^i\right| \leq \sum_{i=0}^{d} |a_i| n^i \leq n^k \sum_{i=0}^{d} |a_i| = C \cdot n^k$. Also $f(n) = O(n^k)$.

<u>Zur Verdeutlichung ist es oftmals nützlich, Anwendungen der Produktregel als Baumdiagramm darzustellen</u>. Hierzu ein Beispiel:

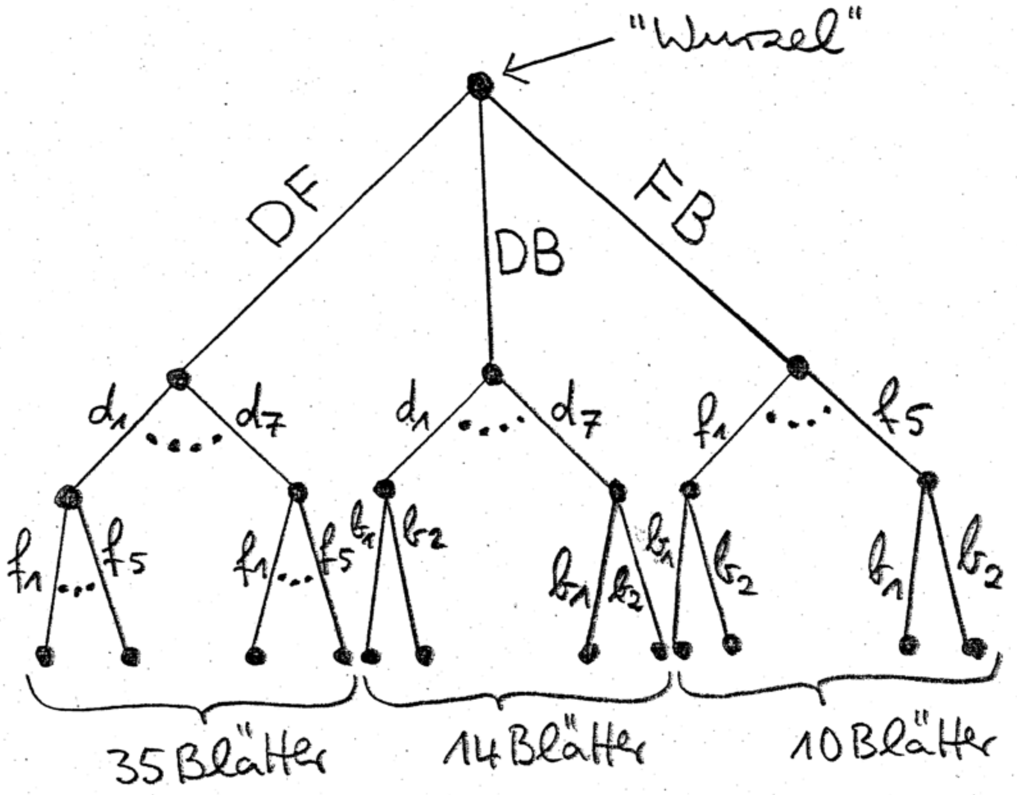
Angenommen, man kann auf 4 Wegen (genannt a, b, c, d) von Hamburg nach Neumünster fahren und es gebe außerdem 3 Wege (genannt X, Y, Z) von Neumünster nach Kiel. Dann gibt es $4 \cdot 3 = 12$ Wege, um von Hamburg über Neumünster nach Kiel zu fahren. Das dazugehörige Baumdiagramm enthält 12 Blätter, die diesen Möglichkeiten entsprechen:



Ein Beispiel zur Summen- und Produktregel:

In einer Abteilung eines Tennisclubs gebe es 14 Mitglieder; 7 Mitglieder sind Deutsche, 5 Mitglieder sind Franzosen und 2 sind Belgier. Wieviele Möglichkeiten gibt es, ein „binationales Doppel" zusammenzustellen? Antwort: Nach der Produktregel gibt es $7 \cdot 5 = 35$ Möglichkeiten für ein deutsch-französisches Doppel; für ein deutsch-belgisches Doppel gibt es $7 \cdot 2 = 14$ Möglichkeiten, und ein französisch-belgisches Doppel lässt sich auf $5 \cdot 2 = 10$ Arten bilden. Nach der Summenregel gibt es insgesamt also $35 + 14 + 10 = 59$ Möglichkeiten.

Auch derartige Beispiele, in denen Summen- und Produktregel verwendet werden, lassen sich durch Baumdiagramme darstellen. Für obiges Beispiel ergibt sich folgendes Diagramm mit insgesamt 59 Blättern:



Nun zur <u>Gleichheitsregel</u>: Wir geben zwei Beweise der folgenden Feststellung, von denen der erste die Gleichheitsregel verwendet.

<u>Feststellung</u>: Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer n-elementigen Menge M besitzt genau 2^n Elemente.

<u>1. Beweis</u>: Für $M = \emptyset$ haben wir $|\mathcal{P}(M)| = |\{\emptyset\}| = 1 = 2^0$, d. h., in diesem Fall gilt die Feststellung. Wir dürfen also $M \neq \emptyset$ annehmen. Die Elemente von M seien beliebig nummeriert,

etwa $M = \{m_1, \dots, m_n\}$. Zu jeder Teilmenge A von M bilden wir auf naheliegende Art ein n-Tupel $x_A = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ mit Einträgen 0 oder 1 (genannt: <u>charakteristischer Vektor</u> von A):

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{falls } m_i \in A \\ 0 & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Dadurch wird eine bijektive Abbildung zwischen $\mathcal{P}(M)$ und der Menge $\{0,1\}^n$ aller n-Tupel mit Einträgen 0 oder 1 definiert. Wir wissen aufgrund der Produktregel, dass $|\{0,1\}^n| = 2^n$ gilt; also $|\mathcal{P}(M)| = 2^n$ aufgrund der Gleichheitsregel. □

Zur <u>Illustration</u> geben wir die im Beweis auftretende bijektive Abbildung für den Fall $n=3$ an. Es sei also $M = \{m_1, m_2, m_3\}$. Die Teilmengen von M werden wie folgt durch Tripel mit Einträgen aus $\{0,1\}$ „codiert":

$$\emptyset \longmapsto (0,0,0)$$

$$\{m_1\} \longmapsto (1,0,0), \quad \{m_2\} \longmapsto (0,1,0), \quad \{m_3\} \longmapsto (0,0,1)$$

$\{m_1, m_2\} \longmapsto (1,1,0)$
$\{m_1, m_3\} \longmapsto (1,0,1)$
$\{m_2, m_3\} \longmapsto (0,1,1)$

$M = \{m_1, m_2, m_3\} \longmapsto (1,1,1).$

2. Beweis: Wir benutzen die binomische Formel

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

und setzen darin $a = b = 1$. Es ergibt sich

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Für jedes k $(0 \leq k \leq n)$ gibt der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ die Anzahl der k-elementigen Teilmengen der n-elementigen Menge M an. Also hat man insgesamt

$$|\mathfrak{P}(M)| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n. \quad \square$$

Ein weiteres interessantes Ergebnis erhält man, wenn man in der binomischen Formel $a=-1$ und $b=1$ setzt:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0, \text{ falls } n \geq 1.$$

Stellt man diese Gleichung um, so ergibt sich

$$\sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ gerade}}} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ ungerade}}} \binom{n}{k} \quad (\text{für } n \geq 1).$$

Es gilt also folgende

<u>Feststellung</u>: Jede endliche Menge $M \neq \emptyset$ besitzt ebenso viele Teilmengen mit einer geraden wie mit einer ungeraden Anzahl von Elementen.

<u>Alternativer Beweis dieser Feststellung</u> (ohne binomischen Lehrsatz): Man erledigt zunächst den Fall, dass $|M|$ ungerade ist; in diesem Fall kann man eine sehr einfache Bijektion zwischen geraden und ungeraden Teilmengen von M angeben. (Welche nämlich?) Anschließend führt man den Fall, dass $|M|$ gerade ist, auf den bereits erledigten Fall zurück. (Details: Übungsaufgabe)

Beispiel zum Doppelten Abzählen

Es sei $S = T = \{1, \dots, n\}$ und $R \subseteq S \times T$ sei definiert durch

$$R = \{(i,j) \in S \times T : i \mid j\}.$$

Dazugehörige 0,1-Matrix (für $n = 8$):

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2		1		1		1		1
3			1			1		
4				1				1
5					1			
6						1		
7							1	
8								1

Es sei $t(j)$ die Anzahl der Teiler von j („Anzahl der Einsen in der j-ten Spalte").

<u>Frage</u>: Wieviele Teiler hat eine Zahl von 1 bis n <u>im Durchschnitt</u>?

Die gesuchte durchschnittliche Anzahl von Teilern ist gegeben durch

$$\bar{t}(n) := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} t(j).$$

Einige Werte von $\bar{t}(n)$:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\bar{t}(n)$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	2	2	$\frac{7}{3}$	$\frac{16}{7}$	$\frac{5}{2}$

Wie groß ist $\bar{t}(n)$ für beliebiges n?

Die Antwort erscheint auf den ersten Blick hoffnungslos, da sich t recht unregelmäßig zu verhalten scheint; z.B. gilt $t(p)=2$, falls p Primzahl ist, aber für 2-er Potenzen erhält man große Werte: $t(2^k) = k+1$.

Doppeltes Abzählen ergibt jedoch

$$\sum_{j=1}^{n} t(j) = \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor.$$

Es folgt

$$\bar{t}(n) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} t(j) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\lfloor\frac{n}{i}\right\rfloor \underset{\uparrow}{\approx} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}.$$

Fehler kleiner als 1

Man nennt $H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ die n-te <u>harmonische Zahl</u>.

Für Funktionen $f, g: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ schreiben wir $f \sim g$, falls $\frac{f(n)}{g(n)} \longrightarrow 1$ für $n \to \infty$. Aus der Analysis weiß man, dass

$$H_n \sim \ln(n).$$

<u>Also</u>: Trotz aller Unregelmäßigkeit verhält sich die Teilerfunktion <u>im Durchschnitt</u> völlig regelmäßig, nämlich

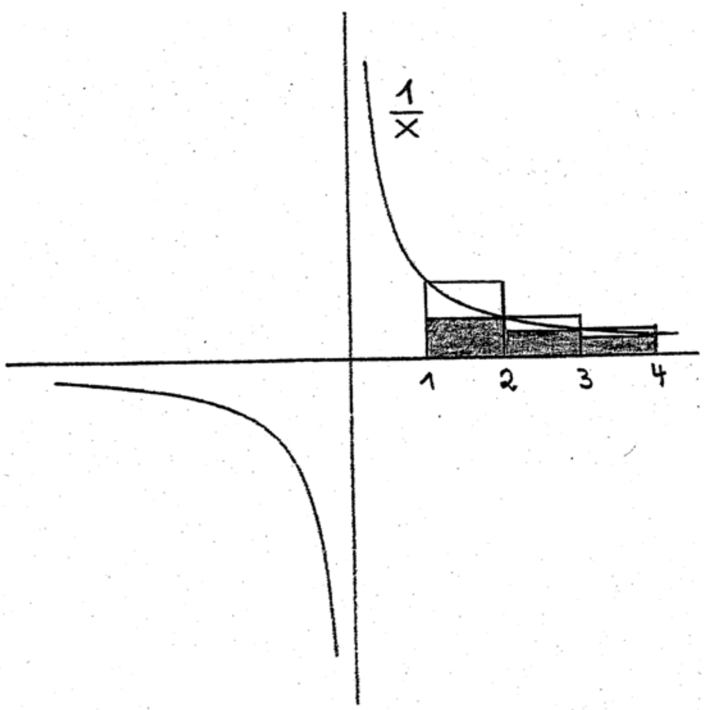
$$\bar{t}(n) \sim \ln(n).$$

<u>Literatur</u>: Das Beispiel stammt aus M. Aigner, Diskrete Mathematik, Teubner. Weitere sehr interessante Beispiele findet man in J. Matousek, J. Nesetril, Diskrete Mathematik, Springer (Abschnitt 6: Die Methode des Doppelten Abzählens) sowie im Buch von Steger auf den Seiten 22/23.

<u>Nachweis von $H_n \sim \ln(n)$:</u> $H_n - 1 = \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i}$ ist der Wert einer Untersumme zum Integral $\int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \ln(n)$, und $H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ ist der Wert einer Obersumme zu diesem Integral (vergl. Skizze). Also gilt

$$H_n - 1 \leq \ln(n) \leq H_n,$$

woraus $H_n \sim \ln(n)$ folgt.



Das Schubfachprinzip (pigeonhole principle)

Wir beschränken uns hier auf das Allerwichtigste. Die Anwendungsbeispiele 1.13 und 1.15 (Steger Seite 24/25) lesen Sie sich bitte selber durch, am besten etwas später, wenn wir uns bereits etwas mehr mit Graphen befasst haben.

Es seien $n, m \in \mathbb{N}$. Wir geben zunächst zwei äquivalente Formulierungen des Schubfachprinzips in seiner einfachsten Form an:

1. Wenn n Objekte auf m Fächer verteilt werden und es gilt $n > m$, dann gibt es mindestens ein Fach, in das mindestens zwei Objekte hineinkommen.

Zur Abkürzung schreiben wir $\mathbb{N}_n := \{1, \dots, n\}$ und ebenso $\mathbb{N}_m := \{1, \dots, m\}$.

2. Ist $f: \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_m$ eine Funktion und gilt $n > m$, so ist f nicht injektiv.

Ein einfaches Beispiel: In jeder Menge von 13 oder mehr Menschen gibt es mindestens zwei, die im gleichen Monat Geburtstag haben.

Varianten bzw. Erweiterungen des Schubfachprinzips (für $n, m \in \mathbb{N}$):

3. Wenn n Objekte auf m Fächer verteilt werden, dann gibt es mindestens ein Fach, in das mindestens

$$\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil$$

Objekte hineinkommen.

Einfache Beispiele: (i) In einer Menge von 100 Menschen gibt es mindestens 9, die im gleichen Monat Geburtstag haben; (ii) in einer Menge von 501 in den U.S.A. geborenen Menschen gibt es mindestens 11, die im gleichen Bundesstaat geboren wurden.

Beweis von 3.: Angenommen, die Aussage wäre nicht wahr. Dann würde es in jedem Fach höchstens $\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil - 1$ Objekte geben; insgesamt hätten wir also höchstens $m\left(\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil - 1\right)$ Objekte, d.h. $n \leq m\left(\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil - 1\right)$. Durch Umformung erhält man hieraus

$$1 \leq \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil - \frac{n}{m},$$

was nicht sein kann, da der Abstand zwischen einer reellen Zahl a und $\lceil a \rceil$ immer kleiner als 1 ist. $\square$

4. Wenn unendlich viele Objekte auf m Fächer verteilt werden (für $m \in \mathbb{N}$), dann gibt es mindestens ein Fach, in das unendlich viele Objekte hineinkommen.

Dies kann auch wie folgt formuliert werden:

5. Ist $f: U \longrightarrow \mathbb{N}_m$ eine Funktion und ist U eine unendliche Menge, dann gibt es ein $j \in \mathbb{N}_m$, auf das unendlich viele $u \in U$ abgebildet werden.

Als Abkürzung für die in der Siebformel mit alternierendem Vorzeichen auftretenden Ausdrücke wollen wir α_τ schreiben, d.h., wir setzen

$$\alpha_\tau := \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_\tau \leq n} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_\tau}| \quad (\tau = 1, \ldots, n).$$

Mit dieser Abkürzung erhält man die Siebformel in kompakter Form:

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \ldots + (-1)^{n-1} \alpha_n.$$

In zahlreichen Anwendungen benutzt man die folgende direkte Folgerung aus der Siebformel. Es seien $A_1, \ldots, A_n$ Teilmengen einer gewissen Menge S mit $|S| = N$. Gefragt ist nach der Anzahl der Elemente von S, die in <u>keiner</u> der Mengen A_i enthalten sind. Für diese Anzahl gilt dann aufgrund der Siebformel

$$|S \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n)| = N - \alpha_1 + \alpha_2 - \ldots + (-1)^n \alpha_n.$$

Mit D_n (für $n \geq 1$) sei die <u>Anzahl der fixpunktfreien Permutationen</u> der Menge $\{1,\dots,n\}$ bezeichnet ("<u>Derangement-Zahlen</u>").

Für $n = 1, 2, 3, 4$ können wir den Wert von D_n direkt bestimmen: Klarerweise gilt $D_1 = 0$, $D_2 = 1$ und $D_3 = 2$. (Wieso nämlich?) D_4 bestimmen wir, indem wir einfach alle fixpunktfreien Permutationen von $\{1,2,3,4\}$ auflisten (in Zyklenschreibweise): $(1,2)(3,4)$, $(1,3)(2,4)$, $(1,4)(2,3)$, $(1,2,3,4)$, $(1,2,4,3)$, $(1,3,2,4)$, $(1,3,4,2)$, $(1,4,2,3)$, $(1,4,3,2)$; also $D_4 = 9$.

Nach Beispiel 1.18 (Steger Seite 27/28) gilt für die Zahlen D_n folgende <u>Summenformel</u>:

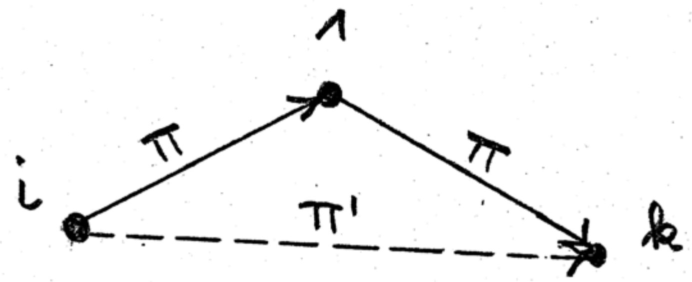
$$(*)\quad D_n = n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}.$$

Außerdem hat man die folgende <u>Rekursionsformel</u>, mit der man die Zahlen D_n bequem berechnen kann:

$$(**)\quad D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}) \quad (n \geq 3).$$

Beweis von (**): Für festes $k \in \{2,\dots,n\}$ sei $\mathcal{M}$ die Menge der fixpunktfreien Permutationen π von $\{1,\dots,n\}$ mit $\pi(1)=k$. Die Behauptung (**) ist bewiesen, wenn wir $|\mathcal{M}| = D_{n-1} + D_{n-2}$ zeigen. In $\mathcal{M}$ gibt es genau D_{n-2} Permutationen, für die $\pi(k)=1$ gilt, da es D_{n-2} fixpunktfreie Permutationen der Elemente aus $\{2,\dots,n\}\setminus\{k\}$ gibt.

Es sei $\mathcal{M}'$ die Menge der $\pi \in \mathcal{M}$, für die $\pi(i)=1$ für ein $i \neq k$ gilt. Zu jedem solchen π definieren wir eine Permutation π' von $\{2,\dots,n\}$ durch $\pi'(i)=k$ und $\pi'(j)=\pi(j)$ für $j\neq i$ (vergl. Skizze). Hierdurch wird eine Bijektion zwischen $\mathcal{M}'$ und der Menge der fixpunktfreien Permutationen von $\{2,\dots,n\}$ hergestellt, woraus $|\mathcal{M}'| = D_{n-1}$ folgt. □



Mit Hilfe von (**) kann man sich sehr schnell einige Werte von D_n berechnen – zumindest für kleine n:

$D_1 = 0$, $D_2 = 1$

$D_3 = 2(0+1) = 2$

$D_4 = 3(2+1) = 9$

$D_5 = 4(9+2) = 44$

$D_6 = 5(44+9) = 265$

$\vdots$

Die Formel (*) besitzt einen Vorteil gegenüber (**): Bekanntlich gilt

$$e^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} .$$

Aus (*) kann man also ablesen, dass für große n der Wert von D_n ungefähr gleich

$$\frac{n!}{e}$$

ist. Da es $n!$ Permutationen von $\{1, \dots, n\}$ gibt, bedeutet dies, dass der Anteil der fixpunktfreien Permutationen für große n ungefähr gleich $\frac{1}{e} \approx 0.368$ ist. Da die obige Reihe recht schnell konvergiert, ergibt sich sogar schon für kleine n ungefähr dieser Anteil an fixpunktfreien Permutationen:

$\underline{n=3}$: $\frac{2}{3!} = 0.\overline{3}$

$\underline{n=4}$: $\frac{9}{4!} = 0.375$

$\underline{n=5}$: $\frac{44}{5!} = 0.3\overline{6}$

$\underline{n=6}$: $\frac{265}{6!} \approx 0.368$

Ergänzungen zum Thema Binomialkoeffizienten

Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq k$ gilt

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0 \\ \dfrac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} & \text{für } k \geq 1. \end{cases}$$

Ganz entsprechend definiert man für $r \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}_0$:

$$\binom{r}{0} := 1 \text{ und } \binom{r}{k} := \frac{r(r-1)\cdot\ldots\cdot(r-k+1)}{k!} \text{ (für } k \geq 1\text{)}$$

Hierbei handelt es sich um die <u>verallgemeinerten Binomialkoeffizienten</u>; in der Analysis kommen diese Zahlen als Koeffizienten der <u>Binomialreihe</u> vor.

<u>Beispiele</u>: Es gilt $\binom{7}{3} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}$ und ganz entsprechend $\binom{-1}{3} = \frac{(-1)(-2)(-3)}{1\cdot 2\cdot 3}$, $\binom{2}{3} = \frac{2\cdot 1\cdot 0}{1\cdot 2\cdot 3}$, $\binom{1/2}{3} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}$.

Man beachte: Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $n < k$ gilt