

Qualitative Theorie bei gewöhnlichen
Differentialgleichungen
WS 07/08

Bodo Werner

<mailto:werner@math.uni-hamburg.de>

9. Februar 2008

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	5
1.1	Vorwort	5
1.2	Einleitung	5
1.3	Lehrbücher	6
1.4	Systeme von Differentialgleichungen, Phasen- und Integralkurven	8
1.5	Modell eines Rüstungswettlaufs	9
1.6	Nichtlineare Systeme	10
1.6.1	Bemerkungen zu nichtlinearen Schwingungen	11
1.6.2	Lotka–Volterra–System	11
1.6.3	Weitere Räuber–Beute–Systeme	13
1.6.4	Chemische Reaktionen	14
1.6.5	Konjunkturmodelle in der Volkswirtschaft	15
1.7	Differentialgleichung der Phasenkurven	16
2	Dynamische Systeme	17
2.1	Fluss	17
2.1.1	Eigenschaften des Flusses	18
2.1.2	Dynamisches System	19
2.1.3	Der Fluss für lineare autonome Systeme	19
2.1.4	Bahnen, Phasenraum	19
2.1.5	Bemerkungen	20
2.2	Gleichgewichtspunkte	21
2.2.1	Stabilität, Attraktivität	21
2.2.2	Autonome lineare Systeme	22
2.3	Periodische Orbits	23
2.4	Invarianz, Stabilität und Attraktivität von Mengen	24
2.4.1	Invarianz	24
2.4.2	Attraktoren	25
2.5	Limesmengen	26
2.6	Koordinatentransformationen, Konjugiertheit	28
2.7	Beispiele	29

3	Qualitative Theorie: Stabilitätskriterien	32
3.1	Abhängigkeit der Lösungen von Anfangswerten und Parametern	32
3.1.1	Variationsgleichungen	33
3.2	Ljapunov-Funktionen	34
3.2.1	Ljapunovfunktionen bzgl. Gleichgewichtspunkte	36
3.3	Prinzip der linearisierten Stabilität	37
3.3.1	Hyperbolische Gleichgewichtspunkte	39
3.3.2	Prinzip der linearisierten Stabilität für Fixpunkte	40
4	Periodische Lösungen	42
4.1	Einleitung	42
4.1.1	Diskrete dynamische Systeme	42
4.1.2	Periodische Orbits autonomer DGLn	43
4.1.3	Periodische Lösungen periodisch angeregter GDGLn	43
4.1.4	Periodisches Verhalten als Grenzverhalten	43
4.1.5	Stabilität	43
4.1.6	Verzweigungen bei Variation von Systemparametern	44
4.1.7	Literaturhinweise	44
4.2	Periodische Orbits und periodische Lösungen	45
4.2.1	Diskrete Systeme	45
4.2.2	Periodische Lösungen von periodischen Differentialgleichungen	45
4.2.3	Periodische Orbits bei autonomen Systemen	48
4.2.4	Der Satz von Liouville	53
5	Verzweigungen	57
5.1	Einleitung	57
5.2	Hyperbolische Gleichgewichtspunkte und Fixpunkte	59
5.3	Umkehrpunkte	59
5.3.1	Stabilitätsanalyse	62
5.3.2	Dynamik	63
5.3.3	Beispiele für Umkehrpunkte	63
5.4	Hopfverzweigung	65
5.4.1	Beispiele	67
5.4.2	Hopfverzweigung in ebenen Systemen	70
5.4.3	Formulierung und Beweis des Hopfverzweigungssatzes	75
6	Mikroskopische Verkehrsmodellierung	79
6.1	Modell mit Kreisverkehr	79
6.1.1	Modellierung von aggressivem Fahrverhalten	84
6.2	Homogenes Fahrverhalten	86
6.3	Baustelle	90

6.3.1	Homogenes Fahrverhalten	92
6.4	Literatur	94

Kapitel 1

Einführung

1.1 Vorwort

Dieses Skript benutzt mehrere von mir erstellte Skripte aus den Jahren 1994-1996, z.B.

- Gewöhnliche Differentialgleichungen (SoSe 94)
- Numerische Behandlung von Verzweigungsproblemen (WiSe 94/95)
- Einführung in dynamische Systeme (SoSe 96)

Es ist wesentlich ausführlicher als die Vorlesung und enthält auch Dinge, die bei Herrn Gasser in der Vorlesung „Gewöhnliche Differentialgleichungen (Theorie)“ behandelt wurden. Daher werde ich Bezüge zu dem von ihm verwendeten Buch von G. WIRSCHING explizit erwähnen. Einige Grafiken habe ich mit Hilfe von im Internet zur Verfügung stehender Software erstellt, z.B. in [ODE 2D Calculator](#) (Marek Rychlik, Arizona)

1.2 Einleitung

Gegenstand dieses Skripts sind **Anfangswertaufgaben** für **autonome** Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0 \tag{1.1}$$

mit einer stetig-differenzierbar Abbildung $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, einer offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ sowie mit $x_0 \in D$. Man unterscheide stets zwischen der Variablen $x \in \mathbb{R}^n$ von f und einer Lösung $x(t)$, die ich häufig mit $u(t)$ statt mit $x(t)$ bezeichnen werde.

In meiner Sichtweise sind Differentialgleichungen **mathematische Modelle** zur Beschreibung dynamischer Vorgänge, also der zeitlichen Entwicklung von Systemen, d.h. ihrer Zustände im Laufe der Zeit. Bei den **Dynamischen Systemen** interessiert **langfristiges Verhalten** für

$t \rightarrow \infty$. Wir interpretieren also t als Zeit und $x \in \mathbb{R}^n$ als Zustand. Durch gewöhnliche Differentialgleichungen können zeitliche Abläufe von Systemen mit *endlich vielen Freiheitsgraden* beschrieben werden, während bei partiellen Differentialgleichungen der Zustandsraum der ein (unendlich-dimensionaler) Funktionenraum ist, dessen Elemente räumliche Verteilungen repräsentieren.

Was die Anwendungen betrifft, so sind partielle DGLn wohl wichtiger als gewöhnliche DGLn. Letztere sind jedoch für ein Verständnis von DGLn generell und von dynamischen Systemen im Besonderen grundlegend.

Es geht hier um *qualitative Theorie*, d.h. um Aussagen über das *langfristige Verhalten* der dynamischen Systeme.

1.3 Lehrbücher

Als erstes nenne ich das von Herrn Gasser im SoSe 07 verwendete Buch
G. WIRSCHING: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Teubner, 2006

Als zweites das Skript **Gewöhnliche DGLn** (R. Gunesch, SoSe 2006).
Dieses 161 Seiten umfassende Skript, was auf frühere Skripte von R. Lauterbach aufbaut, enthält vieles (und darüber hinausgehendes), was auch in diesem Skript angesprochen wird.

Die folgenden Bücher sind älter:

Nicht sehr einfach zu lesen, aber den theoretischen Zielen dieses Skripts am nächsten ist

H. AMANN: Gewöhnliche Differentialgleichungen, de Gruyter, 1983.

Einzige mir bekannte Lehrbücher mit integrierter analytischer und numerischer Behandlung sind

W. LUTHER, K. NIEDERDRENK, F. REUTTER, H. YSERENTANT: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Vieweg, 1987.

E.HAIRER, S.P. NOERSETT, G.WANNER Solving Ordinary Differential Equations I, 2. Auflage, Springer 1991.

Stark an der Theorie von dynamischen Systemen orientiert sind die Bücher

K.W. KNOBLOCH, F. KAPPEL: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Teubner, 1974,
M.W. HIRSCH, F. SMALE: Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra, Academic Press, 1974,

V.I. ARNOLD: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Springer, 1980,

F. VERHULST: Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems. Springer 1985.

Lehrbücher mit Zuschnitt auf Dynamische Systeme sind

L. PERKO: Differential Equations and Dynamical Systems. Springer, 1991.

S. WIGGINS: Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. Springer 1990

J.H. HUBBARD, B.H. WEST: Differential Equations: A Dynamical System Approach. Springer, 1995.

Immer wieder zitierte Klassiker sind

J. HALE: Ordinary Differential Equations, Wiley, 1969,

PH. HARTMANN: Ordinary Differential Equations, Wiley, 1964,

E.A. CODDINGTON, N.A. LEVINSON: Theory of Ordinary Differential Equations, Mc Graw Hill, 1955.

Recht elementar, mit einem sehr guten Überblick über diverse Anwendungen ist

M. BRAUN: Differentialgleichungen und ihre Anwendungen, Springer, 1979.

1.4 Systeme von Differentialgleichungen, Phasen- und Integralkurven

Gegeben ist jetzt ein stetig-differenzierbares $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit offenem $D \subset \mathbb{R}^n$. Mit einem Anfangswert $x_0 \in D$ lautet eine AWA

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0.$$

Aus der Theorie der gewöhnlichen DGLn¹ wissen wir, dass es eine eindeutige Lösung $u : J_u \rightarrow D$ in Form einer stetig-differenzierbaren vektorwertigen Funktion, definiert auf einem offenem Intervall J_u mit $0 \in J_u$, gibt, die

$$\dot{u}(t) = f(u(t)) \text{ für alle } t \in J_u$$

und $u(0) = x_0$ erfüllt. J_u kann auf Grund von Fortsetzungssätzen als maximal angesehen werden. WIRSCHING (Kap. 3.2) nennt eine solche Lösung u *maximal*.

Eine Lösung $u : J_u \rightarrow D$ der Differentialgleichung definiert einen *Weg* in D , dessen *Bogen*

$$\gamma := \{u(t) : t \in J_u\} \subset D$$

Phasenkurve (oder **Orbit**) und dessen Graph

$$\Gamma := \{(t, u(t)) : t \in J_u\} \subset J_u \times D$$

Integralkurve der Differentialgleichung heißt. Sehr wichtig ist die geometrische Tatsache, dass durch $f(u(t))$ ein Tangentialvektor an die Phasenkurve in $u(t)$ gegeben ist, während $(1, f(u(t)))$ ein Tangentialvektor an die Integralkurve in $(t, u(t))$ ist.

Unsere Differentialgleichung ist **autonom**, d.h. f hängt nur von $x \in D$ (nicht von t) ab, d.h. durch f ist ein Vektorfeld im **Phasenraum** D gegeben, das die Tangentialvektoren der Phasenkurven bestimmt. Im Fall $n = 2$ spricht man von einer **Phasenebene** und dem durch f gegebene *Richtungsfeld*.

Durch letztere Bemerkungen wird der *geometrische* Aspekt von Differentialgleichungen deutlich: Gegeben sind Vektorfelder, gesucht sind Kurven, deren Tangentialvektoren in ihren Punkten mit den Richtungen der Vektorfelder übereinstimmen.

Diese Begriffe sollen zunächst an Hand einfacher Modelle veranschaulicht und erläutert werden:

¹Existenz und Eindeigkeitssatz

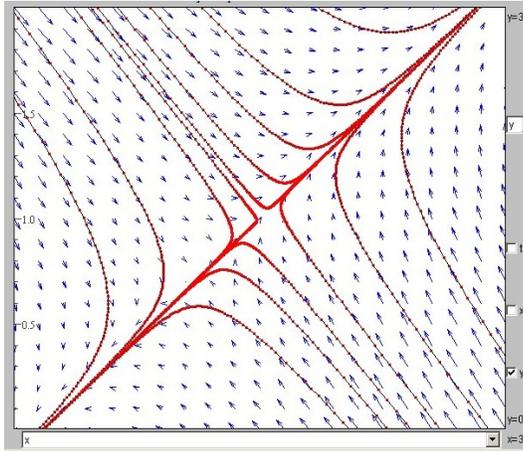


Abbildung 1.1: Phasenportrait des Rüstungsmodell mit Sattelpunkt

1.5 Modell eines Rüstungswettlaufs

Seien $x(t)$ und $y(t)$ die Rüstungsbestände zweier benachbarter Nationen zur Zeit t . Das folgende sehr einfache System (siehe BRAUN) versucht, die zeitliche Entwicklung in Abhängigkeit von psychologischen, wirtschaftlichen und nationalistischen Faktoren qualitativ zu beschreiben:

$$\dot{x} = -ax + by + r, \quad \dot{y} = cx - dy + s.$$

Dabei sind b, c rüstungsfördernde „Angstfaktoren“ (falls positiv), a, d rüstungshemmende wirtschaftliche Faktoren (falls positiv), und r, s „Tendenzfaktoren“, die bei nationalistischer Gesinnung positiv und bei Abrüstungsstimmung negativ sind.

Zur Klassifizierung: es handelt sich um ein lineares, inhomogenes System $\dot{x} = Ax + \beta$ mit $x = (x, y)$ und

$$A = \begin{pmatrix} -a & b \\ c & -d \end{pmatrix}, \quad \beta = (r, s)^T,$$

also um ein autonomes System ($f(x) = Ax + \beta$).

Wir wollen uns auf den Spezialfall

$$a = 2, b = 3, c = 5, d = 3, s = -2, r = -1$$

konzentrieren.

Das folgende Bild 1.1 zeigt einige Phasenkurven im Phasenraum zusammen mit dem Richtungsfeld:

Ein Gleichgewichtspunkt liegt bei $(1,1)$. Dieser verdient den Namen *Sattelpunkt*. Das Bild kann man besonders gut verstehen, wenn man Eigenwerte und -vektoren von A heranzieht (s.u.).

Das Bild 1.1 wurde mit Hilfe des Applets [ODE 2D Calculator](#) (Marek Rychlik, University of Alamos (Arizona)) erstellt.

Drei der AWe führen zu einem Abrüsten (bis hin zu negativen Rüstungsbeständen!!), die anderen beiden zu einem ungebremsten Aufrüsten. Der Gleichgewichtspunkt ist offensichtlich nicht stabil.

Das Richtungsfeld legt es nahe, den Phasenraum in vier Gebiete einzuteilen, je nachdem ob der Pfeil nach links (rechts) unten (oben) weist. Die Trenngeraden $g_i, i = 1, 2$ dieser Gebiete sind durch $\dot{x} = 0$, also $-ax + by + r = 0$ oder $y = 2/3x + 1/3$, bzw. durch $\dot{y} = 0$, also $cx - dy + s = 0$ oder $y = 5/3x - 2/3$ gegeben. Kreuzt eine Phasenkurve eine dieser Geraden, so findet ein qualitativer Wechsel im Rüstungsverhalten statt.

Noch wichtiger als diese beiden Geraden g_i scheint die Gerade (?) zu sein, die die Bereiche der AWe x_0 trennt, die zum Auf- bzw. zum Abrüsten führen.

Hierzu siehe Präsenzaufgaben des Arbeitsblattes 1. Sie zeigt, dass Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A , die das lineare System bestimmen, wichtig sind. Der Gleichgewichtspunkt ist hier ein Sattelpunkt, weil ein Eigenwert von A positiv, der andere negativ ist.

Für $a = 3, b = 2, c = 1, d = 2, r = s = 1$ ist das Rüstungsmodell qualitativ anders als das eben diskutierte Modell. Der Gleichgewichtspunkt ist wieder $(1, 1)$. Die Eigenwerte sind jedoch beide negativ ($\mu_1 = -1, \mu_2 = -4$, Eigenvektoren sind $(1, 1)$ und $(1, -2)$). Der Gleichgewichtspunkt ist daher *asymptotisch stabil*, d.h. es gilt

$$u(t, z_0) \rightarrow (1, 1) \quad \text{für } t \rightarrow \infty$$

für jeden Anfangspunkt z_0 .

Die Lösung der AWA mit der AB $x(0) = 6, y(0) = 9$ lautet

$$u(t) = (6e^{-t} - e^{-4t} + 1, 6e^{-t} + 2e^{-4t} + 1).$$

Bemerkung: Bei ebenen linearen Systemen ist $Spur(A) < 0$ und $Det(A) > 0$ eine notwendige und hinreichende Bedingung für asymptotische Stabilität. In beiden Fällen gilt $Spur(A) = -a - d < 0$, aber nur im zweiten Fall $Det(A) = ad - bc > 0$.

Wir fassen zusammen: Die Dynamik des linearen Systems $\dot{x} = Ax + b$ hängt auf das engste damit zusammen, ob der Gleichgewichtspunkt z , definiert durch $Az + b = 0$, stabil oder instabil ist. Hierfür sind die Eigenwerte von A verantwortlich. Die Eigenvektoren geben wichtige Richtungen an, die Geraden durch z definieren und das qualitative Bild des Phasenportraits bestimmen.

1.6 Nichtlineare Systeme

Viele Phänomene dynamischer Systeme sind ihrer Nichtlinearität zuzuschreiben.

1.6.1 Bemerkungen zu nichtlinearen Schwingungen

Von großem Interesse (weil noch nicht vollständig verstanden) sind **Nichtlineare Schwingungen**, z.B. durch DGLn

$$\ddot{x} + d(x)\dot{x} + D(x) = f(t)$$

gegeben, wo der Dämpfungskoeffizient $d(x)$ und die Rückstellkraft $D(x)$ nichtlinear von x abhängen können. $f(t)$ kann als äußere Anregung verstanden werden.

Klassische Beispiele hierfür sind die Schwingungsgleichung eines mathematischen Pendels

$$\ddot{x} + \frac{g}{l} \sin(x) = 0,$$

(es gibt ein Kontinuum von periodischen Lösungen), die von der Pol-Gleichung

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \varepsilon > 0$$

(es gibt einen stabilen Grenzzyklus) und der Duffing-Schwinger

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + c_1x + c_3x^3 = a \cos(\omega t)$$

(es gibt $2k\pi/\omega$ -periodische ($k \in \mathbb{N}$) und irreguläre (chaotische) Lösungen).

Zu dieser Klasse kann man auch die später behandelten mikroskopischen Verkehrsmodelle zählen. Das folgende Modell ist eine einfache Version, wenn ein Auto hinter einem anderen herfährt:

$$\ddot{x} = V(t + 1 - x) - \dot{x}, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0 > 0$$

mit der *Optimal-Geschwindigkeitsfunktion*

$$V(y) := v_{max} \frac{y^2}{a^2 + y^2},$$

der Maximalgeschwindigkeit v_{max} und Parameter $a > 0$. Dies ist allerdings ein nichtautonomes System! Das führende Fahrzeug fährt gemäß $h(t) := t + 1$, hat also konstante Geschwindigkeit 1 und befindet sich zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ eine LE vor dem nachfahrenden Fahrzeug.

Können Sie sich die Dynamik vorstellen? Siehe zwei Phasenkurven in Abb. 1.2, die sich wegen der Nichtautonomie natürlich schneiden dürfen.

1.6.2 Lotka–Volterra–System

Historisch interessant ist das System von Lotka (1925) – Volterra (1931)

$$\dot{x} = ax - bxy, \quad \dot{y} = cxy - dy.$$

($a, b, c, d > 0$ sind gegebene Konstanten, $x(t)$ = Beute-, $y(t)$ =Räuberpopulationsdichte).

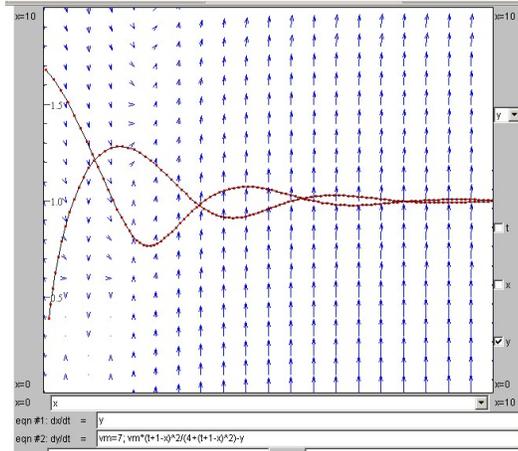


Abbildung 1.2: Simplex Verkehrmodell

Es gibt zwei Gleichgewichtspunkte, nämlich $(0, 0)$ und $(d/c, a/b)$. Aufschluss gibt das Richtungsfeld, wobei die durch $\dot{x} = 0$ und $\dot{y} = 0$ definierten Geraden wichtig sind (Zeichnung!). Siehe ein Phasenportrait in Abb.1.3, in der Sie die eben erwähnten Geraden einzeichnen sollten.

Es zeigt sich, dass die im positiven Quadranten verlaufenden Phasenkurven geschlossen sind, dass also alle Lösungen von AWAn mit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^2$ periodisch sind. Das sieht man so ein:

Aus den DGLn folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}(t)}{x(t)}(d - cx(t)) + \frac{\dot{y}(t)}{y(t)}(a - by(t)) &\equiv 0, \\ \dot{x}(t)\left(\frac{d}{x(t)} - c\right) + \dot{y}(t)\left(\frac{a}{y(t)} - b\right) &\equiv 0, \\ \frac{d}{dt} [(d \log x(t) - cx(t)) + (a \log y(t) - by(t))] &\equiv 0, \\ d \log x(t) - cx(t) + a \log y(t) - by(t) &\equiv konst. \end{aligned}$$

Setze $H(x, y) := d \log x - cx + a \log y - by, H : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Satz 1.1. Sei $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^2$. Jede durch (x_0, y_0) verlaufende Phasenkurve $\gamma = \{(x(t), y(t)) : t \in J_u\}$ liegt auf einer (geschlossenen) Höhenlinie von H zum Niveau $H(x_0, y_0)$.

Man kann mit Hilfe eines Fortsetzungssatzes für Systeme noch mehr zeigen: Jede dieser Lösungen ist periodisch (also insbesondere global), die Phasenkurven sind mit den Höhenlinien von H identisch (falls $u(t) \rightarrow z$ für $t \rightarrow \infty$, muss z ein Gleichgewichtspunkt sein). Siehe auch WIRSCHING, Lemma 4.4.

Ausgangspunkt der Untersuchungen von Lotka war der Fischfang im Mittelmeer während des 1. Weltkrieges. Es waren weniger Fischerboote als zu Friedenszeiten auf Fischfang, bei den

(wenigen) Fischfängen wurde mehr ungenießbarer Raubfisch (Hai) gefangen, während der Anteil der anderen (Speise-) Fische niedriger lag als in Friedenszeiten.

Eine Erklärung gelingt mit Hilfe des Lotka–Volterra–Systems:

Zunächst kann gezeigt werden, dass die mittleren Populationsdichten durch den Gleichgewichtspunkt gegeben sind (s. auch WIRSCHING, Folgerung 4.5):

Lemma 1.2. *Sei $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}_+^2$ eine T -periodische Lösung. Dann gilt*

$$\frac{d}{c} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, \quad \frac{a}{b} = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt.$$

Beweis: Zeige die erste Behauptung. Sie ist äquivalent mit

$$\int_0^T (cx(t) - d) dt = 0,$$

diese mit

$$\int_0^T \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} dt = 0,$$

diese mit

$$\log y(T) - \log y(0) = 0. \quad \blacksquare$$

Also gilt es, die Auswirkung der Verkleinerung von $a \rightarrow a - \delta$ und der Vergrößerung von $d \rightarrow d + \varepsilon$ durch zunehmenden Fischfang auf den Gleichgewichtspunkt zu studieren ($\delta, \varepsilon > 0$). Für den neuen Gleichgewichtspunkt gilt:

$$\bar{x} = \frac{d + \varepsilon}{c} > \frac{d}{c},$$

$$\bar{y} = \frac{a - \delta}{b} < \frac{a}{b},$$

d.h. es gibt durch Fischfang mehr (!) Beutefische und weniger Raubfische. Siehe auch WIRSCHING, Lemma 4.6.

1.6.3 Weitere Räuber–Beute–Systeme

Das Lotka–Volterra–System war Startpunkt für die Untersuchung anderer Räuber–Beute–Systeme. Die Existenz eines Kontinuums von periodischen Lösungen ist nicht typisch und auch nicht gegeben, wenn man sinnvolle Modifikationen vornimmt:

So sollte die Wachstumsrate der Beute (ohne Räuber) einem logistischen Wachstum genügen (innerspezifische Konkurrenz). Auch die durch das Beutemachen bedingten Wachstumsterme $-bxy$ und cxy sind unrealistisch, unterstellen sie doch, dass die Räuberspezies eine Wachstumsrate proportional zur Populationsdichte der Beute besitzt. Realistischer ist da ein Ansatz, der x durch $\frac{ax}{b+x}$ ersetzt (Michaelis–Menten oder Holling–Gesetz). Dies führt auf folgendes System:

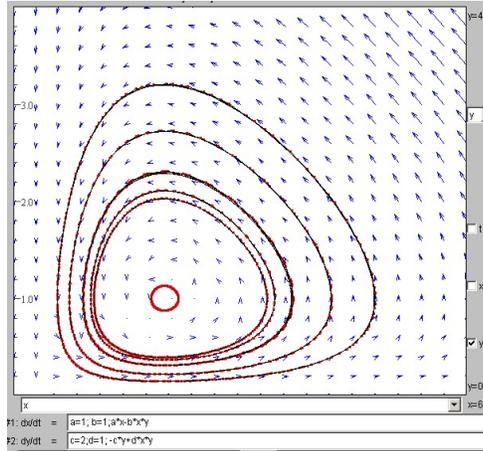


Abbildung 1.3: Phasenportrait des Lotka-Volterramodells ($a = 1, b = 1, c = 2, d = 1$)

$$\dot{x} = x \left[r \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{ay}{b+x} \right],$$

$$\dot{y} = y \left[e \frac{ax}{b+x} - d \right].$$

Siehe Übungsaufgabe 2.

1.6.4 Chemische Reaktionen

Der russische Nobelpreisträger für Chemie von 1977, ILYA PRIGOGINE, 1917-2003, hat 1971 zusammen mit Mitarbeitern ein sehr einfaches (hypothetisches!) Modell erstellt, das in seinem dynamischen Verhalten für chemische Reaktionen, bei denen selbsterregte Oszillationen auftreten, typisch sein soll. Die Reaktion



mit zeitlich konstanten „Produkten“ A, B, D, E und zeitlich veränderlichen Produkten X, Y kann man in ein ebenes DGL-Problem (mit $x := X, y := Y$)

$$\dot{x} = A - (B + 1)x + x^2y, \quad \dot{y} = Bx - x^2y$$

übersetzen, welches kurz „Brusselator“ heißt, weil es in Brüssel entdeckt wurde. Dieses System hat den Gleichgewichtspunkt $x_0 = A, y_0 = \frac{B}{A}$. Es besitzt periodische Lösungen, die von einem *Hopfverzweigungspunkt* abzweigen (s. ausführlicher in Kap. 5.4.1).

1.6.5 Konjunkturmodelle in der Volkswirtschaft

Hier wird versucht, das Auf und Ab der Konjunktur in geschlossenen Volkswirtschaften durch die Existenz von stabilen periodischen Orbits in ebenen autonomen Systemen, interpretiert als Konjunkturzyklen, zu erklären.

Kaldor's Modell

Zustandsvariable sind hier Y , das nationale Einkommen (Bruttosozialprodukt), und das Gesamtvermögen K . Das System lautet

$$\dot{Y} = \alpha(I(Y, K) - S(Y, K)), \quad \dot{K} = I(Y, K),$$

mit einer nichtlinearen (Netto-) Investitionsfunktion $I(Y, K)$ (investment) und Sparfunktion $S(Y, K)$ (saving). Der Parameter α erfasst die Geschwindigkeit, mit der sich die Volkswirtschaft den neuen Gegebenheiten anpasst. Die zweite DGL besagt, dass

$$K(t) = \int_0^t I(Y(s), K(s)) ds.$$

Natürlich gibt es nur qualitative Erkenntnisse über die beiden Funktionen I und S , z.B. $I_Y > 0$ (mehr Einkommen führt zu mehr Investition), $I_K < 0$ (Anschaffung von Sachwerten mindern die Investition), $S_Y > 0$ (mehr Einkommen führt zu mehr Spareinlagen) und $S_K < 0$ (Anschaffung von Sachwerten vermindert die Spareinlagen), u.a.

Literatur: CHANG, SMYTH, Review of economic studies, 1970.

Keynesianische Modelle

Zustandsvariable sind hier Y , das nationale Einkommen und R , der Zinssatz (rate of interest). Das System lautet

$$\dot{Y} = \alpha(I(Y, R) - S(Y, R)), \quad \dot{R} = \beta(L(Y, R) - L_s),$$

mit einer nichtlinearen (Netto-) Investitionsfunktion $I(Y, R)$ (investment), Sparfunktion $S(Y, R)$ (saving), einer Nachfrage $L(Y, R)$ nach Geld und einer konstanten Zufuhr L_s von Geld. Die Parameter α und β erfassen die Geschwindigkeit, mit der sich die Volkswirtschaft den neuen Gegebenheiten anpasst.

Hier gelten die qualitativen Annahmen $I_Y > 0$ (s.o.), $I_R < 0$ (höhere Zinsen mindern die Investition), $S_Y > 0$ (s.o.), $S_R > 0$ (höhere Zinsen mehren die Spareinlagen), $L_Y > 0$ und $L_R < 0$.

Literatur: TORRE, Econometrica, 1977.

1.7 Differentialgleichung der Phasenkurven

Sei ein ebenes autonomes System

$$\dot{x} = f(x, y), \quad x(0) = x_0,$$

$$\dot{y} = g(x, y), \quad y(0) = y_0$$

gegeben. Falls eine Lösung $(x(t), y(t))$ existiert, so dass die Phasenkurve als Graph einer Funktion Y dargestellt werden kann,

$$y(t) = Y(x(t)),$$

so gilt (Anwendung der Kettenregel!) die Differentialgleichung

$$Y' \cdot f(x, Y) = g(x, Y), \quad Y(x_0) = y_0.$$

Ist $f(x_0, y_0) \neq 0$ (was OBdA angenommen werden kann, wenn (x_0, y_0) kein Gleichgewichtspunkt ist), so liefert eine Lösung der AWA

$$Y' = \frac{g(x, Y)}{f(x, Y)}, \quad Y(x_0) = y_0 \tag{1.2}$$

ein durch x parametrisierbares Stück der Phasenkurve um (x_0, y_0) .

(1.2) kann u.U. durch Trennung der Variablen gelöst werden. (1.2) heißt Differentialgleichung der Phasenkurven.

Kapitel 2

Dynamische Systeme

In diesem Kapitel wird die Theorie gewöhnlicher DGLn unter dem Gesichtspunkt dynamischer Systeme rekapituliert.

Gegeben ist wieder eine Anfangswertaufgabe für ein autonomes System von n Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0 \quad (2.1)$$

mit den üblichen Voraussetzungen an $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ (stetige Differenzierbarkeit $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$), und an $D (\subset \mathbb{R}^n$ offen), mit $x_0 \in D$.

Wir wissen, dass es eine eindeutige, nicht fortsetzbare (maximale) Lösung $u : J(x_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit (maximalem) Existenzintervall $J(x_0)$ gibt.

Hier interessiert u.a. die Abhängigkeit der Lösung u (und $J(x_0)$) von x_0 . Daher schreiben wir

$$u(t) =: \varphi(t, x_0) \text{ (oder } u(t) = \varphi^t(x_0)), \quad t \in J(x_0) =: (t^-(x_0), t^+(x_0)).$$

2.1 Fluss eines autonomen Systems

Als erstes Resultat, das die *Autonomie* widerspiegelt, notieren wir:

Lemma 2.1. *Ist $u(t)$ eine Lösung von $\dot{x} = f(x)$, so auch $v(t) := u(t - c)$, wobei $c \in \mathbb{R}$ beliebig ist. (Man sagt, v geht aus u durch eine **Phasenverschiebung** um die **Phase** c hervor).*

Bemerkung: Ist $c > 0$, so geht der Graph von $v(t) := u(t - c)$ aus dem von $u(t)$ durch Verschiebung um c Einheiten nach *rechts* hervor.

Wir nennen $\varphi : D_\varphi \rightarrow D$ den **Fluss** des autonomen Systems $\dot{x} = f(x)$, wobei

$$D_\varphi := \{(t, x) : x \in D, t \in J(x)\}.$$

Man kann sich den Fluss veranschaulichen, indem man verschiedene *Zustände* $x_0 \in D$ gleichzeitig in den Blick nimmt und die Veränderung dieser Zustände im Laufe der Zeit t betrachtet. In WIRSCHING wird dieser Fluss *lokaler Fluss* genannt.

Nach Konstruktion ist der Fluss φ nach t stetig-differenzierbar mit

$$\varphi_t(t, x) \left(:= \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x) \right) = f(\varphi(t, x)).$$

Anders ausgedrückt: Das Vektorfeld f der rechten Seite des autonomen Systems kann auch als *Geschwindigkeitsvektorfeld* des Flusses interpretiert werden.

Bem.: In WIRSCHING, Kap. 8.2., wird ein (allgemeines) dynamisches System definiert. Autonome Systeme definieren ein solches (Lemma 8.1) mit der Gruppe $(\mathbb{R}, +)$. Der Fluss wird dort mit Φ bezeichnet, das Vektorfeld f wird als Index angehängt, um die Abhängigkeit des Flusses von ihm zu kennzeichnen.

2.1.1 Eigenschaften des Flusses

Satz 2.2. *Für den Fluss*

$$\varphi : D_\varphi = \{(t, x) : x \in D, t \in J(x)\} \rightarrow D$$

des autonomen Systems (2.1) gelten die folgenden Eigenschaften

$$D_\varphi \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \text{ ist offen,} \tag{2.2}$$

$$\varphi : D_\varphi \rightarrow D \text{ ist stetig-differenzierbar} \tag{2.3}$$

$$\{0\} \times D \subset D_\varphi, \quad \varphi(0, x) = x \text{ für alle } x \in D, \tag{2.4}$$

$$x \in D, t \in J(x), s \in J(\varphi(t, x)) \implies s + t \in J(x), \quad \varphi(s + t, x) = \varphi(s, \varphi(t, x)). \tag{2.5}$$

Beweis: Während (2.2) und (2.3) tiefliegender sind (und hier nicht bewiesen werden, s. aber Kap. 3), sind die letzten beiden Behauptungen vergleichsweise trivial. Zum Beweis von (2.5) geht die Autonomie des Systems $\dot{x} = f(x)$ (s. Lemma 2.1) und

$$J(\varphi(t, x)) = J(x) - \{t\}$$

ein.

Zunächst sollte

$$t \in J(x) \implies -t \in J(\varphi(t, x)), \quad \varphi(-t, \varphi(t, x)) = x$$

gezeigt werden. ■

Bem. Wenn man $J(x) = \mathbb{R}$ für alle $x \in D$ annimmt, so sind $\varphi^t := \varphi(t, \cdot)$ für alle t Diffeomorphismen von D . Für $t = 0$ erhält man die Identität. Die letzte Eigenschaft eines Flusses kann man dann kurz mit $\varphi^{s+t} = \varphi^t \circ \varphi^s$ schreiben und den Diffeo φ^{s+t} als Verkettung der Diffeos φ^s und φ^t deuten.

2.1.2 Dynamisches System

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, offene Menge. Jedem $x \in D$ sei ein offenes Intervall $J(x)$ mit $0 \in J(x)$ zugeordnet. Eine Abbildung

$$\varphi : D_\varphi := \{(t, x) : x \in D, t \in J(x)\} \rightarrow D$$

mit den Eigenschaften von Satz 2.2 heißt (kontinuierliches) **dynamisches System** auf D .

In diesem Sinne ist der Fluss eines autonomen Systems mit stetig-differenzierbaren Vektorfeld ein dynamisches System. Aber umgekehrt definiert ein dynamisches System φ ein (Geschwindigkeits-) Vektorfeld

$$f(x) := \varphi_t(0, x)$$

auf D , und man kann leicht mit Hilfe von (2.5) zeigen, dass φ der Fluss des zugehörigen autonomen Systems ist, d.h. dass gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, x) = f(\varphi(t, x)).$$

f heißt auch *infinitesimaler Generator* des Flusses, siehe Def. 8.7 in WIRSCHING. Insbesondere ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ infinitesimaler Generator von e^{tA} .

Wir werden Flüsse und dynamische Systeme nicht unterscheiden; Jedoch beachte man, dass das Konzept eines dynamischen Systems verallgemeinerungsfähig ist, wenn der Zustandsraum etwa durch eine Mannigfaltigkeit oder der kontinuierliche Zeitbereich \mathbb{R} z.B. durch die ganzen Zahlen \mathbb{Z} oder durch \mathbb{N}_0 ersetzt wird (\rightarrow *diskretes dynamisches System*).

Ich werde in nachfolgenden Erweiterungen stillschweigend die Konzepte von kontinuierlichen dynamischen Systemen wie Stabilität, Attraktivität etc. auch auf diskrete dynamische Systeme als gegeben ansehen, siehe Kap. 3.3.2.

2.1.3 Der Fluss für lineare autonome Systeme

Im Falle eines linearen autonomen Systems $\dot{x} = Ax$ mit einer (konstanten) Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ist $D = \mathbb{R}^n$ und $J(x) = \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ sowie

$$\varphi(t, x) = e^{tA}x.$$

Der Fluss ist in x linear. Man verifiziere Satz 2.2. Siehe Beispiel 8.1 in WIRSCHING.

2.1.4 Bahnen, Phasenraum

Durch die im **Zustandsraum (Phasenraum)** D verlaufende **Bahnen (Phasenkurven, Trajektorien, Orbits)**

$$\gamma(x_0) := \{\varphi(t, x_0) : t \in J(x_0)\}$$

erhält man Abbilder der durch x_0 „initiierten“ zeitlichen Abläufe (Die **Flusslinie** $\varphi(\cdot, x_0)$ parametrisiert $\gamma(x_0)$). Siehe Def. 8.5 in WIRSCHING.

Satz 2.3. *Durch jedes $x \in D$ verläuft genau eine Bahn, nämlich $\gamma(x)$. (Der Phasenraum D ist die disjunkte Vereinigung von Bahnen, vgl. mit Lemma 8.2 in WIRSCHING, wo aus $\gamma(x) \cap \gamma(y) \neq \emptyset$ gefolgert wird, dass $\gamma(x) = \gamma(y)$).*

Ist $f(x) \neq 0$, so ist $f(x)$ Tangentialvektor an $\gamma(x)$.

Beweis: Mit Hilfe der Halbgruppeneigenschaft (2.5) von Satz 2.2 zeigt man, dass $y \in \gamma(x)$ genau dann, wenn $\gamma(x) = \gamma(y)$. ■

Eine „typische“ Auswahl disjunkter Phasenkurven heißt **Phasenportrait**.

Manchmal interessiert man sich nur für die Zukunft. Dann ist der **positive Halborbit**

$$\gamma^+(x) := \{\varphi(t, x) : t \in [0, t^+(x))\}$$

von Interesse. Betrachtet man den Fluss φ nur für $t \geq 0$ spricht man von einem **Halbfluss**.

Besonders einfache Gestalt haben Phasenkurven von skalaren, autonomen Differentialgleichungen. Sie bestehen stets aus von Gleichgewichtspunkten (s.u.) begrenzten Intervallen oder aus den Gleichgewichtspunkten selbst.

2.1.5 Bemerkungen

AMANN verwendet die Notation

$$t \cdot x := \varphi(t, x),$$

um auszudrücken, dass die Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ auf dem Zustandsraum operiert. Die Eigenschaft (2.5) liest sich jetzt als

$$(s + t) \cdot x = s \cdot (t \cdot x)$$

und besagt, dass der Addition zweier Gruppenelemente s und t der Verknüpfung von Abbildungen von D in sich entspricht. Man spricht von einer **Darstellung** der additiven Gruppe \mathbb{R} . Bei Halbflüssen haben wir es nur noch mit Halbgruppen zu tun.

Bei diskreten dynamischen Systemen tritt die Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ der ganzen Zahlen an die Stelle von $(\mathbb{R}, +)$, bei Halbflüssen kommt die Halbgruppe $(\mathbb{N}_0, +)$ an Stelle von $(\mathbb{R}_+, +)$ ins Spiel.

Zuweilen wird auch die Schreibweise $\varphi^t(x)$ an Stelle von $\varphi(t, x)$ verwendet. Dann erinnert (2.5)

$$\varphi^{s+t}(x) = \varphi^s(\varphi^t(x))$$

an Potenzgesetze, was wegen

$$\varphi^t(x) = e^{At}x$$

im Fall linearer Systeme auch gerechtfertigt ist.

Darüberhinaus wird im Falle diskreter dynamischer Systeme unter φ^t die t -fache Hintereinanderausführung der Abbildung $g = \varphi^1$ mit $t \in \mathbb{N}$ verstanden.

2.2 Gleichgewichtspunkte

Eine Nullstelle von f des Systems $\dot{x} = f(x)$ heißt **Gleichgewichtspunkt (Ruhepunkt)** (auch *kritischer Punkt*) des autonomen Systems, bzw. **Fixpunkt (kritischer Punkt)** des zugehörigen Flusses φ .

Offensichtlich gilt $f(x) = 0$ genau dann, wenn $J(x) = \mathbb{R}$ und $\varphi(t, x) = x$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Ferner ist $f(x) = 0$ äquivalent mit $\gamma(x) = \{x\}$.

2.2.1 Stabilität, Attraktivität

Ein Gleichgewichtspunkt $x_0 \in D$ heißt (lokal) **attraktiv** genau dann, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass für alle $x \in K(x_0, \varepsilon)$ gilt

$$t^+(x) = +\infty, \quad \varphi(t, x) \rightarrow x_0 \text{ für } t \rightarrow +\infty. \quad (2.6)$$

Er heißt global (auf D) attraktiv, falls (2.6) für alle $x \in D$ gilt.

x_0 heißt **stabil**, genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in K(x_0, \delta)$ gilt $t^+(x) = +\infty$ und der positive Halborbit $\gamma^+(x)$ die ε -Umgebung $K(x_0, \varepsilon)$ nicht verläßt:

$$\|\varphi(t, x) - x_0\| \leq \varepsilon \text{ für alle } t \geq 0.$$

Ein nicht stabiler Gleichgewichtspunkt heißt **instabil**.

Der Gleichgewichtspunkt x_0 heißt (lokal, global) **asymptotisch stabil** genau dann, wenn er stabil und (lokal, global) attraktiv ist.

Entsprechende Definitionen finden sich in WIRSCHING unter Def. 4.7, 4.8, also vor den dort eingeführten Begriffen *Fluss*, *dynamisches System*.

Als einfaches Beispiel sei an die (skalare) logistische DGL

$$\dot{x} = a \left(1 - \frac{x}{K}\right) x, \quad (a, K > 0)$$

erinnert. An der allgemeinen Lösung kann man direkt erkennen, dass $x_0 = K$ asymptotisch stabil und $x_0 = 0$ instabil ist.

Es gibt ein Beispiel in der Ebene eines instabilen, aber global attraktiven Gleichgewichtspunkts. Siehe AMANN, S. 221, bzw. HAHN.

Beispiele für lokal, aber nicht global asymptotisch stabile Gleichgewichtspunkte finden sich nur bei *nichtlinearen* Systemen, z.B. wenn es mehrere Gleichgewichtspunkte gibt.

Mit Hilfe von Phasenportraits kann man die Stabilität von Gleichgewichtspunkten sehr schön visualisieren.

2.2.2 Autonome lineare Systeme

Im Falle eines linearen autonomen Systems $\dot{x} = Ax$ mit einer (konstanten) Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ist $x_0 = 0$ ein Gleichgewichtspunkt (und der einzige, falls A regulär ist). Es gilt der wichtige

Satz 2.4. *a) $x_0 = 0$ ist (global) asymptotisch stabil genau dann, wenn alle Eigenwerte von A negativen Realteil haben.*

b) Gibt es einen Eigenwert von A mit positivem Realteil, so ist $x_0 = 0$ instabil.

c) Haben alle Eigenwerte von A nicht-positiven Realteil, so ist $x_0 = 0$ stabil genau dann, wenn diejenigen Eigenwerte mit Realteil Null halbeinfach sind.

Beweis: Man kann sich auf Lösungen in Gestalt von Real- oder Imaginärteilen von $e^{\lambda t}u$ mit Eigenwerten λ und zugehörigen Eigenvektoren u beschränken, wenn A diagonalisierbar ist, also nur halbeinfache Eigenwerte besitzt. Wenn A nicht diagonalisierbar ist, also „Jordanentartungen“ besitzt, muss man auch Lösungen der Form

$$e^{\lambda t}(u_m + tu_{m-1} + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}u_1)$$

mit Eigenvektor u_1 und Hauptvektoren u_j der Stufe $j, j = 2, \dots, m$ zum Eigenwert λ von A betrachten. ■

Vgl. hierzu Satz 6.8 in WIRSCHING. Man sollte sich das dortige Kap. 6 (Autonome lineare Systeme) vergegenwärtigen!

Matrizen, deren Eigenwerte sämtlichst negativen Realteil haben, also in der linken komplexen Halbebene liegen, heißen **stabil**.

Eine sehr wichtige Frage ist, wie man leichter als durch Berechnung aller Eigenwerte die Stabilität von Matrizen feststellen kann, s. *Routh-Hurwitz-Kriterium* in HAHN. Für $n = 2$ lautet dieses Kriterium $Spur(A) < 0$ und $Det(A) > 0$. Dies sieht man sofort ein, wenn man berücksichtigt, dass die Spur einer Matrix die Summe und die Determinante das Produkt aller Eigenwerte ist, was wiederum aus den Vietaschen Wurzelsätzen folgt.

Man kann und muss sich fragen, wie sich diese Aussage auf nichtlineare Systeme überträgt, wenn A durch die Linearisierung von f im Gleichgewichtspunkt x_0 ersetzt wird, wenn also $A = Df(x_0)$ betrachtet wird. Siehe *Prinzip der linearisierten Stabilität* in Kap. 3.

An dieser Stelle werden noch einmal die Phasenportraits zwei-dimensionaler linearer autonomer Systeme in der Nähe des Ursprungs mit den Begriffen **Knoten**, **Strudel**, **Wirbel**, **Sattel** (u.a.) unter Berücksichtigung von Stabilität diskutiert, s. Abb. 2.1.

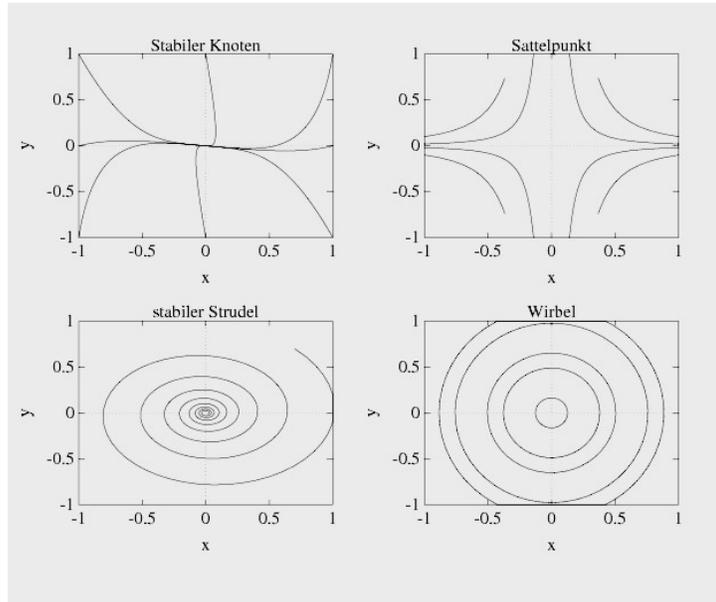


Abbildung 2.1: Knoten, Sattel, Strudel, Wirbel

2.3 Periodische Orbits

Ein Punkt $x \in D$ heißt periodischer Punkt des dynamischen Systems φ , bzw. des autonomen Systems $\dot{x} = f(x)$, falls x kein Gleichgewichtspunkt ist und es eine **Periode** $T > 0$ gibt mit

$$\varphi(T, x) = x.$$

Periodische Punkte besitzen eine kleinste positive (Fundamental-) **Periode** T . Für sie ist $t^+(x) = +\infty$, $t^-(x) = -\infty$. Meist ist diese Minimalperiode T gemeint, wenn man von T -Periodizität spricht.

Für periodische Punkte x ist der Orbit $\gamma(x)$ eine kompakte geschlossene Kurve (und gleich dem zugehörigen Halborbit). Es gilt auch die Umkehrung! Jeder Punkt dieses Orbits ist selbst periodisch mit derselben Periode T wie x . Daher heißt $\gamma(x)$ auch **periodischer Orbit** der Periode T .

Die Begriffe Attraktivität und (asymptotische) Stabilität können von Gleichgewichtspunkten auf periodische Orbits (und in gleicher Weise auf beliebige Mengen) übertragen werden, s. Kap. 2.4.

Ein klassisches Beispiel für einen periodischen Orbit bei einem autonomen System liefert die *van der Pol [1920] Gleichung*

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \quad \varepsilon > 0,$$

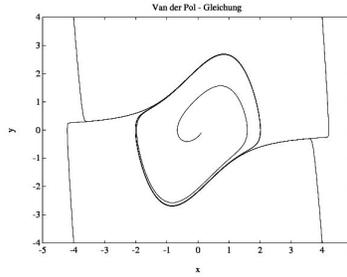


Abbildung 2.2: Phasenkurven für die van der Pol Gleichung

die die Dynamik eines elektrischen Schwingkreises mit einer Triode beschreibt (s. Abb. 2.2).

Periodische Lösungen von Differentialgleichungen treten in besonderem Maße bei nichtautonomen Systemen auf, z.B. bei *periodischen Anregungen (erzwungenen Schwingungen)* oder allgemeiner beim Auftreten periodischer Koeffizienten, wie von linearen zeitvarianten Systemen

$$\dot{x} = A(t)x + g(t), \quad A(t + T) = A(t), g(t + T) = g(t).$$

Hierzu ist eine gesonderte Stabilitätstheorie nötig (*Floquet-Theorie*). Wir werden uns jedoch vor allem mit „selbsterregten“ Oszillationen beschäftigen, also mit periodischen Orbits bei autonomen Systemen.

2.4 Invarianz, Stabilität und Attraktivität von Mengen

Im folgenden werden gewisse Eigenschaften für *beliebige* Teilmengen M von D definiert, auch wenn man sich z.T. auf kompakte Teilmengen, oder gar auf Gleichgewichtspunkte oder periodische Orbits beschränken kann und zunächst auch sollte. Die nachfolgenden Definitionen (z.B. die für einen Attraktor) sind in der Literatur nicht einheitlich.

2.4.1 Invarianz

Eine Menge $M \subset D$ heißt (positiv) **invariant** genau dann, wenn

$$t^+(x) = +\infty, \varphi(t, x) \in M \text{ für alle } x \in M, t \geq 0,$$

kurz, wenn

$$\varphi(t, M) \subset M \text{ für alle } t \geq 0.$$

Entsprechend wird *negative Invarianz* definiert. Im folgenden verstehe ich unter *Invarianz* stets die positive Invarianz, wenn nicht anders vermerkt (wie auch in WIRSCHING, Def. 9.1). Dies wird in der Literatur aber nicht einheitlich gehandhabt.

M heißt **stark invariant** genau dann, wenn M invariant und

$$\varphi(t, M) = M \text{ für alle } t \geq 0.$$

Beispiele für invariante Mengen sind beliebige Halborbis $\gamma^+(x)$, falls $t^+(x) = +\infty$.

Beispiele für stark invariante Mengen sind Gleichgewichtspunkte und periodische Orbits (s.u.)

2.4.2 Attraktoren

Seien $U, M \subset \mathbb{R}^n$. Dann heißt U **Umgebung von M** , falls es eine offene Menge B gibt mit $M \subset B \subset U$.

Für Folgen (x_k) in \mathbb{R}^n sagt man

$$x_k \rightarrow M \text{ für } k \rightarrow \infty,$$

falls es zu jeder Umgebung U von M ein k_0 gibt mit $x_k \in U$ für alle $k > k_0$.

Führt man den Abstand $d(x, M) := \inf_{m \in M} \|m - x\|$ ein, so ist $x_k \rightarrow M$ gleichwertig mit $d(x_k, M) \rightarrow 0$ (wenn M kompakt!).

Entsprechend sind auch allgemeinere Grenzwerte, wie z.B. $\varphi(t, x) \rightarrow M$ für $t \rightarrow \infty$ erklärt:

Man sagt (s. Def. 9.2 in WIRSCHING): x wird von M **angezogen**, wenn $t_+(x) = \infty$ und $\varphi(t, x) \rightarrow M$ für $t \rightarrow \infty$, bzw. wenn

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, x), M) = 0.$$

Alle Punkte aus D , die von M angezogen werden, bilden den **Anziehungsbereich von M** (auch $\text{Inset}(M)$ genannt).

M (z.B. ein periodischer Orbit) heißt **attraktiv**, falls es eine Umgebung U von M gibt, die im Anziehungsbereich von M liegt, d.h. für die gilt

$$t^+(x) = +\infty, \varphi(t, x) \rightarrow M \text{ für alle } x \in U.$$

Eine attraktive Menge heißt **Attraktor**.

(In der Literatur werden einem Attraktor z.T. weitere Eigenschaften wie kompakt, invariant, stark invariant, stabil, etc. zugewiesen. Oder es wird Attraktor als stabile ω -Limesmenge definiert. In WIRSCHING, Def. 9.3, wird $M \subset \varphi(t, M)$ für genügend große t verlangt, eine Art starke Invarianzeigenschaft.)

M heißt **stabil**, wenn es zu jeder Umgebung U_1 von M eine Umgebung U_2 von M gibt mit: Für alle $x \in U_2$ gilt $t^+(x) = +\infty$ und $\varphi(t, x) \in U_1$ für alle $t \geq 0$.

M heißt **asymptotisch stabil**, falls M attraktiv und stabil ist.

Ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt ist ein *Punktattraktor*.

Ein attraktiver periodischer Orbit ist ein *periodischer Attraktor*.

Die Begriffe *attraktiv* und *asymptotisch stabil* sind lokal zu verstehen. Sie erhalten den Zusatz **global** auf D , wenn in der Definition für attraktiv, $U = D$ gewählt werden kann. In diesem Sinne spricht man auch von einem **globalen Attraktor**.

Stabilitätskriterien für periodische Orbits sind komplizierter als für Gleichgewichtspunkte. Man kann sich hierbei auf Stabilitätskriterien für Fixpunkte nichtlinearer diskreter dynamischer Systeme beziehen. Denn x ist ein periodischer Punkt von φ mit Periode $T > 0$ genau dann, wenn x ein Fixpunkt von $\varphi(T, \cdot)$ ist.

2.5 Limesmengen

Bei der Untersuchung von *Limesmengen* interessiert man sich für das *langfristige Verhalten* der Lösungen von Differentialgleichungen.

Die ω -**Limesmenge** zum Ausgangspunkt $x \in D$ mit $t^+(x) = +\infty$ ist durch

$$\mathcal{L}_\omega(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : \exists(t_k) \rightarrow +\infty : \varphi(t_k, x) \rightarrow y\} \quad (2.7)$$

definiert. ω , der letzte Buchstabe des griechischen Alphabets kennzeichnet die auf die Zukunft gerichtete Betrachtungsweise. Entsprechend ist im Falle $t^-(x) = -\infty$

$$\mathcal{L}_\alpha(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : \exists(t_k) \rightarrow -\infty : \varphi(t_k, x) \rightarrow y\} \quad (2.8)$$

definiert. Vgl. mit der etwas allgemeineren Def. 9.4 in WIRSCHING und dem dortigen Lemma 9.5.

Andere Schreibweise: $\omega(x)$ an Stelle von $\mathcal{L}_\omega(x)$.

Man erkennt sofort, dass $\mathcal{L}_\omega(x) = \mathcal{L}_\omega(y)$, falls $y \in \gamma(x)$, d.h. dass die Limesmenge $\mathcal{L}_\omega(x)$ eigentlich nur vom Orbit $\gamma(x)$ abhängt.

Ist $x \in D$ ein Gleichgewichtspunkt, so gilt natürlich $\mathcal{L}_\omega(x) = \{x\}$. Ist x asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt, so gibt es eine Umgebung U von x mit $\mathcal{L}_\omega(y) = \{x\}$ für alle $y \in U$.

Ist x ein periodischer Punkt, so gilt $\mathcal{L}_\omega(x) = \gamma(x)$.

Aus dem folgenden Satz können weitere Schlüsse gezogen werden:

Satz 2.5. *Sei für ein $x \in D$ der Halborbit $\gamma^+(x)$ relativ kompakt in D , d.h. enthalten in einer kompakten Teilmenge K von D . Dann ist $\mathcal{L}_\omega(x)$ nichtleer, kompakt, (positiv und negativ) invariant und zusammenhängend.*

Ferner ist $M = \mathcal{L}_\omega(x)$ kleinste kompakte Menge mit der Eigenschaft

$$\varphi(t, x) \rightarrow M \quad \text{für } t \rightarrow +\infty.$$

Beweis: Wegen der relativen Kompaktheit von $\gamma^+(x)$ ist $t^+(x) = +\infty$, da es keine endlichen Entweichzeiten geben kann (die Trajektorie müsste sonst den Rand von D erreichen). Dass $\mathcal{L}_\omega(x)$ nichtleer, folgt aus dem Satz von Bolzano-Weierstraß. $\mathcal{L}_\omega(x)$ ist Teilmenge von K , also beschränkt. Daher ist $\mathcal{L}_\omega(x)$ kompakt genau dann, wenn $\mathcal{L}_\omega(x)$ abgeschlossen ist, was nicht ganz so einfach zu sehen ist:

Sei $y = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k, x_k \in \mathcal{L}_\omega(x)$. Zu jedem k gibt es

$$t_k \geq k, \text{ mit } \|\varphi(t_k, x) - x_k\| < 1/k.$$

Es folgt $y \in \mathcal{L}_\omega(x)$.

Zur Invarianz: Sei $y \in \mathcal{L}_\omega(x)$ und $z = \varphi(t, y)$. Zu zeigen ist $z \in \mathcal{L}_\omega(x)$. Wähle die Folge $t + t_k$, falls $\varphi(t_k, x) \rightarrow y$. Dann gilt

$$\varphi(t + t_k, x) = \varphi(t, \varphi(t_k, x)) \rightarrow \varphi(t, y) = z,$$

letzteres wegen der Stetigkeit von φ .

Offensichtlich wird x von $\mathcal{L}_\omega(x)$ per Definition angezogen, d.h. es gilt

$$\varphi(t, x) \rightarrow \mathcal{L}_\omega(x) \quad \text{für } t \rightarrow \infty. \quad (2.9)$$

Eine kleinere kompakte Menge als $\mathcal{L}_\omega(x)$ mit dieser Eigenschaft kann es nicht geben.

Falls $\mathcal{L}_\omega(x)$ nicht zusammenhängend ist, ist $\mathcal{L}_\omega(x)$ die disjunkte Vereinigung zweier abgeschlossener (hier also auch kompakter) nichtleerer Mengen A, B . Es gibt also disjunkte Umgebungen U_A und U_B von A und B . $U := U_A \cup U_B$ ist eine Umgebung von $\mathcal{L}_\omega(x)$. Wegen (2.9) gibt es $T > 0$ mit $\sigma := \gamma^+(\varphi(T, x)) \subset U$. σ ist (wege-)zusammenhängend und muss U_A und U_B schneiden. Widerspruch zu $U_A \cap U_B = \emptyset$. ■

Aus der Invarianzaussage dieses Satzes folgt das anschaulich klare

Korollar 2.6. a) Gilt $\mathcal{L}_\omega(x) = \{y\}$, so ist y ein Gleichgewichtspunkt.

b) Ist ein periodischer Orbit $\gamma(x)$ asymptotisch stabil, so gibt es eine Umgebung U dieses Orbits mit

$$\mathcal{L}_\omega(y) = \gamma(x) \quad \text{für alle } y \in U.$$

Bei skalaren autonomen Differentialgleichungen können Limesmengen nur einpunktige Mengen, bestehend aus Gleichgewichtspunkten sein. In der Ebene ($n = 2$) ist die Situation auch noch relativ überschaubar:

Satz 2.7 (Poincaré-Bendixson). Gegeben sei ein ebenes System ($n = 2$) mit $D = \mathbb{R}^2$. Der Halborbit $\gamma^+(x)$ sei für ein $x \in \mathbb{R}^2$ beschränkt und $\mathcal{L}_\omega(x)$ enthalte keinen Gleichgewichtspunkt. Dann ist $\mathcal{L}_\omega(x)$ ein periodischer Orbit.

Zum **Beweis** siehe HIRSCH-SMALE. Dort wird der *Jordansche Kurvensatz* herangezogen.

Als Limesmengen ebener Flüsse kommen auch noch *homokline* und *heterokline* Orbits in Frage. Diese enthalten Bahnen, die Gleichgewichtspunkte verbinden.

In mehr als zwei Dimensionen können Limesmengen beliebig kompliziert sein (*fraktale, chaotische Attraktoren*), s. Abb.2.4.

Von Attraktoren M wird manchmal noch die folgende „Unzerlegbarkeit“ gefordert: *Es gibt ein $x \in M$ mit $\mathcal{L}_\omega(x) = M$.*

2.6 Koordinatentransformationen, Konjugiertheit

Alle „vernünftigen“ Definitionen über das langfristige Verhalten von Lösungen sollten invariant gegenüber Koordinatentransformationen sein.

Wir betrachten einen C^∞ -Diffeomorphismus T zwischen D_y und $D_x := D \subset \mathbb{R}^n$, kurz durch $x = T(y)$, bzw. $y = S(x)$ mit der Umkehrabbildung $S : D_x \rightarrow D_y$ von T beschrieben. Die neuen Koordinaten sind also y .

Als erstes muss man sich überlegen, wie man aus $\dot{x} = f(x)$ das DGL-System $\dot{y} = g(y)$ gewinnt. Es gilt $\dot{x} = DT(y)\dot{y} = f(x) = f(T(y))$, woraus

$$\dot{y} = DT(y)^{-1}f(T(y)) =: g(y)$$

folgt. Aus dem Satz über Inverse Funktionen folgt $DT(y)^{-1} = DS(T(y))$, so dass gilt $g(y) = DS(T(y))f(T(y))$.

Klar ist, dass x_0 ein Gleichgewichtspunkt von $\dot{x} = f(x)$ genau dann ist, wenn $y_0 := S(x_0)$ einer von $\dot{y} = g(y)$ ist, da $f(x_0) = 0$ impliziert, dass $g(y_0) = DS(T(y_0))f(T(y_0)) = DS(x_0)f(x_0) = 0$. Ein Orbit $\gamma_x(x)$ von $\dot{x} = f(x)$ sollte durch S in einen Orbit $\gamma_y(Sx)$ von $\dot{y} = g(y)$ transformiert werden. Dass sieht man ein, wenn man die folgende Beziehung zwischen den Flüssen φ_x von $\dot{x} = f(x)$ und φ_y von $\dot{y} = g(y)$ zeigt:

$$\varphi_y(t, y) = S(\varphi_x(t, T(y))) \tag{2.10}$$

zeigt (Aufgabe!). Man sagt auch, dass die beiden Flüsse zueinander diffeo-konjugiert sind.

In diesem Kontext kann der *Begradigungssatz* gezeigt werden, nachdem es zu jedem $x \in D$ mit $w := f(x) \neq 0$ einen Diffeo S zwischen einer Umgebung U und einer Umgebung V von x , der Art, dass alle Phasenkurven des transformierten Systems in V Geraden mit Tangentialvektor w sind. Es muss also ein Diffeo S mit $S(\varphi(t, x)) = S(x) + tw$ für alle $x \in U$ gefunden werden. Das ist eine Funktionalgleichung für den Diffeo S .

Ein wichtiger Spezialfall ist eine lineare Transformation $T(y) := Cy + b$ mit einer regulären Matrix C . Dann gilt $S(x) = C^{-1}(x - b)$, das neue DGL-System lautet $\dot{y} = C^{-1}f(Cy + b)$, der

neue Fluss $\varphi_y(t, y) = C^{-1}((\varphi_x(t, Cy + b)) - b)$. Dies wird im Beweis von Satz 3.7 (Prinzip der linearisierten Stabilität) benutzt.

Schon jetzt kann man nachvollziehen, dass die beiden Jacobimatrizen von einander entsprechender Gleichgewichtspunkte, $Df(x_0)$ und $Dg(y_0)$ mit $x_0 = T(y_0)$ einander ähnlich sind!

2.7 Beispiele

Betrachte ein Lotka-Volterra-System mit drei untereinander konkurrierenden Beuten

$$\dot{x}_i = x_i(r_i + \sum_{j=1}^3 a_{ij}x_j), \quad i = 1, 2, 3, \quad r_i > 0, \quad c_{ij} := -\frac{a_{ij}}{r_i} > 0, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

c_{ij} ist ein Maß für die „Bedrohung“ der Spezies i durch die Spezies j .

Satz 2.8. *Gilt*

$$c_{31} > c_{11} > c_{21}, \quad c_{12} > c_{22} > c_{32}, \quad c_{23} > c_{33} > c_{13},$$

so gibt es einen **heteroklinen Zyklus**, bestehend aus drei Gleichgewichtspunkten, in denen zwei Spezies ausgestorben sind und diese verbindende Phasenkurven.

Sei

$$\alpha_i := \frac{c_{i-1,i}}{c_{ii}}, \quad \beta_i := \frac{c_{i+1,i}}{c_{ii}}, \quad i = 1, 2, 3$$

(mit zyklischer Anordnung), so folgt aus

$$\prod_{i=1}^3 (\alpha_i - 1) > \prod_{i=1}^3 (\beta_i - 1),$$

dass der heterokline Zyklus ein Attraktor ist.

Zum Beweis s. HOFBAUER-SIGMUND, S.212.

Mögliche Parameterwahl:

$$r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = 3, \quad A = \begin{pmatrix} -1.5 & -3 & -1.5 \\ -2 & -4 & -6 \\ -9 & -3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$C = \begin{pmatrix} 1.5 & 3 & 1.5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

s. Abb. 2.3

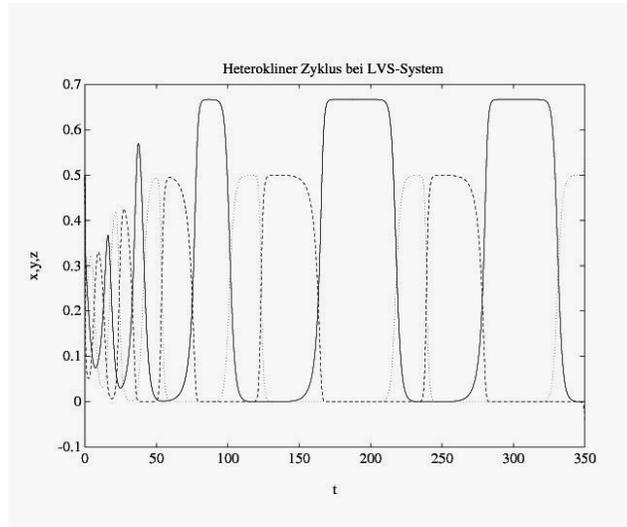


Abbildung 2.3: Lösungskurven eines dreidimensionalen Lotka-Volterra Systems mit einem heteroklinen Zyklus als Attraktor

Das berühmte *Lorenz-System* ($n = 3$) lautet

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = \varrho x - xz - y, \quad \dot{z} = xy - \beta z. \quad (2.11)$$

Mit

$$\beta = 8/3, \quad \sigma = 10, \quad \varrho = 28$$

und den Anfangswerten

$$x(0) = 5, \quad y(0) = 10, \quad z(0) = 19$$

ist die Limesmenge ein *seltsamer* oder *chaotischer* Attraktor. S. Abb.2.4. Gleichgewichtspunkte sind der Ursprung und (für $\varrho > 1$) $z = \varrho - 1, x = y = \pm\beta\sqrt{\varrho - 1}$. Die letzten beiden sind bis $\varrho = 24.74\dots$ asymptotisch stabil (die Verzweigung, die bei $\varrho = 1$ zu zwei neuen Gleichgewichtspunkten führt, heißt *Pitchfork*). Vorher tritt jedoch schon der chaotische Attraktor auf. In den Zentren der „Schmetterlingsflügel“ in Abb.2.4 sitzen also Gleichgewichtspunkte.

Der Meteorologe Lorenz modellierte hiermit 1963 Elemente des Wetters (Wärmekonvektion durch Sonneneinstrahlung) und lieferte Argumente für eine ungemein sensible Abhängigkeit der Lösungen von den Anfangsdaten - ein charakteristisches Element von chaotischen Systemen.

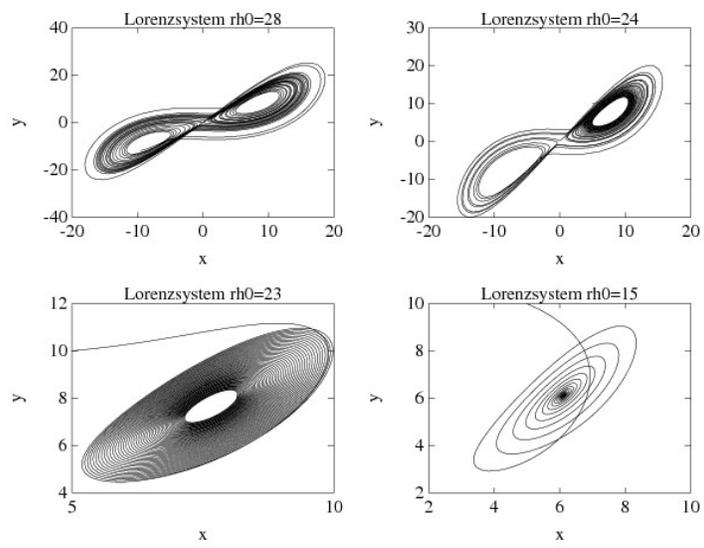


Abbildung 2.4: Phasenkurven des Lorenz-Systems für verschiedene Werte von ρ

Kapitel 3

Qualitative Theorie: Stabilitätskriterien

Vorbemerkung: Dieses Kapitel setzt gewissermaßen die Theorie gewöhnlicher DGLn fort - zum Teil unter Bezugnahme auf die in Kap. 2 eingeführten Begriffe. Dabei nehmen Stabilitätskriterien eine besondere Rolle ein.

3.1 Abhängigkeit der Lösungen von Anfangswerten und Parametern

Wir lassen jetzt zusätzlich Abhängigkeiten der rechten Seite von einem reellen Parameter λ zu und betrachten daher

$$\dot{x} = f(x, \lambda), \quad x(0) = x_0 \quad (3.1)$$

mit $f : D \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$, D wie gehabt und $\Lambda \subset \mathbb{R}$ offen sowie f stetig-differenzierbar auf $D \times \Lambda$, insbesondere bzgl. $x \in D$.

Beim ersten Lesen überlese man die λ -Abhängigkeit.

Es gibt ja zu jedem $(x_0, \lambda_0) \in D \times \Lambda$ eine eindeutige, nicht fortsetzbare (maximale) Lösung

$$u(t) =: \varphi(t, x_0, \lambda_0), \quad t \in J(x_0, \lambda_0) = (t^-(x_0, \lambda_0), t^+(x_0, \lambda_0)).$$

Wir interessieren uns für die Abhängigkeit der Lösung $\varphi(t, x_0, \lambda_0)$ und des maximalen Existenzintervalls $J(x_0, \lambda_0)$ von x_0 und auch von dem Parameter λ_0 .

Satz 3.1. *Sei $(x_0, \lambda_0) \in D \times \Lambda$. Dann gibt es zu jedem kompakten Teilintervall J_1 von $J(x_0, \lambda_0)$ eine ε -Umgebung U von (x_0, λ_0) , so dass für alle $(\xi, \lambda) \in U$ gilt $J_1 \subset J(\xi, \lambda)$.*

Für $t \in J_1$ hängt $\varphi(t, \xi, \lambda)$ stetig differenzierbar von ξ, λ ab, genauer: die Restriktion von φ auf $J_1 \times U$ ist stetig-differenzierbar, bzw. alle partiellen Ableitungen von φ existieren und sind stetig.

Beweis s. AMANN, II.8 und II.9.

Als Korollar erhält man die Eigenschaften (2.2) und (2.3) des Flusses für autonome Systeme.

3.1.1 Variationsgleichungen

In vielen, auch numerischen Anwendungen (Shooting-Verfahren), interessiert man sich für eine analytische Form der Ableitungen

$$Y(t) := \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, x, \lambda_0) \right|_{x=x_0}, \quad z(t) := \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}(t, x_0, \lambda) \right|_{\lambda=\lambda_0}, \quad (3.2)$$

von denen wir nach Satz 3.1 nur wissen, dass sie existieren.

Beachte, dass $Y(t) \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $z(t) \in \mathbb{R}^n$.

Differenziert man die Identitäten

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x, \lambda) \equiv f(\varphi(t, x, \lambda), \lambda)$$

und

$$\varphi(0, x, \lambda) = x$$

nach x , bzw. λ , so erhält man mit Hilfe der Kettenregel

Satz 3.2. Für $Y(t)$, bzw. für $z(t)$ in (3.2) gilt die Matrix-Differentialgleichung

$$\dot{Y}(t) = A(t)Y(t), \quad Y(0) = E \quad (3.3)$$

mit

$$A(t) := \left. \frac{\partial f}{\partial x}(x, \lambda_0) \right|_{x=\varphi(t, x_0, \lambda_0)} \in \mathbb{R}^{n,n},$$

bzw.

$$\dot{z}(t) = A(t)z(t) + g(t), \quad z(0) = 0 \quad (3.4)$$

mit

$$g(t) := \left. \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\varphi(t, x_0, \lambda_0), \lambda) \right|_{\lambda=\lambda_0}.$$

(3.3) und (3.4) sind i.a. zeitvariante (also nicht-autonome) *lineare* Differentialgleichungssysteme und heißen **Variationsgleichungen**. (3.3) heißt **Linearisierung** von $\dot{x} = f(x)$ entlang der Lösung $\varphi(t, x_0, \lambda_0)$. Vgl. mit Def. 7.1 und Satz 7.7 in WIRSCHING.

Somit gilt in erster Näherung (bei Unterdrückung der Parameterabhängigkeit)

$$\varphi(t, x_0 + h) - \varphi(t, x_0) = Y(t)h,$$



Abbildung 3.1: A. Ljapunow (1857-1918)

wobei $v(t) := Y(t)h$ das lineare Differentialgleichungssystem

$$\dot{v} = Df(\varphi(t, x_0))v, \quad v(0) = h \quad (3.5)$$

löst.

Ein wichtiger Spezialfall ist, dass x_0 ein Gleichgewichtspunkt ist. Dann ist $A(t) \equiv A = Df(x_0)$ und $Y(t) = e^{tA}$, bzw. für die Lösung $v(t)$ von (3.5) gilt $v(t) = e^{tA}h$. Falls A stabil ist, gilt $v(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$, so dass es zumindest plausibel erscheint, dass x_0 asymptotisch stabil ist, wenn $Df(x_0)$ stabil ist. Diese Aussage wird in Satz 3.7 bewiesen.

3.2 Ljapunov-Funktionen

Gegeben sei das autonome System

$$\dot{x} = f(x)$$

mit $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig-differenzierbar. Der zugehörige Fluss werde wieder mit $\varphi(t, x)$ bezeichnet.

Sei $B \subset D$ offen und $V : B \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig-differenzierbare reelle Funktion, für deren Wert in den Zuständen $x \in B$ man sich interessiert. Wir interessieren uns daher für

$$v(t) := V(\varphi(t, x)),$$

also für den zeitlichen Verlauf von V während des durch den Anfangszustand x initiierten Prozesses. Nach der Kettenregel ist

$$\dot{v}(t) = \text{grad } V(\varphi(t, x)) \cdot f(\varphi(t, x)).$$

Wir schreiben

$$\dot{V}(y) := \text{grad } V(y) \cdot f(y), \quad y \in B.$$

und nennen $\dot{V}(y)$ die **orbitale Ableitung** von V an der Stelle y . Dann gilt

$$\dot{v}(t) = \dot{V}(\varphi(t, x)).$$

$\dot{V}(y)$ gibt die momentane V -Geschwindigkeit im Zustand y an. Vgl. Def. 4.5 in WIRSCHING.

Man nennt $V : B \rightarrow \mathbb{R}$ eine **Erhaltungsgröße** oder ein erstes Integral der DGL (auf B), falls (vgl. Def. 4.6 in WIRSCHING)

$$\dot{V}(y) = 0 \text{ für alle } y \in B.$$

Als Konsequenz ist V entlang eines in B verlaufenden Orbits konstant.

In konservativen mechanischen Systemen (*Hamilton-Systeme*, vgl. Kap. 4.2 in WIRSCHING) ist die Gesamtenergie eine Erhaltungsgröße. Das einfachste Beispiel ist der Oszillator

$$\ddot{x} + U'(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

mit der Erhaltungsgröße $V(x, \dot{x}) = \dot{x}^2/2 + U(x)$. $U(x)$ ist die potentielle Energie.

Falls Reibungskräfte vorhanden sind, kann $\dot{V}(y) \leq 0$ gelten. Dies gibt Anlass zu (vgl. Def. 4.6 in WIRSCHING)

Definition 3.3. *Eine stetig-differenzierbare Funktion $V : B \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Ljapunovfunktion** (auf B) für das autonome System $\dot{x} = f(x)$, falls $B \subset D$ offen ist und falls*

$$\dot{V}(y) \leq 0 \text{ für alle } y \in B.$$

Ist $x \in B$, so ist also $v(t) := \varphi(t, x)$ für $t \geq 0$ eine (nicht notwendig streng) monoton fallende Funktion entlang dem Halborbit $\gamma^+(x)$, sofern dieser in B verläuft. Falls B (positiv) invariant ist, so trifft dies also auch auf

$$\{x \in B : V(x) < \beta\}$$

für irgendein reelles β zu. Ist $\gamma(x) \subset B$ ein periodischer Orbit, so muss $v(t)$ entlang diesem Orbit konstant sein!

Für Lotka-Volterra-Systeme hatten wir schon eine Ljapunovfunktion kennengelernt, die ohne innerspezifische Konkurrenz sogar eine Erhaltungsgröße ist, s. Abb. 3.2.

Satz 3.4 (La Salle). *Sei $V : B \rightarrow \mathbb{R}$ eine Ljapunovfunktion und B sei positiv invariant. Dann gilt*

$$\dot{V}(y) = 0 \text{ für alle } y \in \mathcal{L}_\omega(x) \cap B, \quad x \in B.$$

(Beachte, dass hier $\mathcal{L}_\omega(x) \cap B = \emptyset$ nicht ausgeschlossen ist).

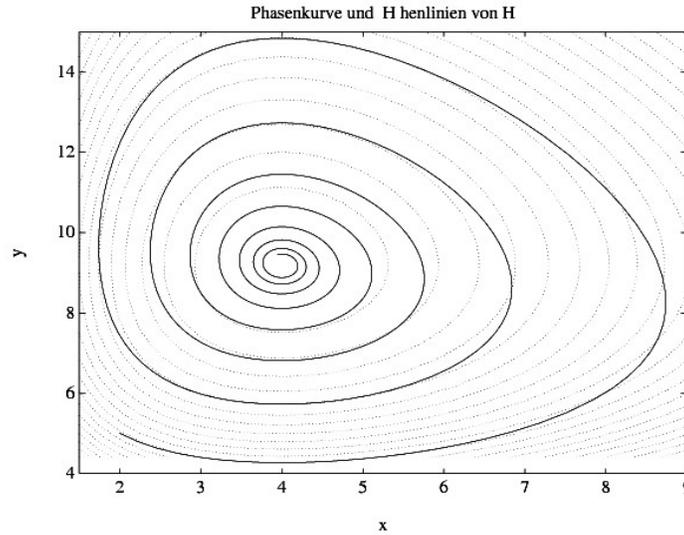


Abbildung 3.2: Höhenlinien der Ljapunovfunktion H (gepunktet) und eine Phasenkurve (durchgezogen) für ein Lotka-Volterra-System mit innerspezifischer Konkurrenz

Beweis: Sei $x \in B$ und $y \in \mathcal{L}_\omega(x) \cap B$. Dann ist $\gamma^+(x) \subset B$ (da B invariant) und $v(t) := \varphi(t, x)$ ist monoton fallend (nicht wachsend) für $t \geq 0$ und durch $c := V(y)$ nach unten beschränkt. Hieraus folgt $v(t_k) \rightarrow c$ für jede Folge $(t_k) \rightarrow \infty$, also ist V konstant $= c$ auf $\mathcal{L}_\omega(x)$ und wegen der Invarianz¹ von $\mathcal{L}_\omega(x)$ gilt $w(t) := V(\varphi(t, y)) \equiv c$ und (Differentiation!) $\dot{V}(y) = 0$. ■

Korollar 3.5. Sei $V : B \rightarrow \mathbb{R}$ eine Ljapunovfunktion, B positiv invariant und $\tilde{B} = \{x \in B : V(x) < \alpha\}$ beschränkt mit Abschluss in B . Dann ist für jedes $x \in \tilde{B}$ die Limesmenge $\mathcal{L}_\omega(x)$ kompakt, nichtleer und eine invariante Teilmenge von $\{z \in \tilde{B} : \dot{V}(z) = 0\}$.

Beweis: \tilde{B} ist invariant. Der Rest folgt aus den Sätzen 2.5 und 3.4. ■

Eine Folgerung dieses Satzes für sog. *Gradientensysteme* wird in den Übungen untersucht.

3.2.1 Ljapunovfunktionen bzgl. Gleichgewichtspunkte

Jetzt sei x_0 ein Gleichgewichtspunkt von $\dot{x} = f(x)$ und $V : U_0 \rightarrow \mathbb{R}$ eine Ljapunovfunktion auf einer Umgebung U_0 von x_0 . Man sagt, dass V eine **Ljapunovfunktion bzgl. des Gleichgewichtspunktes** ist, falls x_0 ein striktes Minimum von V ist, d.h. falls $V(x) > V(x_0)$ für alle $x \in U_0 \setminus \{x_0\}$.

¹Diese folgt nicht direkt aus Satz 2.5, da dort die relative Kompaktheit von $\gamma^+(x)$ in B vorausgesetzt wird. Dort wird aber auch $J(y) = \mathbb{R}$ für $y \in \mathcal{L}_\omega(x)$ behauptet. Hier genügt die Aussage $\varphi(t, y) \in \mathcal{L}_\omega(x)$ für kleine $|t|$, was ganz einfach wie im Beweis von Satz 2.5 gezeigt werden kann.

Ferner heißt V eine **strikte** Ljapunovfunktion bzgl. des Gleichgewichtspunktes, falls

$$\dot{V}(x) < 0 \quad \text{für alle } x \in U_0 \setminus \{x_0\}.$$

(Beachte: Es gilt $\dot{V}(x_0) = 0$ wegen $\text{grad}(V(x_0)) = 0$. Ferner kann es keine anderen Extrema von V in U_0 geben).

Bemerkung: Aus der Analysis wissen wir, dass x_0 ein striktes Minimum von V ist, falls $\text{grad}V(x_0) = 0$ und die Hessische $H_V(x_0)$ positiv definit ist.

Jetzt erhalten wir (vgl. Sätze 4.7. 4.8 in WIRSCHING)

Satz 3.6. a) Sei $V : U_0 \rightarrow \mathbb{R}$ eine Ljapunovfunktion bzgl. des Gleichgewichtspunktes x_0 . Dann ist x_0 stabil.

b) Sei V eine strikte Ljapunovfunktion bzgl. x_0 . Dann ist x_0 asymptotisch stabil.

Beweis:

a) Wähle eine beschränkte Umgebung U_1 von x_0 , mit $\overline{U_1} \subset U_0$. Sei

$$\alpha := \min_{x \in \partial U_1} V(x).$$

Da x_0 striktes Minimum von V ist, gilt $V(x_0) < \alpha$. Daher ist $U_2 := \{x \in U_1 : V(x) < \alpha\}$ eine nichtleere Umgebung von x_0 . Sie ist positiv invariant, da V entlang eines in U_1 startenden Orbits nur abnehmen und den Rand von U_1 nicht erreichen kann.

Da U_1 beliebig gewählt war, folgt die Stabilitätsaussage.

b) Es ist x_0 einzige Nullstelle von \dot{V} in U_0 . Für jedes $x \in U_2$ (wurde in Teil a) konstruiert) ist $\mathcal{L}_\omega(x) \neq \emptyset$ und enthalten in U_2 , da $\gamma^+(x)$ dem Rand von U_2 nicht beliebig nahe kommen kann (in Randpunkten z muss $V(z) = \alpha$ gelten). Wende Satz 3.4, bzw. Korollar 3.5 auf die Restriktion von V auf U_2 an: es gilt

$$\mathcal{L}_\omega(x) = \{x_0\} \quad \text{für alle } x \in U_2.$$

Daher ist x_0 attraktiv und zusammen mit Teil a) auch asymptotisch stabil. ■

Durch eine leichte Modifikation kann auch die asymptotische Stabilität eines Gleichgewichtspunktes gezeigt werden, wenn die Ljapunovfunktion nicht strikt ist, man jedoch Informationen über die Nullstellen von \dot{V} hat (Anwendung von Kor. 3.5). So können Ljapunovfunktionen Informationen über den Einzugsbereich des Gleichgewichtspunktes liefern - bis hin zur globalen asymptotischen Stabilität.

3.3 Prinzip der linearisierten Stabilität

Sei x_0 ein Gleichgewichtspunkt von $\dot{x} = f(x)$. Sei $A := Df(x_0)$ die Jacobimatrix von f an der Stelle x_0 . Aus mehreren Gründen ist es nahelegend, das lineare System

$$\dot{w} = Aw \tag{3.6}$$

zu studieren. Zum einen genügen (in erster Näherung) $w(t) := u(t) - x_0$ für „kleine“ $w(t)$ der DGL (3.6), falls u eine Lösung von $\dot{x} = f(x)$ ist. Zum anderen bestimmen die Lösungen von (3.6) die Ableitung $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, x) \right|_{x=x_0}$, s. Satz 3.2. Wie dort spricht man von (3.6) als der *Linearisierung* von $\dot{x} = f(x)$ am oder im Gleichgewichtspunkt.

Es zeigt sich, dass in den meisten Fällen die (asymptotische) Stabilität von x_0 mit Hilfe der Linearisierung bestimmt werden kann.

Satz 3.7. (vgl. Satz 6.10 in WIRSCHING)

- a) Haben alle Eigenwerte von A negativen Realteil, so ist x_0 asymptotisch stabil.
 b) Gibt es einen Eigenwert von A mit positivem Realteil, so ist x_0 instabil.

Beweis: von a) Durch eine Variablentransformation $x = Cy + x_0$ mit einer regulären Matrix C geht $\dot{x} = f(x)$ über in $\dot{y} = g(y)$ mit $g(0) = 0$ und $Dg(0) = C^{-1}Df(x_0)C$. Dabei ist $y_0 = 0$ genau dann (asymptotisch) stabiler Gleichgewichtspunkt von $\dot{y} = g(y)$, wenn x_0 (asymptotisch) stabiler Gleichgewichtspunkt von $\dot{x} = f(x)$ ist. Siehe auch Kap. 2.6.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann daher $x_0 = 0$ und A als reelle Jordansche Normalform angenommen werden - mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass die Einsen oberhalb der Diagonale durch ε ersetzt werden mit einem geeignet zu wählenden $\varepsilon > 0$ (wir sprechen von einer Jordanschen ε -Normalform). Es sei $A = D + \varepsilon N$, wobei D der Diagonalanteil der reellen Jordanschen Normalform und N der nilpotente Nebendiagonalanteil ist (D besteht z.T. aus 2×2 -Blöcken zu nichtreellen Eigenwerten).

Nun soll gezeigt werden, dass $V(x) := \frac{1}{2}(x^T x)$ eine strikte Ljapunovfunktion auf einer hinreichend kleinen Umgebung von $x_0 = 0$ ist, wenn nur $\varepsilon > 0$ hinreichend klein gewählt wird.

Mit $f(x) = Ax + g(x)$ gilt $\|g(x)\| = o(\|x\|)$ und

$$\dot{V}(x) = x^T Ax + x^T g(x) = x^T Dx + \varepsilon x^T Nx + x^T g(x).$$

Es ist

$$x^T Dx = \sum_{i=1}^n (\Re \lambda_i) x_i^2.$$

Also gibt es ein $\alpha > 0$ mit

$$x^T Dx \leq -\alpha x^T x \quad \text{für alle } x.$$

Es folgt

$$x^T Ax \leq (-\alpha + \varepsilon \|N\|_2) x^T x \quad \text{für alle } x.$$

ε kann so klein gewählt werden, dass

$$x^T Ax \leq -\beta x^T x \quad \text{für alle } x$$

mit einem $\beta > 0$.

Da $\|g(x)\| = o(\|x\|)$, gibt es eine Umgebung U von $x_0 = 0$, so dass

$$|x^T g(x)| \leq \frac{\beta}{2} x^T x \quad \text{für alle } x \in U.$$

Damit folgt

$$\dot{V}(x) \leq -\frac{\beta}{2} x^T x \quad \text{für alle } x \in U,$$

d.h. die quadratische Form V ist eine strikte Ljapunovfunktion auf U .

Wende jetzt Satz 3.6 an! ■

Ein anderer Beweis von Teil a) findet sich in WIRSCHING auf S.110. Zum schwierigeren Beweis von Teil b) sei auf AMANN, S.225, verwiesen.

Für $n = 2$ findet sich ein elementarer Beweis in HALE-KOZAK (S.273), den ich skizziere:

Wenn beide Eigenwerte positiven Realteil haben, braucht man nur die Zeit umzukehren. Dann ist der Gleichgewichtspunkt „rückwärts“ asymptotisch stabil, was sich mit Stabilität nicht verträgt.

Bleibt der Fall eines Sattelpunktes, also eines positiven und eines negativen Eigenwertes. Nach einer geeigneten Koordinatentransformation kann man A als Diagonalmatrix mit Diagonalelement $\mu_1 < 0$ und $\mu_2 > 0$ annehmen. Nun betrachtet man $V(x) := x_2^2 - x_1^2$ und den Kegel $K := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > |x_1|\}$. In einer hinreichend kleinen Umgebung U des Ursprungs ist V auf $U \cap K$ eine „Anti-Ljapunovfunktion“, d.h. es gilt $\dot{V}(x) > 0$ für $x \in U \cap K$. Daher kann und wird eine Trajektorie $U \cap K$, die in irgendeinem, dem Gleichgewichtspunkt $x_0 = 0$ beliebig nahen $y_0 \in U \cap K$ startet (dann ist $V(y_0) > 0$) über den Rand von U im Punkt y verlassen (hier ist $\|y\| = \varepsilon$), was der Stabilität widerspricht.

Es sei bemerkt, dass im Gegensatz zum linearen Fall keine Stabilitätsaussage möglich ist, wenn es einen Eigenwert mit Realteil = 0 gibt.

3.3.1 Hyperbolische Gleichgewichtspunkte

Man nennt einen Gleichgewichtspunkt x_0 **hyperbolisch**, falls alle Eigenwerte von $A = Df(x_0)$ entweder positiven oder negativen Realteil haben. Nach dem Prinzip der linearisierten Stabilität kann also die Stabilität von hyperbolischen Gleichgewichtspunkten mit Hilfe der Linearisierung entschieden werden.

Der *Typ* eines hyperbolischen Gleichgewichtspunktes wird durch die Anzahl der Eigenwerte mit positivem und negativem Realteil und durch die Information, ob die Eigenwerte reell oder nicht sind, festgelegt.

In der Ebene werden so wieder *stabile und instabile Knoten*, *Strudel* und *Sattelpunkte* unterschieden.

In der Nähe von hyperbolischen Gleichgewichtspunkten sehen die Phasenportraits „ähnlich“ denen der linearisierten Gleichungen aus (Satz von Grobmann-Hartmann). Es gibt *stabile* und *instabile Mannigfaltigkeiten*, deren Dimension gleich der Anzahl der Eigenwerte mit negativem, bzw. mit positivem Realteil ist.

Die stabile Mannigfaltigkeit besteht aus allen $x \in D$, für die $\varphi(t, x) \rightarrow x_0$ für $t \rightarrow +\infty$, für die x_0 also anziehend ist. Entsprechend besteht die instabile Mannigfaltigkeit aus allen Punkten $x \in D$, für die $\varphi(t, x) \rightarrow x_0$ für $t \rightarrow -\infty$.

Deren Tangentialräume im Gleichgewichtspunkt fallen gerade mit den stabilen, bzw. instabilen Mannigfaltigkeiten E_s , bzw. E_u des *Gleichgewichtspunktes* $x_0 = 0$ des linearen Problems $\dot{x} = Df(x_0)x$ zusammen, die sich mit Hilfe der Eigenvektoren charakterisieren lassen (s. auch AMANN, S.288f):

Sei $A := Df(x_0)$. Sei E_s (bzw. E_u) der von allen Realteilen der Eigen- und Hauptvektoren zu Eigenwerten von A mit negativem (bzw. positivem) Realteil aufgespannte Unterraum von \mathbb{R}^n . Dann gilt

$$\mathbb{R}^n = E_s \oplus E_u,$$

und die Dimension von E_s , bzw. von E_u ist gleich der Anzahl der Eigenwerte mit negativem, bzw. mit positivem Realteil (einschließlich Vielfachheiten). Dann gilt

Satz 3.8. E_s und E_u sind invariante Unterräume von A . Für alle $x \in E_s$ gilt $e^{tA}x \rightarrow 0$ für $t \rightarrow +\infty$, während $e^{tA}x \rightarrow 0$ für $t \rightarrow -\infty$ für alle $x \in E_u$ gilt.

Man sollte sich typische Phasenkurven zu linearen Problemen mit hyperbolischem Gleichgewichtspunkt im Raum ($n = 3$) überlegen (s. AMANN, S.197).

3.3.2 Prinzip der linearisierten Stabilität für Fixpunkte

Hier geht es um ein analoges Prinzip für Fixpunkte *diskreter* dynamischer Systeme.

Sei z ein Fixpunkt des durch den Fluss $\varphi^t, t \in \mathbb{Z}$, gegebenen diskreten dynamischen Systems. Setze $F := \varphi^h$ für irgendein $h > 0$ und betrachte $M := DF(z)$ bzw. den affin-linearen Fluss $x \rightarrow G^t(x)$, $G(x) := F(z) + DF(z)(x - z)$, den man als *Linearisierung* von F^t in der Nähe von z ansehen kann. z ist ebenfalls Fixpunkt von G , bzw. $w = 0$ ist Fixpunkt von M , dessen Stabilität mit Hilfe der Eigenwerte von M ebenso leicht entschieden werden kann wie die Stabilität von dem Gleichgewichtspunkt $w = 0$ von $\dot{x} = Ax$ mit Hilfe der Eigenwerte von A .

Das Prinzip der linearisierten Stabilität besagt (unter gewissen Hyperbolizitätsbedingungen), dass z (asymptotisch) stabiler bzw. instabiler Fixpunkt von F ist genau dann, wenn $w = 0$ (asymptotisch) stabiler bzw. instabiler Fixpunkt der linearen Abbildung M ist.

Bei diskreten Systemen ist $h = 1$ eine natürliche Wahl. Die folgenden Stabilitäts-Kriterien sind unabhängig von der Wahl von $h > 0$.

Satz 3.9. a) Haben alle Eigenwerte von M einen Betrag < 1 , so ist z asymptotisch stabil.
b) Gibt es einen Eigenwert von M mit Betrag > 1 , so ist z instabil.

Teil a) dieses Satzes spielt auch in der Konvergenztheorie von Iterationsverfahren, etwa zur Lösung linearer Gleichungssysteme, eine große Rolle. Der Beweis ist relativ einfach: Man konstruiert eine Norm auf dem \mathbb{R}^n , bzgl. der M eine Kontraktion ist und wendet dann den Fixpunktsatz für kontrahierende Abbildungen an.

Definiert man **hyperbolische** Fixpunkte als solche Fixpunkte, deren Eigenwerte sämtlichst Betrag $\neq 1$ haben, so besagt Satz 3.9, dass die Stabilität hyperbolischer Fixpunkte mit Hilfe der Beträge der Eigenwerte von M entschieden werden kann. Wir bezeichnen im folgenden die Eigenwerte von $M = DF(z)$ zuweilen auch als **Eigenwerte des Fixpunkts** z .

Man beachte, dass das (bekannte) Prinzip der linearisierten Stabilität für Gleichgewichtspunkte autonomer Systeme mit Satz 3.9 zusammenhängt:

Die Abbildung $z \mapsto e^z$ bildet die linke komplexe Halbebene C_- in das Innere des Einheitskreises ab.

Ist für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ das Spektrum $\sigma(A) \subset C_-$, so liegt $\sigma(e^A)$ im Inneren des Einheitskreises.

Kapitel 4

Periodische Lösungen

Im Folgenden werde ich φ^t an Stelle von $\varphi(t, \cdot)$ schreiben. Dies korrespondiert deutlicher mit der t -maligen Verkettung von Abbildungen F zu $F^t = F \circ F \circ \dots \circ F$ (t -mal).

4.1 Einleitung

4.1.1 Diskrete dynamische Systeme

Für die Analyse periodischer Lösungen bei Differentialgleichungen bedarf es eines grundlegenden Verständnisses von *diskreten* dynamischen Systemen, welches durch *Iterationen* unter einer Abbildung F , die i.A. auf einer Teilmenge des \mathbb{R}^n definiert ist (es kommen aber auch allgemeinere Mannigfaltigkeiten oder Funktionenräume als *Zustandsräume* in Frage),

$$x^{k+1} = F(x^k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.1)$$

gegeben ist. Der Startwert x^0 spielt eine ausgezeichnete Rolle. Siehe Kap. 3.3.2.

Auch hier kann man von einem *Fluss* φ^t sprechen, welcher hier einfach durch $\varphi^t = F^t$ gegeben ist mit t aus einem *Zeitbereich* Z , der in diesem diskreten Fall mindestens $Z = \mathbb{N}_0$ oder auch, falls F umkehrbar ist, $Z = \mathbb{Z}$ sein kann. Dabei beschreibt der Exponent t in F^t das t -fache Hintereinanderausführen der Abbildung F .

Periodische Punkte und periodische Orbits eines diskreten dynamischen Systems

z heißt ein **p-periodischer Punkt** des diskreten dynamischen Systems, falls $F^p(z) = z$ und $p > 0$. Das kleinste $p > 0$ mit dieser Eigenschaft heißt (Minimal-) **Periode** des periodischen Punktes, die in diesem diskreten Fall stets eine natürliche Zahl ist.

Für $p = 1$ liegt der Spezialfall eines **Fixpunktes** von F vor ($F(z) = z$).

Aus der *Flusseigenschaft* $F^s \circ F^t = F^{s+t}$ folgt sofort, dass mit z auch jedes $F^k(z)$, $k \in \mathbb{N}_0$, ein p -periodischer Punkt ist. Ist p die Minimalperiode, so erhält man auf diese Weise genau p verschiedene Punkte, die den **p-periodischen Orbit** bilden.

Auch wenn schon das Studium diskreter dynamischer Systeme (z.B. logistische Abbildung, Henonabbildung, Hufeisenabbildung, etc.) interessant und z.T. auch schwierig ist, tritt doch der wichtigste Anwendungsfall von diskreten dynamischen Systemen auf, wenn sich die Abbildung F aus einer Differentialgleichung herleiten lässt — über die Zeit- τ -Abbildung mit irgendeinem $\tau > 0$ und speziell über die Zeit- T -Abbildung oder über die Poincaré-Abbildung bei kontinuierlichen DGLn. In diesen Fällen ist die Abbildung F sogar ein Diffeomorphismus, die Iteration lässt sich auch rückwärts durchführen. Fixpunkte einer solchen Abbildung entsprechen dann T -periodischen Lösungen $u(t)$ der Differentialgleichungen ($u(t+T) = u(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$), während p -periodische Punkte periodischen Lösungen der Periode $p \cdot T$ entsprechen.

4.1.2 Periodische Orbits autonomer DGLn

Bei T -periodischen Lösungen $u(t)$ autonomer Systeme $\dot{x} = f(x)$ genügt jeder Punkt $z := u(t)$ der Gleichung $\varphi^T(z) = z$, kann also als T -periodischer Punkt des Flusses mit i.a. nicht ganzzahliger Periode T aufgefasst werden. Auch hier bilden alle so gewonnenen $z = u(t), t \in \mathbb{R}$ den sog. T -periodischen Orbit γ .

Für $n = 1$ kann es keine periodischen Orbits geben, der ebene Fall $n = 2$ ist mit dem Satz von Poincaré-Bendixson 2.7 verbunden, Chaos und seltsame Attraktoren sind ausgeschlossen.

4.1.3 Periodische Lösungen periodisch angeregter GDGLn

Dass T -periodische Differentialgleichungen $\dot{x} = f(t, x)$ (definiert durch $f(t + T, x) = f(t, x)$ für alle t und x) periodische Lösungen haben können, mag vielleicht nicht überraschen, da dem System schon eine Periode aufgeprägt ist, die man vielleicht auch bei der Systemantwort erwartet. Aber i.A. ist die Existenz solcher periodischer Lösungen keineswegs gesichert.

4.1.4 Periodisches Verhalten als Grenzverhalten

Periodische Orbits dynamischer Systeme treten typischerweise als *Limesmengen* auf, d.h. spiegeln das langfristige Verhalten der Dynamik wider — das System pendelt sich nach einer gewissen Übergangszeit in eine periodische Dynamik ein. Hinreichend für ein solches Verhalten ist die *asymptotisch Stabilität* des periodischen Orbits — bei autonomen Systemen spricht man von *Grenzzyklen*. Solche Grenzzyklen haben Sie schon bei Räuber-Beute-Systemen (Übungsaufgaben) und dem van-der-Pol-Oszillator (s. Abb. 2.2) kennen gelernt.

4.1.5 Stabilität

Hiermit sind wir bei dem zentralen Begriff der *Stabilität*. Hier gilt es zwischen *Lyapunov-Stabilität* von Lösungen von Differentialgleichungen und die wichtigere *orbitale Stabilität* periodischer Orbits zu unterscheiden, die direkt auf diskrete dynamische Systeme übertragen werden

kann. Das *Prinzip der linearisierten Stabilität*, welches aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen vor allem für *Gleichgewichtspunkte* z autonomer Systeme $\dot{x} = f(x)$ ($f(z) = 0$) bekannt ist, liefert unter gewissen *Hyperbolizitätsvoraussetzungen* Stabilitätskriterien unter Verwendung von sogenannten *Floquetmultiplikatoren*, die später eingeführt werden.

4.1.6 Verzweigungen bei Variation von Systemparametern

Dynamische Systeme besitzen in der Regel *Systemparameter* λ . Das Studium des Einflusses einer Variation dieser Parameter auf die Dynamik ist Gegenstand der *Verzweigungstheorie*. Nehmen wir einmal an, ein periodischer Orbit (oder auch ein Gleichgewichtspunkt) ändert sich stetig mit einem Parameter λ , erfährt jedoch bei einem kritischen *Verzweigungsparameter* einen Stabilitätsverlust, d.h. wird instabil. Wie verhält sich das System in einem solchen Fall in der Nähe des jetzt instabilen Objektes?

Eine solche *Verzweigung* kann auch die Ursache für die „Geburt“ eines periodischen Orbits sein: Bei autonomen Differentialgleichungen spricht man von *Hopfverzweigung*, wenn — sehr unpräzise formuliert — periodische Orbits aus einem instabil gewordenen Gleichgewichtspunkt entspringen. Ein weiteres Verzweigungsphänomen ist die *Periodenverdopplung* mit dem einfachsten Beispiel der logistischen Abbildung.

Auch das Auftreten von *Chaos* in einem gewissen Parameterbereich kann das Ergebnis von Verzweigungen sein — einfachstes Beispiel ist das *Feigenbaum-Szenario* einer unendlichen Sequenz von Periodenverdopplungen, s. Fig. 4.7 in KUZNETSOV oder Fig. 3.17 in HALE–KOCÁK. Auch im Chaos sind — allerdings instabile — periodische Punkte allgegenwärtig: sie liegen dicht im *seltsamen Attraktor*.

4.1.7 Literaturhinweise

Im nachfolgenden Abschnitt werden grundlegende Literatur zum Thema Dynamische Systeme und Verzweigungen genannt, soweit nicht schon in Kap. 1.3 geschehen.

Lehrbücher:

R. ABRAHAM, C. SHAW: Dynamics, the Geometry of Behavior I–IV, Aerial Press, 1982.

D.K. ARROWSMITH, C.M. PLACE: Dynamische Systeme, Spektrum, 1994, eine sehr schlechte Übersetzung von

D.K. ARROWSMITH, C.M. PLACE: An Introduction to Dynamical Systems, Cambridge University Press, 1990.

S.N. CHOW, J. HALE: Methods of Bifurcation Theory, Springer, 1982.

R.L. DEVANEY: A first course in chaotic dynamical systems, Addison–Wesley, 1992.

M. GOLUBITSKY, D.G. SCHAEFFER: Singularities and Groups in Bifurcation Theory (Volume 1). Springer, 1985.

M. GOLUBITSKY, I. STEWART, D.G. SCHAEFFER: Singularities and Groups in Bifurcation Theory (Volume 2). Springer, 1988.

J. GUCKENHEIMER, P. HOLMES: Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields, Springer, 1983.

J. HALE, H. KOČAK: Dynamics and Bifurcation, Springer, 1991.

Y.A. KUZNETSOV: Elements of Applied Bifurcation Theory, Springer, 1995.

J.P. LA SALLE: The Stability and Control of discrete Processes. Springer, 1986.

J.E. MARSDEN, M. MC.CRACKEN: The Hopf bifurcation and its application, Springer, 1976.

H.E. NUSSE, J.A. YORKE: Dynamics: Numerical explorations, Springer (1994), mit PC-Programm.

4.2 Periodische Orbits und periodische Lösungen

4.2.1 Diskrete Systeme

Die Punkte z eines T -periodischen Orbits von $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sind Fixpunkte von F^T , ihre Eigenwerte sind die Eigenwerte von $DF^T(z)$. Durchläuft z den periodischen Orbit, so erhält man zu einander ähnliche Matrizen $DF^T(z)$ (Anwendung der Kettenregel!). Deshalb kann man von den **Eigenwerten eines T -periodischen Orbits** und von einem **hyperbolischen T -periodischen Orbit** sprechen. Siehe Kap. 3.3.2 und die dortige Definition eines *hyperbolischen Fixpunktes*.

Die Eigenwerte eines hyperbolischen periodischen Orbits bestimmen nach Satz 3.9 die (asymptotische) Stabilität(Instabilität) eines jeden Punktes z des Orbits als Fixpunkt von F^T . Mehr noch:

Satz 4.1. *Sei z ein T -periodischer Punkt und $\gamma := \gamma(z)$ der zugehörige T -periodische Orbit. Dann ist γ stabil (asymptotisch stabil, instabil) genau dann, wenn z als Fixpunkt von F^T stabil (asymptotisch stabil, instabil) ist.*

Eine Präsenzaufgabe des Arbeitsblattes 5¹ zeigt, dass in Satz 4.1 *stabil* nicht durch *attraktiv* ersetzt werden darf.

Aus Satz 4.1 folgt jetzt in offensichtlicher Weise ein Prinzip der linearisierten Stabilität für hyperbolische periodische Orbits diskreter Dynamischer Systeme in völliger Analogie zu Satz 3.9.

4.2.2 Periodische Lösungen von periodischen Differentialgleichungen

Betrachte ein nicht-autonomes System

$$\dot{x} = f(t, x), \quad f : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad D \subset \mathbb{R}^n \text{ offen} \quad (4.2)$$

¹Die Kreisabbildung $F : S^1 \rightarrow S^1$, $x \mapsto x + \sin^2(2\pi x) + 0.5 \bmod 1$ hat $\{0, 0.5\}$ zum attraktiven 2-periodischen *Orbit*, während beide 2-periodischen Punkte dieses Orbits als Fixpunkte von F^2 nicht attraktiv sind.

mit der Periodizitätsbedingung

$$f(t + T, x) = f(t, x) \quad \text{für alle } (t, x) \in \mathbb{R} \times D$$

für eine „Periode“ $T > 0$ (hierunter fallen auch die autonomen Systeme, wenn man nicht Minimalität von T verlangt). Solche Differentialgleichungen heißen kurz *T-periodische Differentialgleichungen*. Wieder setzen wir mindestens stetige Differenzierbarkeit von f (jedenfalls bzgl. x) voraus.

Zu den periodischen Differentialgleichungen zählen auch die linearen, homogenen T-periodischen Systeme

$$\dot{x} = A(t)x \tag{4.3}$$

mit wenigstens stetigem $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n,n}$ und der Periodizitätsbedingung $A(t+T) = A(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, wie sie z.B. bei der Linearisierung von autonomen Systemen entlang einer periodischen Lösung auftreten, siehe Satz 3.2, aber auch lineare, inhomogene T-periodischen Systeme

$$\dot{x} = A(t)x + b(t) \tag{4.4}$$

, wobei $b(t+T) = b(t)$ für alle t .

Obwohl wir uns in erster Linie auf autonome Systeme beschränken wollen, werden hier ausnahmsweise auch nichtautonome Systeme betrachtet, so dass der Begriff des Flusses auf den Anfangszeitpunkt t_0 erweitert werden muss.

Bezeichne mit $u(t) = \varphi(t, t_0, \xi)$ die Lösung von (4.2) zum Anfangswert $u(t_0) = \xi$, wobei vorausgesetzt wird, dass globale Lösungen ($t \in \mathbb{R}$) vorliegen. Die Abbildung φ hat hier nicht die Eigenschaften eines Flusses in Satz 2.2, da es auf den Anfangszeitpunkt t_0 ankommt.

Es gilt jedoch immerhin (s. auch Fig. 4.5 in HALE-KOČAK)

$$\varphi(t, t_0, \xi) = \varphi(t + T, t_0 + T, \xi), \tag{4.5}$$

da mit $u(t)$ auch $v(t) := u(t+T)$ eine Lösung der Differentialgleichung (4.3) ist. (Entsprechendes gilt für autonome Systeme für alle $T \in \mathbb{R}$).

Zeit-T-Abbildungen

Die **Zeit-T-Abbildung** $F(t_0; \cdot)$ zum Zeitpunkt t_0 ist durch

$$F(t_0; \xi) := \varphi(t_0 + T, t_0, \xi)$$

definiert. (Der Definitionsbereich von $F(t_0; \cdot)$ ist nicht zwingend ganz D , was aber nicht beachtet werden soll).

F definiert ein diskretes dynamisches System, durch das das dynamische Verhalten von (4.2) vollständig wiedergegeben werden kann. Wir notieren

Satz 4.2. Eine T -periodische Differentialgleichung (4.2) besitzt genau dann eine T -periodische Lösung $u(t)$, falls $\xi_0 := u(t_0)$ Fixpunkt der Zeit- T -Abbildung $F(t_0; \cdot)$ ist:

$$F(t_0; \xi_0) = \xi_0.$$

Beweis: a) Sei $\xi_0 := u(t_0)$ und $u(t)$ ($= \varphi(t, t_0, \xi_0)$) periodische Lösung. Dann ist

$$F(t_0; \xi_0) = \varphi(t_0 + T, t_0, \xi_0) = u(t_0 + T) = u(t_0) = \xi_0.$$

Das erste „=" folgt nach Definition von F , das zweite nach Definition von $u(t)$ und das dritte wegen der Periodizität von $u(t)$.

b) Sei $F(t_0; \xi_0) = \xi_0$. Dann ist $u(t) := \varphi(t, t_0, \xi_0)$ T -periodische Lösung! Denn mit $u(t)$ ist auch $v(t) := u(t + T)$ Lösung der DGL und erfüllt dieselbe Anfangsbedingung für $t = t_0$. ■

Wählt man speziell $t_0 = 0$ und $F := F(0; \cdot)$, so ist durch F ein diskretes dynamisches System definiert, dessen Definitionsbereich eine offene Teilmenge von D ist. T -periodische Lösungen der Differentialgleichung entsprechen Fixpunkten von F . Periodische Lösungen der Periode kT entsprechen periodischen Punkten von F der Periode k , bzw. Fixpunkten von F^k .

Sei $F(\xi_0) = \xi_0$ und $u(t)$ die zugehörige periodische Lösung. Was weiß man über (die Eigenwerte von) $DF(\xi_0)$? Hier hilft die Variationsgleichung in Satz 3.2 weiter, wobei dieser im nichtautonomen Fall leicht verallgemeinert werden muss:

Es ist

$$DF(\xi_0) = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x}(T, 0, x) \right|_{x=\xi_0},$$

welche sich mit Hilfe der *periodischen* Matrix

$$A(t) := \left. \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right|_{x=u(t)} \in \mathbb{R}^{n,n}$$

und der periodischen, linearen Matrizen-Differentialgleichung

$$\dot{Y}(t) = A(t)Y(t), \quad Y(0) = I \tag{4.6}$$

zu $DF(\xi_0) = Y(T)$ berechnet. Mit anderen Worten: $DF(\xi_0)$ ist gerade die (lineare!) Zeit- T -Abbildung des linearen T -periodischen Systems $\dot{y} = A(t)y$ zum Zeitpunkt $t_0 = 0$. (Linearisierung und Zeit- T -Abbildung sind vertauschbar.) Diese Einsicht ist auch für den autonomen Fall $\dot{x} = f(x)$ wertvoll, wobei

$$DF(\xi_0) = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x}(T, x) \right|_{x=\xi_0}, \quad A(t) := Df(x)|_{x=u(t)}.$$

Beachte, dass $A(t)$ selbst im autonomen Fall mit einer periodischen Lösung zeitvariant ist.

Definition 4.3. Die Eigenwerte des Fixpunktes ξ_0 der Zeit- T -Abbildung F , also die Eigenwerte von $DF(\xi_0)$, heißen **Floquetmultiplikatoren**² der T -periodischen Lösung $u(t)$.

Bemerkung 4.4. Für einen anderen Anfangszeitpunkt t_0 erhält man dieselben Eigenwerte.

Die Lösung $M := Y(T)$ von (4.6) heißt auch **Monodromiematrix** oder **Hauptfundamentalmatrix** zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ des T -periodischen, linearen, homogenen Systems $\dot{y} = A(t)y$. Als dessen Floquetmultiplikatoren werden auch die Eigenwerte von M bezeichnet. Sie sind in dem oben definierten Sinn die Floquetmultiplikatoren der trivialen (natürlich T -periodischen) Lösung $y(t) \equiv 0$ von $\dot{y} = A(t)y$.

Für periodische Lösungen von T -periodischen Differentialgleichungen haben wir den Begriff der Lyapunov-Stabilität. Man kann zeigen, dass diese äquivalent mit der Stabilität des Fixpunktes der Zeit- T -Abbildung (z.B. zum Zeitpunkt $t_0 = 0$) ist. Somit lassen sich mit Hilfe der Floquetmultiplikatoren der periodischen Lösung (In-)Stabilitäts-Kriterien angeben. Man spricht dann von einem Prinzip der linearisierten Lyapunov-Stabilität. Wie man (**Lyapunov**-) **hyperbolische periodische Lösungen** definiert, liegt auf der Hand (alle Floquetmultiplikatoren müssen einen Betrag $\neq 1$ haben). Wir werden allerdings sehen, dass periodische Lösungen autonomer Systeme niemals hyperbolisch sind, ihre *Orbits* dagegen können (orbital-) hyperbolisch sein, siehe Kap. 4.2.3.

Häufig besitzen T -periodische Differentialgleichungen kT -periodische Lösungen $u(t)$ mit Minimalperiode kT und $k > 1$. Diese entsprechen k -periodischen *Orbits* der Zeit- T -Abbildung, für die wir Stabilitäts-Kriterien haben. Die Eigenwerte dieser *Orbits* sind gerade die Floquetmultiplikatoren von $u(t)$, wenn man die DGL formal als kT -periodisch auffasst.

4.2.3 Periodische *Orbits* bei autonomen Systemen

Gegeben sei jetzt das autonome System $\dot{x} = f(x)$ — der Fall, für den wir uns besonders interessieren. Sei $u(t)$ eine T -periodische Lösung und γ zugehöriger periodischer *Orbit*. Da ein autonomes System formal T -periodisch ist für jedes $T > 0$, kann man nach dem vorangehenden Abschnitt von den **Floquetmultiplikatoren** von $u(t)$ sprechen. Mit $u(t)$ ist auch $v(t) := u(t - c)$ für jede Phasenverschiebung c eine T -periodische Lösung. Diese hat dieselben Floquetmultiplikatoren (Aufgabe!), man kann also von den **Floquetmultiplikatoren eines T -periodischen *Orbits*** eines autonomen Systems sprechen.

Wir fahren fort mit

Satz 4.5. Sei γ ein T -periodischer *Orbit* eines autonomen Systems $\dot{x} = f(x)$.

a) Jedes $z \in \gamma$ ist Fixpunkt der Zeit- T -Abbildung F .

²Nach GASTON FLOQUET, 1847-1920.



Abbildung 4.1: H. Poincaré(1854-1912)

b) Für alle $z \in \gamma$ gilt $DF(z)f(z) = f(z)$.
 Stets ist mindestens ein Floquetmultiplikator von γ gleich 1.

Beweis: Sei $u(t)$ T-periodische Lösung zu γ .
 Aus dem trivialen Teil a) folgt $F(u(t)) \equiv u(t)$ und

$$DF(u(t))\dot{u}(t) = \dot{u}(t),$$

für alle t , so dass $\xi := \dot{u}(t)$ ein Eigenvektor von $DF(u(t))$ zum Eigenwert $\mu = 1$ ist. (Beachte, dass $u(t)$ kein Gleichgewichtspunkt ist und daher $\dot{u}(t) = f(u(t)) \neq 0$). Beachte ferner, dass $f(z) = \dot{u}(t)$ für $z = u(t)$ gilt. ■

Als Konsequenz versagt das Prinzip der linearisierten *Lyapunov*-Stabilität. Es wird sich zeigen, dass Lyapunov-Stabilität das falsche Stabilitäts-Konzept für periodische Lösungen autonomer Systeme ist – im Gegensatz zur *orbitalen* Stabilität, die in Kap. 2.3 definiert wurde.

Poincaré-Abbildung bei autonomen Systemen

Da die Periode T eines periodischen Orbits eines autonomen Systems nicht von vornerein bekannt ist (im Gegensatz zu periodischen Differentialgleichungen), ist die Zeit-T-Abbildung kein geeignetes Hilfsmittel. An deren Stelle tritt die Poincaré-Abbildung, die ein diskretes dynamisches System definiert, deren Dynamik sich als äquivalent zu der des kontinuierlichen Systems herausstellen wird. Wenn man deren Fixpunkte berechnet, erhält man als Nebenprodukt die (unbekannte) Periode als *Rückkehrzeit* des Fixpunktes.

Der Trick ist die Beseitigung des störenden Floquetmultiplikators $\mu = 1$. Dies geschieht durch Betrachtung eines $n - 1$ -dimensionalen Unterraums H , der komplementär zum Tangentenvektor $f(z)$ im Punkt z eines periodischen Orbits γ ist.

Im Folgenden bezeichne ich das Skalarprodukt im \mathbb{R}^n mit $\langle u, v \rangle := u^t v$, um mit dem hochgestellten Index t (für transponiert) nicht mit der Zeit t in Konfusion zu geraten.

Wir nennen die Hyperebene $z + H$ in z **transversal** zu γ , wenn

$$\mathbb{R}^n = \langle f(z) \rangle \oplus H,$$

wobei $\langle v \rangle$ der von v aufgespannte Unterraum ist.

Lemma 4.6. *Sei H durch*

$$H := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle w, x \rangle = 0\} \quad \text{mit einem } w \neq 0$$

beschrieben. Dann ist $z + H$ genau dann zum periodischen Orbit γ im Punkt z transversal, wenn

$$\langle w, f(z) \rangle \neq 0. \quad (4.7)$$

Man nennt eine H -Umgebung $U \subset z + H$ von z einen **lokalen, transversalen Schnitt** des Orbits γ in z , wenn

$$\langle w, f(x) \rangle \neq 0 \quad \text{für alle } x \in U. \quad (4.8)$$

Geometrisch bedeutet dies, dass alle Bahnen $\gamma(x)$ für $x \in U$ den transversalen Schnitt *transversal* durchstoßen, s. Fig.1.13 in KUZNETSOV.

Aus Stetigkeitsgründen (f ist stetig) gibt es zu einer in z transversalen Hyperebene stets einen lokalen, transversalen Schnitt.

Satz 4.7. *Sei γ ein T -periodischer Orbit eines autonomen Systemes $\dot{x} = f(x)$ und $z + H$ eine in $z \in \gamma$ transversale Hyperebene. Dann gilt:*

Es gibt einen lokalen transversalen Schnitt U von γ in z und eine Funktion $\tau : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

- $\tau(z) = T$
- Für alle $x \in U$ gilt $\varphi^{\tau(x)}(x) \in z + H$.
- τ ist stetig-differenzierbar.

Die **Rückkehrzeit** $\tau(x)$ ist in folgendem Sinne eindeutig: Die Umgebung U kann soweit verkleinert werden, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass aus $x \in U$, $\varphi^t(x) \in z + H$ und $|t - T| < \varepsilon$ folgt, dass $t = \tau(x)$.

Die Poincaré-Abbildung

$$\Pi : U \rightarrow z + H, \quad x \mapsto \varphi^{\tau(x)}(x)$$

ist stetig-differenzierbar und hat z zum Fixpunkt.

Bemerkung: Von Differenzierbarkeit von Funktionen auf $z + H$ darf gesprochen werden, da $z + H$ mit dem \mathbb{R}^{n-1} identifiziert werden kann.

Beweis: Wende den Satz über Implizite Funktionen an auf die mit Hilfe der *Treff-Funktion*

$$g(x, t) := \langle w, (\varphi^t(x) - z) \rangle, \quad g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

definierte nichtlineare Gleichung $g(x, t) = 0$ mit dem Aufpunkt $g(T, z) = 0$. Beachte, dass $g(x, t) = 0$ genau dann, wenn $\varphi^t(x) \in z + H$ und dass

$$\frac{\partial g}{\partial t}(z, T) = \langle w, f(z) \rangle \neq 0,$$

so dass $g(t, x) = 0$ nach t aufgelöst werden kann. ■

Wie schon mehrfach erwähnt, sind die Eigenwerte von Fixpunkten, hier die $n - 1$ Eigenwerte von $D\Pi(z)$, für Stabilitätsfragen wichtig, siehe Satz 3.9. Ein ganz zentraler Satz in diesem Zusammenhang ist der folgende

Satz 4.8. *Für jede Poincaré-Abbildung sind die $n - 1$ Eigenwerte von $D\Pi(z)$ zusammen mit $\mu = 1$ gerade die n Floquetmultiplikatoren des periodischen Orbits.*

Beweis: Man mache sich zunächst klar, dass zwei verschiedene Poincaré-Abbildungen zueinander C^1 -konjugiert sind, so dass ihre Fixpunkte gleiche Eigenwerte haben müssen. Sodann wähle man eine ganz spezielle Hyperebene, für die $D\Pi(z)$ als Diagonal-Block in $DF(z)$ mit der Zeit-T-Abbildung F vorkommt. ■

Beispiel: Das ebene System in Polarkoordinaten $\dot{r} = 1 - r, \dot{\varphi} = 1$ hat offensichtlich den durch $r = 1$ gegebenen Kreis zum periodischen Orbit. Legt man den transversalen Schnitt senkrecht zum Kreis, so gilt $\Pi(r) = 1 + (r - 1)e^{-2\pi}$.

Nichtautonome Differentialgleichungen werden zu autonomen

In manchen Lehrbüchern wird eine gesonderte Stabilitäts-Theorie der periodischen Lösungen nichtautonomer Systeme vermieden, indem die Zeit t zur $n + 1$ -ten Zustandsvariable $x_{n+1} := t$ durch Hinzufügung der Differentialgleichung

$$\dot{x}_{n+1} = 1$$

wird und x_{n+1} nur modulo T gerechnet wird. Dann ist der Zustandsraum von dem so erweiterten autonomen System für $T = 2\pi$ die Mannigfaltigkeit $\tilde{D} := D \times S^1$, wobei S^1 der Einheitskreis ist.

Die Zeit-T-Abbildung wird nun zur Poincaré-Abbildung, wenn $H = \mathbb{R}^n$, der zu den ersten n Komponenten gehörende Raum, gewählt wird.

Orbitale Stabilität

Wir wissen bereits, dass stets ein Floquetmultiplikator einer periodischen Lösung eines autonomen Systems Eins ist. Das Prinzip der linearisierten (Lyapunov-) Stabilität versagt also. Das macht nichts, da (asymptotische) Lyapunov-Stabilität sowieso das falsche Konzept für periodische Lösungen autonomer Systeme ist. Ein Grund hierfür ist, dass letztere niemals asymptotisch Lyapunov-stabil sein können, da zwei um eine beliebig kleine Phase verschobenen periodischen Lösungen immer im „gebührligen Abstand“ bleiben.

Weiterhin sind die periodischen Lösungen des mathematischen Pendels $\ddot{x} = \sin(x)$ noch nicht einmal Lyapunov-stabil, da die Perioden benachbarter Orbits verschieden sind. (Dies ist ein Hamilton-System, beide Floquetmultiplikatoren sind $= 1$).

Das vernünftige Konzept ist das der *orbitalen (asymptotischen) Stabilität*, welche als (asymptotische) Stabilität des periodischen Orbits als invariante Menge des Flusses definiert ist, siehe Kap. 2.3. Nach folgendem Satz ist dieses gleichwertig zu der (asymptotischen) Stabilität eines Punktes des Orbits als Fixpunkt einer zugehörigen Poincaré-Abbildung:

Satz 4.9. *Sei γ ein periodischer Orbit und Π eine Poincaré-Abbildung zu $z \in \gamma$. Dann ist γ genau dann orbital (asymptotisch, in-)stabil, wenn z (asymptotisch, in-)stabiler Fixpunkt von Π ist.*

Beweis: Ich beweise nur, dass aus der Stabilität von z die orbitale Stabilität von γ folgt. Hierbei haben wir es mit einer Reihe von verschiedenen Umgebungen zu tun, einerseits Umgebungen von γ , andererseits Umgebungen von z in der Hyperebene $z + H$. Erstere erhalten den Index γ , zweite den Index z . Ferner sei mit U ein lokaler transversaler Schnitt in $z + H$ gegeben, auf dem Π definiert ist.

Sei also U_γ gegeben. Wir müssen V_γ finden mit

$$x \in V_\gamma \implies \varphi^t(x) \in U_\gamma \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

Benutzen dürfen wir, dass es zu jedem U_z ein V_z gibt mit

$$x \in V_z \implies \Pi^k(x) \in U_z \quad \text{für alle } k \geq 0.$$

Der Definitionsbereich U von Π kann so gewählt werden, dass $T_0 := \sup_{x \in U} \tau(x) < \infty$. Da $(t, x) \mapsto \varphi^t(x)$ auf Kompakta gleichmäßig stetig ist, gibt es U_z mit

$$x \in U_z \implies \varphi^t(x) \in U_\gamma \quad \text{für alle } t \in [0, T_0].$$

Wähle gemäß der Stabilität von z eine Umgebung V_z und sodann

$$V_\gamma := \{\varphi^t(x) : x \in V_z, t \in [0, \tau(x)]\}.$$

Startet also ein Orbit in V_z , so verbleibt dieser zukünftig in U_γ , da die Poincaré-Iterierten in U_z liegen und nach Konstruktion von U_z der Orbit auch zwischen zwei Rückkehrzeiten stets in U_γ verbleibt.

Startet ein Orbit in V_γ , so können wir ihn uns nach Definition von V_γ in V_z gestartet denken.

■

Zum Glück lassen sich für orbitale Stabilität ebenfalls „lineare“ Stabilitäts-Kriterien mit Hilfe der Floquetmultiplikatoren formulieren: Man schmeiße nur den lästigen „trivialen“ Floquetmultiplikator Eins weg, den man der Autonomie verdankt.

Satz 4.10. *Sei $\mu = 1$ ein algebraisch einfacher Floquetmultiplikator eines periodischen Orbits γ .*

a) *Sind alle anderen Floquetmultiplikatoren vom Betrage < 1 , so ist γ asymptotisch stabil.*

b) *Gibt es einen Floquetmultiplikator mit Betrag > 1 , so ist γ instabil.*

Diesen Satz beweist man mit Hilfe von Poincaré-Abbildungen. Die $n - 1$ Floquetmultiplikatoren ohne $\mu = 1$ sind gerade die Eigenwerte des Fixpunktes z irgendeiner Poincaré-Abbildung.

Man nennt einen periodischen Orbit γ **hyperbolisch**, wenn alle Floquetmultiplikatoren bis auf $\mu = 1$ vom Betrage $\neq 1$ und $\mu = 1$ algebraisch einfach ist. Er ist genau dann hyperbolisch, wenn irgendeine Poincaré-Abbildung einen hyperbolischen Fixpunkt besitzt.

Offensichtlich ist ein periodischer Orbit des mathematischen Pendels nicht hyperbolisch. Dies liegt an der Hamiltonstruktur. Zum Trost: Jeder periodische Orbit ist hier wenigstens noch stabil.

4.2.4 Der Satz von Liouville

Hier geht es um die Frage, wie sich der Inhalt einer Menge $B \subset \mathbb{R}^n$ unter dem Fluss φ^t zu $\dot{x} = f(x)$ verändert. Sei $B(t) := \varphi^t(B)$ und $|B(t)|$ sein Inhalt. Die Substitutionsregel für Integrale mehrerer Veränderlicher ergibt

$$|B(t)| = \int_{B(t)} dy = \int_B |\det D\varphi^t(x)| dx.$$

Nun sein $A(t, x) := Df(\varphi^t(x))$ und $Y(t, x)$ die Hauptfundamentalmatrix zu $\dot{y} = A(t, x)y$. Dann folgt aus Satz 3.2 (Variationsgleichungen)

$$|B(t)| = \int_B |\det Y(t, x)| dx. \tag{4.9}$$

Jetzt kommt

Der lineare Fall

ins Spiel. Dazu betrachte das lineare, zeitvariante System $\dot{y} = A(t)y$, ein zugehöriges Fundamentalsystem $Y(t)$ und die *Wronskideterminante* $w(t) := \det Y(t)$. Es gilt (s. WIRSCHING, Satz 5.4)



Abbildung 4.2: J. Liouville (1809-1882)

Satz 4.11. *Es gilt $\dot{w} = \text{Spur}(A(t))w$, also*

$$w(t) = w(t_0)e^{\int_{t_0}^t \text{Spur} A(s)ds}.$$

Beweis: Seien $y^j(t)$ die (linear unabhängigen) Spalten von $Y(t)$, $j = 1, 2, \dots, n$. Bezeichne mit $D(a^1, \dots, a^n)$ die Determinante einer Matrix A mit den Spalten a^j , $j = 1, \dots, n$. Dann ist nach bekannten Regeln

$$\begin{aligned} w(t+h) - w(t) &= D(y^1(t+h) - y^1(t), y^2(t+h), \dots, y^n(t+h)) + \\ &\quad D(y^1(t), y^2(t+h) - y^2(t), \dots, y^n(t+h)) + \\ &\quad \dots\dots\dots \\ &\quad D(y^1(t), \dots, y_{n-1}(t), y_n(t+h) - y_n(t)). \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\dot{w}(t) = \sum_{j=1}^n D(y^1(t), \dots, \dot{y}^j(t), \dots, y^n(t)).$$

Setzt man $B(t) := Y(t)^{-1}A(t)Y(t)$, verwendet $\dot{y}^j(t) = A(t)y^j(t)$ und $\text{Spur}(A(t)) = \text{Spur}(B(t))$, so folgt wegen

$$\dot{y}^j(t) = \sum_{k=1}^n y^k(t)b_{kj}(t)$$

die Behauptung. ■

Da die Determinante einer Matrix das Volumen eines Parallelepipeds mit den Spalten von A als Kanten ist, folgt aus dem Satz 4.11, wie sich der Inhalt eines Parallelepipeds unter dem Fluss zu $\dot{y} = A(t)y$ zeitlich ändert. Das Vorzeichen von $\text{Spur}(A(t))$ entscheidet, ob momentan eine Zunahme oder Abnahme erfolgt. Ist $\text{Spur}(A(t)) \equiv 0$, so bleibt der Inhalt von Parallelepipeds unverändert (er kann aber in einigen Richtungen gestaucht, in anderen gedehnt werden).

Dieser Fall tritt bei parametererregten, reibungsfreien, linearen Schwingungen

$$\ddot{x} + D(t)x = F(t)$$

auf.

Ist $A(t)$ T -periodisch und $Y(t)$ die Hauptfundamentalmatrix zum Zeitpunkt $t_0 = 0$, so gibt es ja eindeutige n Floquetmultiplikatoren $\mu_j, j = 1, \dots, n$, der Null-Lösung — die Eigenwerte von $Y(T)$. Für diese gilt $0 < \det(Y(T)) = \prod_{j=1}^n \mu_j$. Also folgt aus Satz 4.11

$$e^{\int_0^T \text{Spur } A(s) ds} = \prod_{j=1}^n \mu_j > 0. \quad (4.10)$$

Dieser Satz ist sehr mächtig und erlaubt insbesondere für periodische Orbits ebener Systeme Rückschlüsse auf deren Stabilität (s. nachfolgenden Abschnitt und die Übungen).

Der nichtlineare Fall

Betrachte jetzt $\dot{x} = f(x)$.

Eine direkte Folge aus (4.10) ist, dass für ebene autonome Systeme der nichttriviale Floquetmultiplikator eines periodischen Orbits stets positiv ist. Setzt man

$$\Delta := \int_0^T \text{Spur } A(s) ds$$

mit $A(s) := Df(u(s))$ und zugehöriger T -periodischer Lösung $u(t)$, so haben wir

$$\Delta = \int_0^T \text{div } f(u(s)) ds$$

und für die Floquetmultiplikatoren des periodischen Orbits γ

$$e^\Delta = \prod_{j=1}^n \mu_j > 0.$$

Wir fassen dies zusammen:

Satz 4.12. *Sei γ ein T -periodischer Orbit von $\dot{x} = f(x)$ und $\mu_j, j = 1, 2, \dots, n$ seine Floquetmultiplikatoren mit $\mu_1 = 1$. Sei*

$$\Delta := \int_0^T \text{Spur } A(s) ds$$

mit $A(s) = Df(u(s))$ mit einer zu γ gehörenden periodischen Lösung $u(t)$. Dann gilt

$$e^\Delta = \prod_{j=2}^n \mu_j > 0.$$

Ist $n = 2$, so gilt

$$e^\Delta = \mu_2 > 0.$$

Jetzt folgt sofort, dass γ orbital instabil sein muss, wenn $\Delta > 0$, und dass $\Delta < 0$ ist, falls γ asymptotisch stabil und hyperbolisch ist und dass sich für ebene Systeme die letzte Aussage umkehren lässt.

Jetzt wenden wir uns (4.9) zu. Es ist

$$|\det Y(t, x)| = \det Y(t, x) = e^{\int_0^t \operatorname{div} f(\varphi^s(x)) ds},$$

so dass nun gilt:

Satz 4.13. *Es gilt*

$$|B(t)| = \int_B e^{\int_0^t \operatorname{div} f(\varphi^s(x)) ds} dx$$

bzw.

$$\frac{d}{dt} |B(t)| \Big|_{t=0} = \int_B \operatorname{div} f(x) dx.$$

Als Korollar erhalten wir einen **volumenerhaltenden Fluß**, falls $\operatorname{div} f(x) \equiv 0$, einen volumenvermindernden Fluß, falls überall $\operatorname{div} f(x) < 0$ und einen volumenvermehreren Fluß, falls überall $\operatorname{div} f(x) > 0$.

Man kann diese Aussagen physikalisch deuten, wenn man das Vektorfeld als Geschwindigkeitsfeld und die Orbits als Flusslinien betrachtet. Die Bedingung $\operatorname{div} f(x) \equiv 0$ ist eine Inkompressibilitätsbedingung, so dass die Volumenerhaltung physikalisch einleuchtend ist.

Eine große Klasse volumenerhaltender Flüsse liefern die sogenannten **Hamiltonsysteme**, die in kanonischer Form durch

$$\dot{p} = H_q(p, q), \quad \dot{q} = -H_p(p, q)$$

gegeben sind.

Für periodische Orbits *ebener* Systeme lassen sich hinreichende Bedingungen für die Nichtexistenz periodischer Orbits formulieren: Da diese geschlossenen Orbits eine beschränkte, einfach zusammenhängende Menge B einschließen, die unter dem Fluss fix bleibt, können periodische Orbits in solchen einfach zusammenhängenden Gebieten nicht existieren, in denen durchgängig die Divergenz des Vektorfeldes f positiv oder negativ ist (Stichwort: *Bendixson's oder Dulac's Kriterium*).

Kapitel 5

Verzweigungen

5.1 Einleitung

Wir betrachten parameterabhängige (kontinuierliche bzw. diskrete) dynamische Systeme

$$\dot{x} = f(x, \lambda), \quad \text{bzw.} \quad x^{(k+1)} = F(x^{(k)}, \lambda),$$

wobei die diskreten dynamischen Systeme über die Zeit-T-Abbildungen bei T-periodischen oder über Poincaré-Abbildungen bei autonomen Differentialgleichungen ins Spiel kommen können¹. Wir nehmen an, dass f , bzw. F stetig-differenzierbare Funktionen von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ nach \mathbb{R}^n sind ($D = \mathbb{R}^n$), d.h. wir untersuchen die Abhängigkeit des Systems, speziell ihrer Gleichgewichtspunkte bzw. Fixpunkte und deren Stabilität von den p Parametern λ , wobei meist $p = 1$ sein wird.

Immer dann, wenn von Fixpunkten von Abbildungen die Rede ist, so haben wir meist periodische Lösungen T-periodischer Differentialgleichungen oder periodische Orbits von autonomen Differentialgleichungen im Auge.

Man spricht ganz allgemein von einer *Verzweigung* beim *Verzweigungsparameter* $\lambda = \lambda_c \in \mathbb{R}^p$, falls in jeder noch so kleinen Umgebung von λ_c zwei Parameter λ_1 und λ_2 existieren, so dass die dynamischen Systeme, d.h. ihre Flüsse, *qualitativ verschieden* sind für $\lambda = \lambda_1$ und für $\lambda = \lambda_2$.

Dies ist so noch eine unpräzise Definition (s. auch WIGGINS, S.258), da man definieren muss, was man unter *qualitativ verschieden* versteht. Man kann eine solche Definition vermeiden, wenn man sich auf die Dynamik in einer Umgebung von Gleichgewichtspunkten bzw. von Fixpunkten konzentriert. Eine typische mit einer Verzweigung verbundene Situation ist dann die, dass bei Variation eines Parameters λ und Überschreitung eines *kritischen Parameters* λ_c diese (Gleichgewichtspunkte bzw. Fixpunkte) ihre Stabilität verlieren oder gewinnen oder

¹Es ist aber sehr sinnvoll, diskrete dynamische Systeme an sich, also ohne Bezug auf Differentialgleichungen zu betrachten.

allgemeiner, wenn die Anzahl der „instabilen Eigenwerte“ sich ändert. Insofern ist die (lokale) Verzweigungstheorie eng mit Stabilitätstheorie verbunden.

Stabilität kann bei *hyperbolischen* Gleichgewichtspunkten bzw. Fixpunkten mit Hilfe des Prinzips der linearisierten Stabilität und der Eigenwerte von gewissen Jacobimatrizen entschieden werden. Mit Hilfe des Satzes über Implizite Funktionen kann man zeigen, dass hyperbolische Gleichgewichtspunkte bzw. Fixpunkte *strukturell stabil* sind (s. Kap. 5.2). In der Regel liegt demnach eine Verzweigung vor, wenn die betrachteten Gleichgewichtspunkte bzw. Fixpunkte **nichthyperbolisch** sind, wenn sie also Eigenwerte auf der imaginären Achse (Gleichgewichtspunkte) bzw. Eigenwerte vom Betrage Eins (Fixpunkte) haben.

In diesem Fall spricht man auch von einer *lokalen Verzweigung*, weil die *qualitativ unterschiedlichen* Dynamiken allein schon in einer Umgebung der Gleichgewichtspunkte bzw. der Fixpunkte erkennbar sind. (Im Gegensatz hierzu ist z.B. die Bildung eines homoklinen Orbits eine *globale* Verzweigung. Auch das Auftreten von Chaos kann als globale Verzweigung verstanden werden.)

Im Mittelpunkt stehen sog. *Kodimension-1-Verzweigungen*, die schon bei nur einem Parameter ($p = 1$) angetroffen werden und strukturell stabil gegenüber Störungen der Vektorfelder f bzw. F sind². Hierzu zählen **Umkehrpunkte**³, die i.W. durch einen Eigenwert $\mu = 0$ von Gleichgewichtspunkten bzw. $\mu = 1$ von Fixpunkten (siehe Kap. 5.3), **Hopfpunkte**, die durch ein Paar rein imaginärer, komplex-konjugierter Eigenwerte von Gleichgewichtspunkten (s. Kap. 5.4) bzw. durch ein Paar nicht-reeller komplex-konjugierter Eigenwerte von Fixpunkten vom Betrag Eins (letztere werden auch Naimark–Sacker–Verzweigungen genannt und entsprechen bei Fixpunkten von Poincaré-Abbildungen sog. **Torusverzweigungen**) und schließlich **Periodenverdopplungen** bei Fixpunkten, die durch einen Eigenwert $\mu = -1$ charakterisiert sind.

Dabei bilden die Hopfpunkte eine Art Brücke zwischen den Verzweigungen bei Gleichgewichtspunkten und denen bei Fixpunkten. Denn in Hopfpunkten entstehen periodische Orbits, die als Fixpunkte von Poincaré-Abbildungen aufgefasst werden können und ihrerseits wieder Verzweigungen (Umkehrpunkte, Periodenverdopplungen und Torusverzweigungen) unterliegen können, wenn ihre Floquetmultiplikatoren den Einheitskreis durchbrechen.

Hiervon zu unterscheiden sind die *Verzweigungen höherer Kodimension* k ($k > 1$), die „in der Regel“ nur bei Variation von k Parametern gefunden werden. Hierzu zählen das Zusammenfallen einer Hopf–Verzweigung mit einer statischen Verzweigung (*Hopf–steady state mode interaction*), die *Takens–Bogdanov–Verzweigung*, der Zusammenfall von zwei Hopf–Verzweigungen (*Hopf–Hopf mode interaction*), aber auch der *Hysteresispunkt* (oder *kubische Umkehrpunkt*) und der *entartete Hopfpunkt* sowie der *entartete Pitchfork* (alle $k = 2$).

²D.h., bei kleinen Störungen trifft man auf gleichartige Verzweigungen.

³sowie **unterraumbrechende Verzweigungspunkte**, und **Pitchforks**, die letzten beiden unter der Annahme der Existenz von flussinvarianten Unterräumen, verursacht z.B. durch *Symmetrien*.

5.2 Hyperbolische Gleichgewichtspunkte und Fixpunkte

Hier soll skizziert werden, warum in hyperbolischen Gleichgewichtspunkten und Fixpunkten keine lokale Verzweigung stattfindet.

Sei x_0 Gleichgewichtspunkt von $\dot{x} = f(x, \lambda)$ für einen reellen Parameter $\lambda = \lambda_0$ (es ist $p = 1$) und $A_0 := f_x(x_0, \lambda_0)$ die zugehörige Jacobimatrix. Wenn A_0 regulär ist (wir nennen dann den Gleichgewichtspunkt **regulär** oder **nicht-entartet**), wenn also $\mu = 0$ kein Eigenwert von A_0 ist, gibt es nach dem Satz über Implizite Funktionen (im Folgenden **SIF** genannt) eine Umgebung U_0 von (x_0, λ_0) und eine C^k -Funktion⁴ $x(\lambda)$, definiert in einer Umgebung von λ_0 , so dass aus $f(x, \lambda) = 0$, $(x, \lambda) \in U$ folgt, dass $x = x(\lambda)$. Klar, dass $x(\lambda)$ eindeutig ist und $x(\lambda_0) = x_0$ erfüllt. Wir haben also $f(x, \lambda) = 0$ lokal nach $x = x(\lambda)$ „aufgelöst“. Man spricht von einem auf einer Umgebung $\Lambda := U_{\lambda_0}$ von λ_0 definierten **Zweig** $(\lambda, x(\lambda))$ von Gleichgewichtspunkten als Graph von $x(\lambda)$.

Nun sei $A(\lambda) := f_x(x(\lambda), \lambda)$ für $\lambda \in \Lambda$. Dann ist $A(\lambda)$ eine C^{k-1} -Funktion von Λ nach $\mathbb{R}^{n \times n}$. Da $k \geq 1$, handelt es sich also um eine *stetige* Schar von reellen $n \times n$ -Matrizen $A(\lambda)$ mit Scharparameter λ . Daher hängen die Eigenwerte von $A(\lambda)$ stetig von λ ab (ein durchaus tiefliegender Satz — die Nullstellen von Polynomen hängen stetig von den Polynomkoeffizienten ab) — man kann sich *Eigenwertfilme* vorstellen, wobei der Parameter λ die Rolle der Zeit übernimmt. Man hat dann stetige Eigenwertkurven in der komplexen Ebene.

Ist nun x_0 *hyperbolisch*, so kann man \mathbf{L} so klein wählen, dass sich die Anzahl der stabilen und instabilen Eigenwerte von $A(\lambda)$ für $\lambda \in \mathbf{L}$ nicht ändert (und $x(\lambda)$ also hyperbolisch bleibt). Dies kann man so deuten, dass die Flüsse in einer Umgebung von $x(\lambda)$ *qualitativ* gleich sind, also in $\lambda = \lambda_0$ keine lokale Verzweigung stattfindet. Kurz: **In hyperbolischen Gleichgewichtspunkten findet keine lokale Verzweigung statt.**

Entsprechendes gilt natürlich auch für Fixpunkte, wobei man *reguläre Fixpunkte* durch $1 \notin \sigma(A_0)$ mit $A_0 := F_x(x_0, \lambda_0)$ definiert. Dann kann SIF man auf $F(x, \lambda) - x = 0$ anwenden.

Man kann noch weiter gehen: Wenn man die Vektorfelder selbst als Parameter in Gestalt einer Teilmenge eines Banachraumes auffasst und einen SIF in Banachräumen anwendet, so kann man hyperbolische Gleichgewichtspunkte bzw. Fixpunkte als strukturell stabil ansehen, da ein „ C^k -Wackeln“ am Vektorfeld zu einem „ C^k -Wackeln“ der Gleichgewichtspunkte und zu einem stetigen Wackeln ihrer Eigenwerte (bzw. einem „ C^k -Wackeln“ ihrer algebraisch einfachen Eigenwerte führt, so dass sich die Anzahl der stabilen Eigenwerte nicht ändert.

5.3 Umkehrpunkte

Wir beschränken uns auf kontinuierliche dynamische Systeme. Die Analogie zu diskreten dynamischen Systemen ist offensichtlich.

⁴Sei $f \in C^k$.

Der am einfachsten vorzustellende Verlust der Hyperbolizität (und damit evtl. auch der Stabilität) besteht darin, dass der Gleichgewichtspunkt x_0 eine *singuläre* Jacobimatrix A_0 besitzt. Typischerweise (man spricht auch von *generisch*) gilt

- Der Rangabfall ist eins, d.h. der Rang von A_0 ist $n - 1$ (bzw. — hierzu äquivalent — der Kern von A_0 ist eindimensional)
- $f_\lambda(x_0, l_0) \notin \mathcal{R}(A_0)$, wobei $\mathcal{R}(A_0)$ das *Bild* (engl. *Range*) von A_0 ist.

In diesem Fall nennen wir x_0 einen **Umkehrpunkt** (engl. *Fold*) von $\dot{x} = f(x, \lambda)$ für $\lambda = \lambda_0$. Man sagt auch kurz, dass das Paar (x_0, λ_0) ein Umkehrpunkt ist.

Bemerkung: Für $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^n)$ sind nach einem Satz von SARD fast alle $y \in \mathbb{R}^n$ in dem Sinne „gutartig“, dass die (globale!) Lösungsmenge $\{z \in \mathbb{R}^{n+1} : f(z) = y\}$ eine eindimensionale C^∞ -Mannigfaltigkeit ist. Kennt man z_0 mit $f(z_0) = y$ und ist man nur an der Lösungsmenge in einer Umgebung U_z von z_0 interessiert, so lehrt uns der Beweis des nächsten Satzes 5.1, dass die lokale Lösungsmenge $\{z \in U_z : f(z) = y\}$ eine eindimensionale C^∞ -Mannigfaltigkeit ist, wenn gilt: Die $n \times (n + 1)$ -Matrix $Df(z_0)$ hat maximalen Rang n .

In unserer Situation setze man $z = (x, \lambda)$ und $y = 0$. Man sieht sehr leicht ein, dass die beiden Bedingungen eines Umkehrpunktes gerade $\text{Rang}(Df(x_0, \lambda_0)) = n$ impliziert. Und dass umgekehrt aus $\text{Rang}(Df(x_0, \lambda_0)) = n$ und der Singularität von $f_x(x_0, \lambda_0)$ die beiden Umkehrpunkt-Bedingungen folgen.

In den Anwendungen wird die Lösungsmenge meist in einem ebenen Koordinatensystem gezeigt, in dem die horizontale Achse die λ -Achse ist. Vertikal wird irgendein Charakteristikum von x aufgetragen, z.B. die Norm oder eine Komponente. Man spricht dann auch von einem *Lösungsdiagramm*.

Satz 5.1. *Sei x_0 ein Umkehrpunkt für $\lambda = \lambda_0$. Dann gibt es eine Umgebung U von (x_0, λ_0) , so dass gilt: $f^{-1}(0) \cap U$ ist eine eindimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit (Kurve)*

$$\mathcal{C} = \{(x(s), \lambda(s)) : s \in J := (-\varepsilon, \varepsilon)\}, \varepsilon > 0$$

mit Funktionen $x \in C^k(J, \mathbb{R}^n)$, $\lambda \in C^k(J, \mathbb{R})$, die $x(0) = x_0$ und $\lambda(0) = \lambda_0$ erfüllen (sowie $x'(s), \lambda'(s) \neq 0$ für alle s).

Bemerkung: $f^{-1}(0) \cap U = \mathcal{C} = \{(x(s), \lambda(s)) : s \in J := (-\varepsilon, \varepsilon)\}, \varepsilon > 0$ impliziert

$$f(x(s), \lambda(s)) = 0 : s \in J$$

sowie

$$f(x, \lambda) = 0, (x, \lambda) \in U \implies \exists s \in J : (x, \lambda) = (x(s), \lambda(s)).$$

Beweis folgt wieder aus dem Satz über Implizite Funktionen — nur, dass man $f^{-1}(0) \cap U$ bzw. die Kurve \mathcal{C} nicht mit Hilfe von λ parametrisieren kann.

Nach Voraussetzung ist der Rang der $n \times (n+1)$ -Matrix $Df(x_0, \lambda_0)$ (maximal) gleich n , durch Vertauschung der letzten Spalte mit einer geeigneten anderen (sagen wir der i -ten) Spalte erreicht man die Regularität des vorderen $n \times n$ -Blocks. Der dann nach SIF garantierte Zweig (man kann nach allen Variablen $x_j, j \neq i$ als Funktion von x_i auflösen) ist dann durch $s = x_i$ parametrisierbar. (Es sind jedoch auch andere Parametrisierungen denkbar, z.B. durch die Bogenlänge). ■

Im Folgenden setzen wir abkürzend

$$f_x^0 := f_x(x_0, \lambda_0), \quad f_\lambda^0 := f_\lambda(x_0, \lambda_0), \dots$$

Differenziert man die Identität $f(x(s), \lambda(s)) \equiv 0$ nach s an der Stelle $s = 0$, so erhält man

$$f_x^0 x'(0) + f_\lambda^0 \lambda'(0) = 0, \tag{5.1}$$

und aus den Eigenschaften eines Umkehrpunktes erhält man $\lambda'(0) = 0$ (machen Sie sich dies klar!), d.h. $s \mapsto \lambda(s)$ hat in $s = 0$ ein Extremum.

Definition 5.2. Sei x_0 ein Umkehrpunkt für $\lambda = \lambda_0$. Zusätzlich sei $\lambda''(0) \neq 0$, d.h. $s \mapsto \lambda(s)$ hat ein striktes Minimum oder Maximum in $s = 0$. Dann heißt x_0 ein **quadratischer Umkehrpunkt** für $\lambda = \lambda_0$.

Offensichtlich bekommt der Name *Umkehrpunkt* in diesem „quadratischen Fall“ einen geometrischen Sinn. Wenn wir im Folgenden von *Umkehrpunkten* sprechen, sind stets *quadratische Umkehrpunkte* gemeint.

Man kann sehen, dass die Bedingung $\lambda''(0) \neq 0$ und insbesondere das Vorzeichen von $\lambda''(0) \neq 0$ nicht von der Parametrisierung von \mathcal{C} abhängt.

Zur geometrischen Deutung s. auch Abb. 5.1.

Es ist klar, dass es eine Umgebung U_0 von x_0 gibt, so dass es für $\lambda < \lambda_0$ zwei und für $\lambda > \lambda_0$ keinen Gleichgewichtspunkt in U_0 gibt (oder andersherum). In einem Umkehrpunkt fallen zwei Gleichgewichtspunkte zusammen und hören auf zu existieren. Oder anders herum: Aus dem Nichts entstehen zwei Gleichgewichtspunkte.

Ein wichtiger und sehr einfach zu analysierender Fall ist der für $n = 1$:

Satz 5.3. Im Falle $n = 1$ ist x_0 ein (quadratischer) Umkehrpunkt genau dann, wenn neben $f(x_0, \lambda_0) = 0$ die drei Bedingungen

$$f_x^0 = 0, \quad f_\lambda^0 \neq 0, \quad f_{xx}^0 \neq 0 \tag{5.2}$$

erfüllt sind.

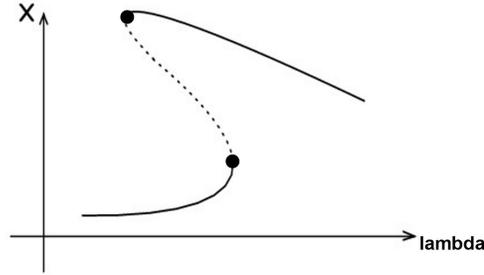


Abbildung 5.1: Zwei Umkehrpunkte

5.3.1 Stabilitätsanalyse

Jetzt stellen wir die Frage nach einem Stabilitätswechsel längs des Zweiges \mathcal{C} in $s = 0$. Hierzu zunächst ein in meinem Skript aus dem Jahre 1994 bewiesener

Satz 5.4. x_0 sei ein (quadratischer) Umkehrpunkt für $\lambda = \lambda_0$ mit einem Zweig $\mathcal{C} = \{(x(s), \lambda(s)) : |s| < \varepsilon\}$ durch (x_0, λ_0) (für $s = 0$). Dann gilt für $d(s) := \det(f_x(x(s), \lambda(s)))$, dass $d(0) = 0$ und $d'(0) \neq 0$. Insbesondere ist $x(s)$ für $s \neq 0$ hyperbolisch, falls $|s|$ hinreichend klein und x_0 außer $\mu = 0$ keinen weiteren Eigenwert auf der imaginären Achse hat.

In einem Umkehrpunkt findet häufig ein Stabilitätswechsel statt: Sei $x(s)$ für $s < 0$ (bzw. für $s > 0$) asymptotisch stabil. Dann ist $x(s)$ instabil für $s > 0$ (bzw. für $s < 0$).

Der typische Fall für einen Umkehrpunkt ist, dass $\mu = 0$ algebraisch einfacher Eigenwert von f_x^0 ist. In diesem Fall kann man zeigen, dass die Eigenwertgleichung

$$f_x(x(s), \lambda(s))u(s) = \mu(s)u(s)$$

mit glatten Eigenwerten $\mu(s)$ und Eigenvektoren $u(s) \neq 0$ erfüllbar ist (s. Übungsaufgabe). Aus $d'(0) \neq 0$ folgt sofort $\mu'(0) \neq 0$. In diesem Fall ist die Umkehrpunkt-Bedingung $\lambda''(0) \neq 0$ also eine Transversalitätsbedingung für Eigenwerte: Eine (reelle) Eigenwertkurve von $A(\lambda)$ durchstößt die imaginäre Achse im Nullpunkt.

Umkehrpunkte haben in der (englisch-sprachigen) Literatur die verschiedensten Namen, z.B. *turning points*. In der Theorie der dynamischen Systeme werden sie *saddle-node bifurcation points*, s. GUCKENHEIMER–HOLMES, S.148, WIGGINS, S.260, in der ingenieurwissenschaftlichen Literatur *limit points*, in der Katastrophentheorie *fold points* und sonst zuweilen auch Punkte mit *tangentialer Verzweigung* genannt.

5.3.2 Dynamik

Wir wenden uns der Frage zu, wie sich die Phasenportraits qualitativ in der Nähe U_0 eines Umkehrpunktes x_0 ändern, wenn λ den kritischen Parameter λ_0 überschreitet. Hierzu nehmen wir an, dass in U_0 für $\lambda < \lambda_0$ zwei Gleichgewichtspunkte existieren, von denen einer stabil, der andere instabil ist, für $\lambda > \lambda_0$ aber kein Gleichgewichtspunkt vorhanden ist.

Für $n = 2$ muss der instabile Gleichgewichtspunkt ein Sattelpunkt, der stabile ein Knoten sein (jedenfalls für kleine $|\lambda - \lambda_0|$). Daher spricht man auch von *saddle-node bifurcation*.

Für $n = 1$ ist die Situation noch einfacher.

5.3.3 Beispiele für Umkehrpunkte

Normalform:

Sei $n = 1$ und $f(x, \lambda) = ax^2 - \lambda$. Ein (quadratischer) Umkehrpunkt liegt nur im Falle $a \neq 0$ in $(x_0, \lambda_0) = (0, 0)$ vor. Zeichne \mathcal{C} und diskutiere das Stabilitätsverhalten der Gleichgewichtspunkte. Siehe auch Beispiel 3.1.1 in WIGGINS, S.255.

v. Mises–Stabwerk:

Hat man allgemein ein konservatives mechanisches System mit n Freiheitsgraden, $x \in \mathbb{R}^n$, so entsprechen die strikten Minima der potentiellen Energie $V(x)$ und allgemein die Nullstellen des Gradienten $f(x) := DV(x)$ (stabilen) Gleichgewichtspunkten des Systems. Ist λ ein äußerer Parameter (z.B. eine Lastkomponente), so wird die Dynamik durch die Newtonschen Bewegungsgleichungen

$$M\ddot{x} + f(x, \lambda) = 0$$

mit einer Massenmatrix M beschrieben — ein spezielles *Hamiltonsystem*. Hier sind die Matrizen $f_x(x, \lambda)$ stets symmetrisch mit reellen Eigenwerten.

Es gibt nun einen Sinn, die Gleichung $f(x, \lambda) = 0$ zu untersuchen und von *entarteten Gleichgewichtspunkten*, insbesondere von Umkehrpunkten zu reden.

V. Mises-Stabwerk: Die oberen gelenkig verbundenen Punkte zweier mit dem Boden starr verbundenen elastischen Stäbe (mit Federkonstanten k) werden vertikal mit der Kraft λ belastet. Der Winkel der gleich langen Stäbe mit der Horizontalen sei x , für $\lambda = 0$ sei er α_0 . Dann gilt⁵

$$f(x, \lambda) = k \tan(x) \cos(\alpha_0) - k \sin(x) + \lambda.$$

⁵Die Temas müssten dies herleiten können: Durch $\lambda > 0$ findet eine Verkürzung der beiden Stäbe von Länge ℓ_0 auf ℓ statt, wobei sich nach dem Hookschen Gesetz eine Rückstellkraft K' proportional zu $\ell_0 - \ell$ einstellt, deren Vertikalkomponente $K = K' \sin(x)$ ist. Ein Kräftegleichgewicht liegt vor, wenn $\lambda = 2K$. Einfache Trigonometrie ergibt $2K = k(\sin(x) - \tan(x) \cos(\alpha_0))$ mit einer Proportionalitätskonstanten k , in die i.W. neben geometrischen Größen die Federkonstante der Stäbe als Faktor eingeht.

Die Nullstellenmenge $f^{-1}(0)$ von f ist hier eine Hysteresiskurve mit zwei Umkehrpunkten, die zeigen, dass der Stabilitätsverlust mit einem Durchschlagphänomen (der sog. **Falten-Katastrophe**) zusammengeht (s. TROGER, 1975), vgl. mit Abb.5.1. Solche Durchschlagphänomene von Tragwerken sind den Bauingenieuren wohl bekannt und nicht besonders beliebt. Otto-Normalverbraucher kennt dieses Phänomen beim Regenschirm und heftigem Sturm.

Ökologisches System

Das folgende Beispiel stammt von ORTLIEB, 1987.

Gegeben sei das Räuber-Beute-System (alle Koeffizienten seien positiv)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax - \frac{bxy}{1+rx} - ex^2 \\ \dot{y} &= \frac{cxy}{1+rx} - dy.\end{aligned}\tag{5.3}$$

(Hier berücksichtigt die *Fress-Funktion* $G(x) := \frac{x}{1+rx}$ für $r > 0$ eine Sättigung bei einem Überangebot von Beute.)

Bei einem Weidesystem ist die Beute das Gras und der Räuber das Vieh, wobei letzteres in seinem Bestand vom Viehzüchter festgelegt wird. Dann ist $\lambda := y$ ein äußerer Parameter, und man hat das eindimensionale Problem $\dot{x} = f(x, \lambda)$ mit

$$f(x, \lambda) := ax - \frac{bx\lambda}{1+rx} - ex^2.$$

Hier liegt im Falle $ar - e > 0$ für

$$\lambda = \lambda_0 := \frac{1}{b} \left(a + \frac{(ar - e)^2}{4er} \right)$$

ein quadratischer Umkehrpunkt vor, der einen Zusammenbruch des Weidesystems charakterisiert. Das zugehörige Lösungsdiagramm ist interessant. $x = 0$ ist stets ein Gleichgewichtspunkt, der für große λ asymptotisch stabil ist (das Gras hat keine Chance sich zu erholen). Leicht zu sehen ist, dass für $\lambda_1 := \frac{a}{b}$ ein Stabilitätswechsel stattfindet (für $\lambda < \lambda_1$ ist $x = 0$ instabil — das Gras hat bei geringerem Viehbestand die Chance zu überleben). Nun zweigt hier für $ar - e > 0$ mit wachsendem λ ein positiver Gleichgewichtspunkt ab, der zunächst instabil ist und dann in einem Umkehrpunkt die Stabilität zurückgewinnt.

Skalare logistische Abbildung

Hier handelt es sich um ein skalares diskretes dynamisches System

$$n = 1, \quad F(x) = a \cdot x(1 - x), \quad a > 0$$

Es modelliert die zeitliche Entwicklung einer Insektenpopulation mit beschränkter Kapazität. Der Systemparameter a beschreibt eine relative Wachstumsrate. Siehe auch Übungsaufgabe 25.

Wichtige Daten: Bei wachsendem a verliert der Fixpunkt $x = 0$ seine Stabilität bei $a = 1$ (*unterraumbrechende transkritische Verzweigung* mit Eigenwert 1), der für $a > 1$ auftretende

positive Fixpunkt $x = 1 - 1/a$ verliert bei $a = 3$ seine Stabilität durch Periodenverdopplung, ein 2-periodischer Orbit tritt auf, der bei $a = 3.4495$ einer weiteren Periodenverdopplung unterliegt. Dann gibt es Schlag auf Schlag weitere (numerisch ermittelt) Periodenverdopplungen bei $a = 3.5441$, bei $a = 3.5644$, bei $a = 3.5688$, etc. (Feigenbaumszenario).

Danach gibt es bis $a = 4$ abwechselnd irreguläres Verhalten („Chaos“), wo die Orbits ganze Intervalle auszufüllen scheinen, unterbrochen von „periodischen Fenstern“, in denen stabile periodische Orbits leben. Das größte periodische Fenster mit Periode 3 beginnt bei $a = 1 + 2\sqrt{2} = 3.82843$, es folgt eine Periodenverdopplung bei $a = 3.84150$ mit einer erneuten Schlag-auf-Schlag-Sequenz von Periodenverdopplungen. Ein weiteres periodisches Fenster mit Periode 5 beginnt bei numerisch gefundenem $a = 3.73817$ mit nachfolgender Periodenverdopplung bei $a = 3.74112$.

Der Beginn dieser periodischen Fenster sind durch Verzweigungen vom Typ „Umkehrpunkt“ charakterisiert: hier treten Paare von periodischen Orbits auf, von denen einer stabil, der andere instabil ist.

5.4 Hopfverzweigung

Sei x_0 für $\lambda = \lambda_0$ ein nichthyperbolischer, aber ein nichtentarteter (regulärer) Gleichgewichtspunkt. Dann besitzt $A_0 := f_x(x_0, \lambda_0)$ ein Paar imaginärer Eigenwerte.

Wir können daher von einem *Zweig* $\mathcal{C} = \{(x(\lambda), \lambda) : \lambda \in \mathbf{L}\}$ von Gleichgewichtspunkten $x(\lambda)$ ausgehen, wobei $\mathbf{L} = \{\lambda : |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon\}$ ein offenes, λ_0 enthaltenes Intervall ist.

Wenn wir nun annehmen, dass das (besser: ein) Paar imaginärer Eigenwerte von A_0 algebraisch einfach ist, so kann \mathbf{L} so gewählt werden, dass es algebraisch einfache Eigenwerte

$$\mu(\lambda) := \alpha(\lambda) \pm i\beta(\lambda) \in \sigma(f_x(x(\lambda), \lambda)), \quad \lambda \in \mathbf{L}$$

mit stetig-differenzierbaren $\alpha(\lambda)$ und $\beta(\lambda)$ und mit

$$\alpha(\lambda_0) = 0, \quad \beta(\lambda_0) =: \omega_0 \neq 0$$

gibt (siehe Übungsaufgabe 26).

Definition 5.5. x_0 sei ein regulärer Gleichgewichtspunkt für $\lambda = \lambda_0$. x_0 heißt **Hopf-Verzweigungspunkt** für $\lambda = \lambda_0$, wenn gilt:

- **Eigenwertbedingung:** Es gibt ein Paar algebraisch einfacher imaginärer Eigenwerte $\pm i\omega_0$ von $f_x^0 := f_x(x_0, \lambda_0)$, und x_0 ist nichtentartet, d.h. $\mu = 0$ ist kein Eigenwert von f_x^0 .
- **Transversalitätsbedingung:** Es gilt

$$\alpha'(\lambda_0) \neq 0. \tag{5.4}$$

(Die beiden Eigenwertkurven $\alpha(\lambda) \pm i\beta(\lambda)$ kreuzen die imaginäre Achse mit nicht verschwindender Geschwindigkeit.)

Das Verzweigungsergebnis, das auf E. HOPF (1942), aber auch (jedenfalls für planare Systeme) auf POINCARÉ (1892) und ANDRONOV (1926) zurückgeht (s. Literatur in MARSDEN–MCCRACKEN), lautet:

Satz 5.6. *Sei x_0 ein Hopf–Verzweigungspunkt für $\lambda = \lambda_0$. Sei also $i\omega_0 \neq 0$ ein algebraisch einfacher Eigenwert von f_x^0 mit Eigenvektor $u_0 + iv_0$, $u_0, v_0 \in \mathbb{R}^n$.*

Zusätzlich seien $ik\omega_0$, $k = 0, 2, 3, 4, \dots$ keine Eigenwerte von f_x^0 (Resonanzbedingung).

Dann gibt es einen durch ihre „Amplitude“ s ($0 \leq s < \varepsilon$) parametrisierbaren Zweig $T(s)$ -periodischer Lösungen $u(t; s)$ (bzw. Orbits $\gamma(s)$) zum Parameter $\lambda = \lambda(s)$ mit den folgenden Eigenschaften:

- $T(s) = \frac{2\pi}{\omega_0} + O(s^2)$, $\lambda(s) = \lambda_0 + O(s^2)$,
- $u(t; s) = x_0 + s(\cos(\omega_0 t)u_0 - \sin(\omega_0 t)v_0) + O(s^2)$, die periodischen Orbits liegen also in einer Umgebung von x_0 , schrumpfen für $s \rightarrow 0$ zum Gleichgewichtspunkt x_0 zusammen und liegen für kleine s „in erster Näherung“ in der Ebene $E := x_0 + H$ mit dem von u_0 und v_0 aufgespannten zweidimensionalen Raum H (dem sog. **reellen Eigenraum** zum Eigenwertpaar $\pm i\omega_0$).
- $T(s)$, $\lambda(s)$ und $u(t; s)$ hängen stetig-differenzierbar von s ab.
- Die periodischen Lösungen sind im folgenden Sinne eindeutig:
Es gibt eine Umgebung U von x_0 und eine Umgebung Λ von λ_0 der Art, dass es zu jedem für ein $\lambda \in \Lambda$ in U liegenden periodischen Orbit C einen Parameter s gibt mit $C = \gamma(s)$ und $\lambda = \lambda(s)$.

Man unterscheidet **superkritische** und **subkritische** Hopf–Verzweigung, je nachdem, ob die abzweigenden periodischen Orbits stabil sind oder nicht (s. auch die Abbn. 5.7 und 5.8 sowie die nachfolgenden Beispiele, Bedingungen hierfür sind vom Typ einer *Nichtlinearitätsbedingung*).

Zum Beweis dieses Satzes s. MARSDEN–MCCRACKEN, wo der ebene Fall $n = 2$ ausführlich behandelt wird (s. auch nachfolgendes Kap. 5.4.2) und der allgemeine Fall mit Hilfe von Zentrums-mannigfaltigkeiten auf den ebenen Fall zurückgeführt wird. Dort finden sich auch historische Anmerkungen.

Der Begriff *Transversalitätsbedingung* stammt aus der Theorie der Mannigfaltigkeiten. Zwei Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2 des \mathbb{R}^n schneiden sich transversal in einem gemeinsamen Punkt x_0 , falls ihre Tangentialräume den ganzen \mathbb{R}^n aufspannen.

Im Falle der Hopf–Verzweigung kann man die eindimensionale Mannigfaltigkeit der Matrizen $A(\lambda) := f_x(x(\lambda), \lambda)$ betrachten. Diese schneidet die Kodimension-1–Mannigfaltigkeit der *Hopfmatrizen* transversal genau dann, wenn obige Transversalitätsbedingung erfüllt ist.

5.4.1 Beispiele

Normalform

Ein ebenes System, welches alle „nichtentarteten“ Hopf-Verzweigungen beschreibt, lautet (s. GUCKENHEIMER-HOLMES, S.152, WIGGINS, S.271)

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d\lambda + a(x^2 + y^2) & -(\omega + c\lambda + b(x^2 + y^2)) \\ \omega + c\lambda + b(x^2 + y^2) & d\lambda + a(x^2 + y^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Es gibt einen „trivialen“ Zweig von Gleichgewichtspunkten $(x(\lambda), y(\lambda)) \equiv (0, 0)$. Für die Jacobimatrix $J(\lambda)$ gilt

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} d\lambda & -(\omega + c\lambda) \\ \omega + c\lambda & d\lambda \end{pmatrix}.$$

Sind $d, \omega \neq 0$, so ist offensichtlich für $(x_H, y_H) = (0, 0)$ und $\lambda_H = 0$ die Eigenwertbedingung für eine Hopf-Verzweigung erfüllt. ($d \neq 0$ ist eine Transversalitätsbedingung). Die Art der Verzweigung periodischer Lösungen, insbesondere was die Stabilität der periodischen Lösungen betrifft (diese hängt von dem Vorzeichen von a ab!), kann sehr einfach studiert werden, indem man Polarkoordinaten (r, ϑ) einführt, für die das System wie folgt lautet:

$$\dot{r} = (d\lambda + ar^2)r, \quad \dot{\vartheta} = \omega + c\lambda + br^2.$$

Periodische Lösungen entsprechen dann nichttrivialen Gleichgewichtspunkten der Differentialgleichung $\dot{r} = (d\lambda + ar^2)r$, ihre Orbits sind Kreise. Sie sind (asymptotisch) stabil genau dann, wenn die Gleichgewichtspunkte der skalaren DGL es sind.

Ist $d > 0$, so sind die trivialen Gleichgewichtspunkte für $\lambda < \lambda_H = 0$ asymptotisch stabil, für $\lambda > \lambda_H$ instabil. Ist $a < 0$, so existieren asymptotisch stabile periodische Orbits für $\lambda > \lambda_H$ in Form von Kreisen mit Radien $\sqrt{-d\lambda/a}$ (warum?). Hier liegt eine sog. *superkritische (weiche)* Hopf-Verzweigung vor, s. Fig. 7.27 in HALE-KOČAK.

Dagegen entspricht der Fall $d > 0, a > 0$ einer *subkritischen (harten)* Verzweigung (s. Fig. 3.7, 3.8 in KUZNETSOV), periodische Orbits existieren für $\lambda < \lambda_H$ und sind instabil.

Für $a = 0$ liegt eine „vertikale“ Verzweigung vor. Dieser Fall wird in der Literatur zuweilen als entartete Hopf-Verzweigung bezeichnet.

In allen Fällen kann der Zweig der periodischen Lösungen durch ihre Amplitude $s := r$ parametrisiert werden.

Mechanisches System

In HASSARD-KAZARINOFF-WAN, 1981, findet sich das folgende Schwingungsproblem (s. Abb. 5.2):

$$m\ddot{x} + c\dot{x} - F(\lambda - \dot{x}) + kx = 0 \quad (5.6)$$

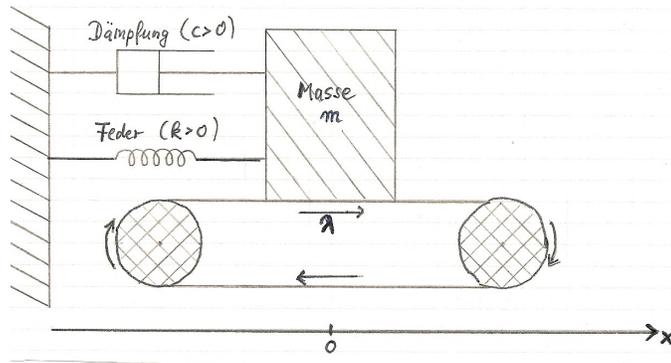


Abbildung 5.2:

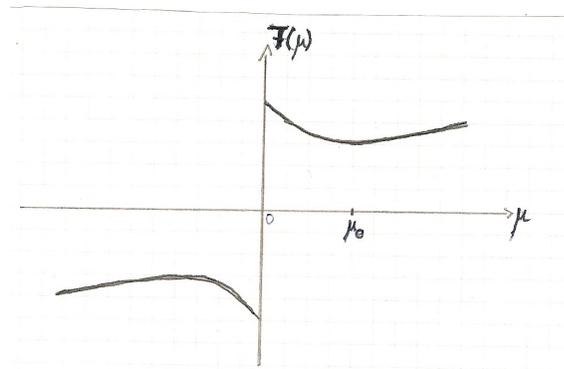


Abbildung 5.3:

mit Reibungskonstanten $c > 0$, Federkonstanten $k > 0$ und einer nur von der Relativgeschwindigkeit $\mu := \lambda - \dot{x}$ abhängigen Reibungskraft $F(\mu)$, hervorgerufen durch ein sich mit konstanter Geschwindigkeit λ drehendes Fließband, auf dem die (punktförmige) Masse (m) aufliegt. $x = 0$ entspricht der Ruhelage für $\lambda = 0$. (5.6) beschreibt das Kräftegleichgewicht der Trägheitskraft ($m\ddot{x}$), der Reibungskraft des Dämpfungsgleides ($c\dot{x}$), der Federrückstellkraft (kx) sowie der Reibungskraft des Fließbandes ($F(\lambda - \dot{x})$).

Die präzise Form der (Reibungskennlinie) Funktion $F(\mu)$ hängt von der Oberfläche des Fließbandes und der Masse ab, siehe Abb. 5.3. Sie hat bei $\mu = 0$ einen Unstetigkeitssprung, ihr Wert ist durch die Haftreibung gegeben.

Wir betrachten nur den Fall $\lambda > 0$, so dass $\mu := \lambda - \dot{x} = 0$ bedeutet, dass die Masse mit dem Fließband mittransportiert wird. Die obige DGL wist in einem solchen Fall nicht gültig. Dass die Reibungskraft für kleine Relativgeschwindigkeiten μ zunächst fällt, liegt daran, dass Gleitreibungen kleiner als Haftreibungen ausfallen. Abb. 5.3 postuliert, dass es bei einer Relativgeschwindigkeit μ_0 eine minimale Gleitreibung gibt.

Anschaulich kann man sich vorstellen, dass die Masse bei großen $\lambda > 0$ zur Ruhe kommt ($\dot{x} = 0$)

— Feder- und Reibungskräfte halten sich die Waage. Wenn die Fließbandgeschwindigkeit λ reduziert wird, ist es vorstellbar, dass die Masse auf dem Fließband „oszilliert“. Dieses Modell zeigt dieses Phänomen:

Mit $y := \dot{x}$ erhält man ein ebenes System, das zu jedem λ einen eindeutigen Gleichgewichtspunkt $(x(\lambda), y(\lambda)) = (F(\lambda)/k, 0)$ besitzt. Zur Untersuchung dessen Stabilität betrachte man die Jacobimatrizen

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -c - F'(\lambda) \end{pmatrix}$$

Es liegt eine Hopf-Verzweigung für $\lambda = \lambda_H$ vor, welches durch die Gleichung $c + F'(\lambda_H) = 0$ gegeben ist⁶ (Spur $(J(\lambda_H))=0$), wobei $F''(\lambda_H) \neq 0$ eine Transversalitätsbedingung für die Eigenwerte liefert.

Keineswegs elementar zu beantworten ist die Frage, ob die Verzweigung sub- oder superkritisch ist. Dies hängt u.a. von der dritten Ableitung von F ab, die in den Lyapunovkoeffizienten L (siehe (5.8)) eingeht.

Räuber-Beute-System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x \left[r \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{ay}{b+x} \right], \\ \dot{y} &= y \left[e \frac{ax}{b+x} - d \right] \end{aligned}$$

für

$$r = 1, b = 1, d = 1, a = 4, e = 0.5$$

Es kann gezeigt werden (Aufgabe 2 der Übungen), dass es für $K > 1$ genau einen Gleichgewichtspunkt $(1, (K-1)/(2K))$ mit positiven Komponenten gibt, der für $1 < K < \sqrt{13} - 2 \approx 1$ ein stabiler Knoten, für $1 < K < 3$ ein stabiler Strudelpunkt und für $K > 3$ ein instabiler Strudelpunkt ist — in $K = 3$ findet eine Hopfverzweigung statt! Numerisch konnte man für $K > 3$ einen periodischen Orbit finden (s. Abb. 5.4 für $K = 9$), dessen Existenz das Ergebnis einer superkritischen Hopfverzweigung ist.

Brusselator

Der russische Nobelpreisträger für Chemie von 1977, ILYA PRIGOGINE, 1917-2003, hat 1971 zusammen mit Mitarbeitern ein sehr einfaches (hypothetisches!) Modell erstellt, das in seinem dynamischen Verhalten für chemische Reaktionen, bei denen selbsterregte Oszillationen auftreten, typisch sein soll (siehe auch Kap. 1.6.4). Die Reaktion



⁶Diese Gleichung hat eine Lösung, wenn die Kennlinie hinreichend stark abfällt.

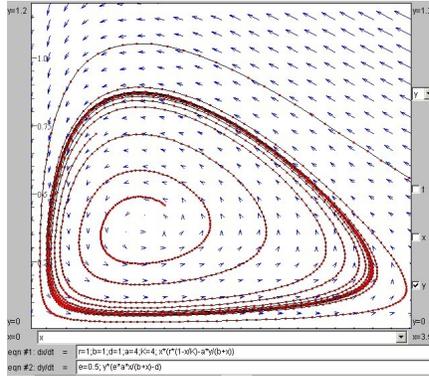


Abbildung 5.4: Aufgabe 2 (Phasenportrait, stabiler Grenzzyklus) $r = 1, b = 1, d = 1, a = 4, e = 0.5, K = 4$

mit zeitlich konstanten „Produkten“ A, B, D, E und zeitlich veränderlichen Produkten X, Y kann man in ein ebenes DGL-Problem (mit $x := X, y := Y$)

$$\dot{x} = A - (B + 1)x + x^2y, \quad \dot{y} = Bx - x^2y$$

übersetzen, welches kurz „Brusselator“ heißt, weil es in Brüssel entdeckt wurde. Dieses System hat den Gleichgewichtspunkt $x_0 = A, y_0 = \frac{B}{A}$. Es errechnet sich die Jacobische zu

$$J := \begin{pmatrix} B - 1 & A^2 \\ -B & -A^2 \end{pmatrix}$$

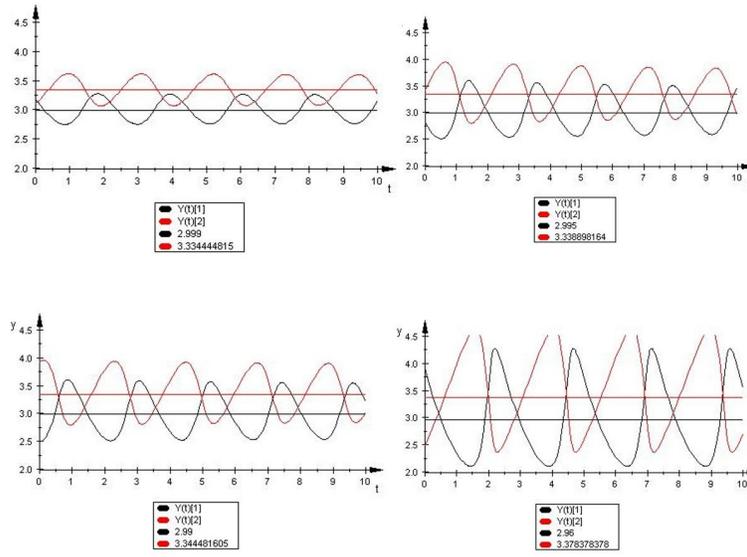
mit $\det(J) = A^2 > 0$, so dass die Hopfbedingung $\text{Spur}(J) = 0$, also $B - 1 - A^2 = 0$ lautet. Da $A > 0$, folgt $A = \sqrt{B - 1}$, wobei notwendigerweise $B > 1$ sein muss. Für $A > \sqrt{B - 1}$ ist der Gleichgewichtspunkt asymptotisch stabil (vgl. Aufgabe 30 in den Übungen). Für $B = 10$ liegt bei $A_H := 3$ eine superkritische Hopfverzweigung vor. In den Abbn. 5.5 und 5.6 sieht man Lösungskurven und periodische Orbits für $A < A_H$. Man kann für A weg von der Hopfverzweigung sehr schön erkennen, wie die Lösungen sich zu „Impulslösungen“ entwickeln (mit einer kurzen Phase mit dramatischem Anstieg bzw. Abfall).

5.4.2 Hopfverzweigung in ebenen Systemen

Wir wollen diese Verzweigung in ebenen, von einem Parameter λ abhängigen Systemen

$$\dot{x} = f_1(x, y, \lambda), \quad \dot{y} = f_2(x, y, \lambda)$$

beschreiben und analysieren. Die Übertragung der Ergebnisse auf höher-dimensionale Systeme kann mit Hilfe der Lyapunov-Schmidt-Zerlegung oder der Zentrumsmannigfaltigkeitsreduktion erfolgen.



Brusselator $B=10$, $A < A_H := \sqrt{B-1}$

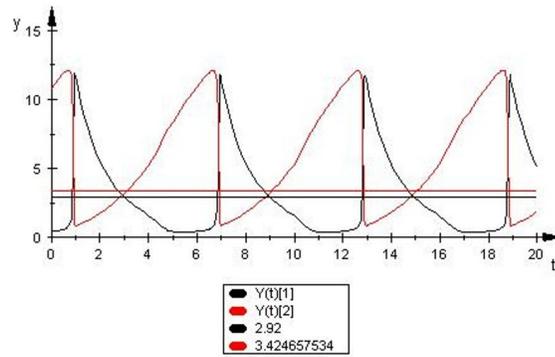
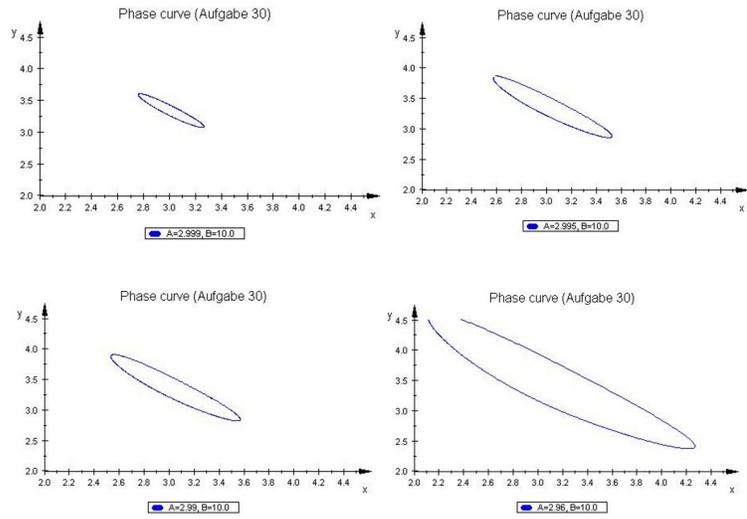


Abbildung 5.5: Lösungskurven Brusselator



Brusselator $B=10, A < A_H := \sqrt{B-1}$

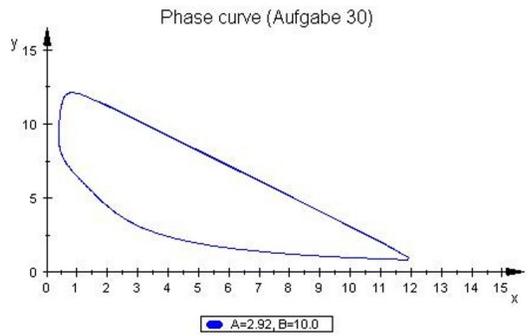


Abbildung 5.6: Periodische Orbits Brusselator

Die Hopfverzweigung tritt auf, wenn ein Gleichgewichtspunkt (x_H, y_H) zum *kritischen* Parameter $\lambda = \lambda_H$ ein Paar imaginärer Eigenwerte $\pm i\omega$ besitzt, d.h. wenn für die Jacobimatrix

$$J_H := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_H, y_H, \lambda_H) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_H, y_H, \lambda_H) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_H, y_H, \lambda_H) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_H, y_H, \lambda_H) \end{pmatrix}$$

$\text{Spur}(J_H)=0$ und $\text{Det}(J_H)=\omega^2 > 0$ gilt. Man nennt (x_H, y_H) einen (nichtlinearen) Wirbel für $\lambda = \lambda_H$, weil das in (x_H, y_H) linearisierte System ein Kontinuum von periodischen Orbits in Form von Ellipsen besitzt, s. Fig. 3.9 in KUZNETSOV. Diese Eigenschaft des linearen Systems überträgt sich i.A. nicht auf das nichtlineare System – es sei denn, es liegen ganz besondere Eigenschaften vor wie *flächenerhaltender Fluss* im Falle der von der Diskussion des Satzes von Liouville bekannten Divergenzbedingung

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, \lambda_H) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, \lambda_H) \equiv 0.$$

„I.A.“ wird (x_H, y_H) für $\lambda = \lambda_H$ noch eine schwache Senke oder Quelle sein, die allerdings nicht mehr mit exponentieller Rate attrahiert oder abstößt. Dabei ist *Senke* ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt, eine *Quelle* ist in dem Sinne abstoßend, dass sie durch Zeitumkehr $t \rightarrow -t$ zu einer Senke wird. Von einer *starken* Senke eines Gleichgewichtspunktes x_0 von $\dot{x} = f(x)$ sprechen wir, wenn $Df(x_0)$ stabil ist, wenn also schon aus dem Prinzip der linearisierten Stabilität auf asymptotisch Stabilität geschlossen werden kann.

Nehmen wir einmal an, wir haben es mit einer schwachen Senke zu tun. Eine Phasenkurve spiralt dann (für $\lambda = \lambda_H$) „unertäglich“ langsam in ein Zentrum der Spirale, der Senke, hinein. Da $\omega \neq 0$, gibt es (der Satz über Implizite Funktionen ist anwendbar, da J_H regulär ist) einen durch λ parametrisierbaren Zweig von Gleichgewichtspunkten $(x(\lambda), y(\lambda))$ des Systems mit Parameter λ , deren Eigenwerte $\alpha(\lambda) \pm i\beta(\lambda)$ sind, welche $\alpha(\lambda_H) = 0, \beta(\lambda_H) = \omega$ erfüllen. Nun möge das Vorzeichen von $\alpha(\lambda)$ für $\lambda < \lambda_H$ negativ und für $\lambda > \lambda_H$ positiv sein, d.h. $(x(\lambda), y(\lambda))$ sei für $\lambda < \lambda_H$ eine starke Senke und für $\lambda > \lambda_H$ eine starke Quelle.

Aus einfachen geometrischen Überlegungen (s. die Abbn. 5.7, 5.8 aus KUZNETSOV) im Zusammenspiel mit dem Satz von Poincaré-Bendixson (s. Satz 2.7) folgern wir heuristisch die Existenz von asymptotisch stabilen Grenzzyklen für $\lambda > \lambda_H$, die aus dem Gleichgewichtspunkt „herauswachsen“ – eine „weiche Verzweigung“. Einen entsprechenden Fall erhalten wir im Fall einer schwachen Quelle – wir müssen nur t durch $-t$ ersetzen, um zu sehen, dass wir instabile periodische Orbits für die Parameter erwarten dürfen, für die die Gleichgewichtspunkte asymptotisch stabil sind – eine „harte“ Verzweigung ist denkbar. Das ist i.W. die Idee des nachfolgenden Beweises.

Bemerkung: Bei vielen Formulierungen eines Hopfverzweigungssatzes wird $\alpha'(\lambda_H) \neq 0$ gefordert: das Paar konjugiert komplexer Eigenwerte soll die imaginäre Achse mit nicht verschwindender Geschwindigkeit queren – eine Transversalitätsbedingung für Eigenwerte, wie wir sie schon bei der Periodenverdopplung kennengelernt haben. Hier werden wir – HUBBARD-WEST folgend – nur einen Vorzeichenwechsel von $\alpha(\lambda)$ fordern, wobei wir die Eindeutigkeit abzweigender periodischer Orbits nicht mehr garantieren können.

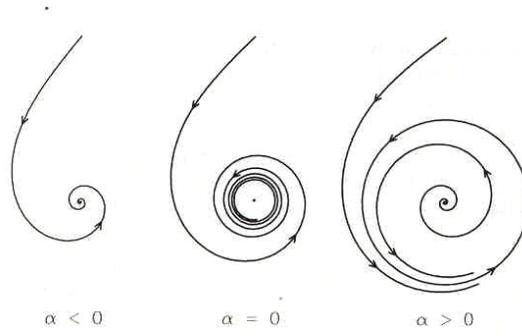


FIGURE 2.13. Hopf bifurcation

Abbildung 5.7: Superkritische Hopfverzweigung

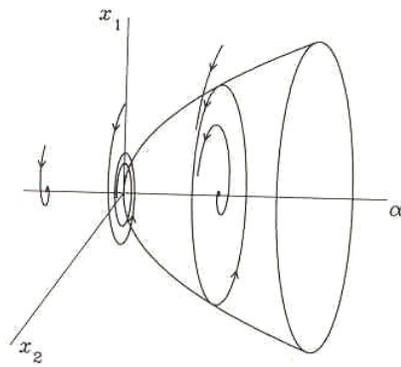


Abbildung 5.8: Superkritische Hopfverzweigung

5.4.3 Formulierung und Beweis des Hopfverzweigungssatzes

In diesem Abschnitt folgen wir der Darstellung in HUBBARD-WEST.

Mit Hilfe einer einfachen Translation können wir $(x_H, y_H) = (0, 0)$ erreichen. Sei J_H die Jacobi-matrix für $\lambda = \lambda_H$ an der Stelle (x_H, y_H) . Da die beiden Eigenwerte von J_H gerade $\pm i\omega \neq 0$ sind, gibt es eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{R}^{2,2}$ mit

$$S^{-1}J_H S = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}.$$

Durch die lineare Transformation $x = Sy$ und eine weitere Zeitskalierung kann man

$$J_H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

erreichen, was wir jetzt annehmen wollen. Sei $F(x, y) := f_1(x, y, \lambda_H)$ und $G(x, y) := f_2(x, y, \lambda_H)$. Wir setzen voraus, dass $f \in C^3$, d.h. dass F und G bis mindestens dritter Ordnung um $(0, 0)$ entwickelt werden können. Man erhält

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + F_2(x, y) + F_3(x, y) + \dots \\ \dot{y} &= -x + G_2(x, y) + G_3(x, y) + \dots, \end{aligned} \tag{5.7}$$

wobei

$$F_i(x, y) = \sum_{j=0}^i \mu_{j, i-j} x^j y^{i-j},$$

$$G_i(x, y) = \sum_{j=0}^i \nu_{j, i-j} x^j y^{i-j}$$

homogene Polynome vom Grade i sind.

Der **Lyapunov-Koeffizient** von (x_H, y_H) ist die reelle Zahl

$$\begin{aligned} L &:= 3\mu_{3,0} + \mu_{1,2} + \nu_{2,1} + 3\nu_{0,3} - \mu_{2,0}\mu_{1,1} + \nu_{1,1}\nu_{0,2} \\ &\quad - 2\mu_{0,2}\nu_{0,2} - \mu_{0,2}\mu_{1,1} + 2\mu_{2,0}\nu_{2,0} + \nu_{1,1}\nu_{2,0} \end{aligned} \tag{5.8}$$

Ihr Vorzeichen bestimmt, ob (x_H, y_H) eine (schwache) Senke oder Quelle ist! Man kann $L = L_1 + L_2$ schreiben, wobei L_1 bzw. L_2 ein gewichtetes Mittel von Koeffizienten der Monome dritter bzw. zweiter Ordnung ist. Dass das Vorzeichenmuster nicht ganz zufällig ist, erkennt man, wenn man die Transformation $\xi = y, \eta = -x$ durchführt und unterstellt, dass L invariant gegenüber dieser Koordinatentransformation ist (Aufgabe!).

Satz 5.7. [*Lyapunov-Test für schwache Senken oder Quellen*]

Ist $L > 0$ (bzw. $L < 0$), so ist der Ursprung eine schwache Quelle (bzw. Senke) von

$$\dot{x} = F(x, y), \quad \dot{y} = G(x, y).$$

Beweis: Es wird eine strikte Lyapunovfunktion für den Ursprung konstruiert. Da $h_2(x, y) := x^2 + y^2$ eine Erhaltungsgröße für das linearisierte System $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x$ ist, scheint ein Ansatz

$$h(x, y) = (x^2 + y^2)/2 + h_3(x, y) + h_4(x, y)$$

mit homogenen Polynomen h_j vom Grade $j = 3, 4$, gerechtfertigt.

Die orbitale Ableitung

$$\dot{h}(x, y) := \frac{\partial h}{\partial x}(x, y)F(x, y) + \frac{\partial h}{\partial y}(x, y)G(x, y)$$

besitzt eine Taylorentwicklung, die erst bei Gliedern dritter Ordnung beginnt:

$$\begin{aligned} \dot{h}(x, y) &= \tau_3(h)(x, y) + \tau_4(h)(x, y) + h.o.t, \\ \tau_3(h)(x, y) &= xF_2(x, y) + yG_2(x, y) + y\frac{\partial h_3}{\partial x}(x, y) - x\frac{\partial h_3}{\partial y}(x, y), \\ \tau_4(h)(x, y) &= xF_3(x, y) + yG_3(x, y) + F_2(x, y)\frac{\partial h_3}{\partial x}(x, y) + G_2(x, y)\frac{\partial h_3}{\partial y}(x, y) \\ &\quad + y\frac{\partial h_4}{\partial x}(x, y) - x\frac{\partial h_4}{\partial y}(x, y). \end{aligned} \tag{5.9}$$

In den Ausdrücken für τ_3 und τ_4 treten jeweils Terme auf, die von der Form

$$T_k(h_k)(x, y) := y\frac{\partial h_k}{\partial x}(x, y) - x\frac{\partial h_k}{\partial y}(x, y)$$

für $k = 3, 4$ sind. Bezeichnet man mit P_k den Raum der homogenen Polynome vom Grade k in den Variablen x und y , so ist $T_k : P_k \rightarrow P_k$ ein linearer Operator, der bzgl. der kanonischen Basis $x^k, x^{k-1}y, \dots, y^k$ von P_k durch Matrizen $\tilde{T}_k \in \mathbb{R}^{k+1, k+1}$ dargestellt werden kann:

$$\tilde{T}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\tilde{T}_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Man rechnet leicht nach, dass \tilde{T}_3 regulär und $\text{rang}(\tilde{T}_4) = 4$. Der Kokern von \tilde{T}_4 wird von $(3, 0, 1, 0, 3)^t$ aufgespannt.

Daher kann $h_3(x, y)$ so gewählt werden, dass $\tau_3(h)(x, y) \equiv 0$, dass also alle kubischen Terme in $\dot{h}(x, y)$ verschwinden.

Wir haben gewonnen, wenn wir h_4 so wählen können, dass

$$\tau_4(h_4)(x, y) = c(x^2 + y^2)^2$$

mit einer geeigneten Zahl $c \neq 0$, weil dann das Vorzeichen von c entscheidet, ob der Ursprung eine Senke oder Quelle ist – hier muss man die Theorie der (strikten) Lyapunov-Funktionen.

In der Tat, wir können c so wählen, dass

$$xF_3(x, y) + yG_3(x, y) + F_2(x, y)\frac{\partial h_3}{\partial x}(x, y) + G_2(x, y)\frac{\partial h_3}{\partial y}(x, y) - c(x^2 + y^2)^2 \in \text{Bild}(\tilde{T}_4).$$

Und zwar ergibt sich mit Hilfe des obigen Kokernvektors und der Tatsache das das Bild das orthogonale Komplement des Kokerns ist, dass $c = L/8$ gewählt werden muss (nachrechnen!). Damit gibt es für $L < 0$ eine strikte Lyapunovfunktion für den Ursprung (definiert in einer solchen kleinen Umgebung, dass die *h.o.t.*-Terme so klein sind, dass noch $\dot{h}(x, y) < 0$.

Dann ist der Ursprung asymptotisch stabil!

Für $L > 0$ schließt man analog (Zeitumkehr und Vertauschung von x und y !). ■

Satz 5.8. Gegeben sei $\dot{x} = f_1(x, y, \lambda)$, $\dot{y} = f_2(x, y, \lambda)$ mit $f_i \in C^3, i = 1, 2$. Für $\lambda = \lambda_H$ habe $\dot{x} = F(x, y)$, $\dot{y} = G(x, y)$ mit $F(x, y) := f_1(x, y, \lambda_H)$, $G(x, y) := f_2(x, y, \lambda_H)$ die obige „lineare Normalform“ (5.7) mit Lyapunov-Koeffizienten L . Die (wegen SIF existierenden) Gleichgewichtspunkte $(x(\lambda), y(\lambda))$ seien starke Senken für $\lambda_H - \varepsilon_H < \lambda < \lambda_H$ und starke Quellen für $\lambda_H + \varepsilon_H > \lambda > \lambda_H$ mit einem $\varepsilon_H > 0$. Dann kann $\varepsilon_H > 0$ so gewählt werden, dass

- falls $L < 0$, so gibt es für $\lambda_H + \varepsilon_H > \lambda > \lambda_H$ asymptotisch stabile periodische Orbits
- falls $L > 0$, so gibt es für $\lambda_H - \varepsilon_H < \lambda < \lambda_H$ instabile periodische Orbits.

Beweis: Betrachte nur $L < 0$ — für $L > 0$ schließt man analog. Wir gehen von der im vorherigen Satz gewonnenen Lyapunovfunktion $h(x, y)$ aus, deren orbitale Ableitung für $\lambda = \lambda_H$ ja $L(x^2 + y^2)^2/8$ ist. Da die Niveaulinien $h = \gamma$ für kleine positive γ i.W. durch die quadratischen Terme von h bestimmt sind, gibt es ein hinreichend kleines $\gamma > 0$, dessen zugehörige Niveaulinie $h = \gamma$ eine einfach geschlossene (kreisähnliche) Kurve um den Ursprung ist, so dass (wegen $\dot{h} < 0$) das Vektorfeld (für $\lambda = \lambda_H$) in das von der Niveaulinie umschlossene Gebiet G transversal hineinzeigt (für eine präzise Argumentation müsste man das Morse-Lemma verwenden). Dann gibt es ein ε_H , so dass das Vektorfeld auch noch für alle λ mit $|\lambda - \lambda_H| < \varepsilon_H$ auf dem Rand von G in das Innere von G weist.

Nun wähle ein $\lambda \in (\lambda_H, \lambda_H + \varepsilon_H)$. Jetzt ist der Ursprung eine Quelle. Daher gibt es eine in G gelegene geschlossene Kurve um den Ursprung, so dass das Vektorfeld (für λ) auf ihr vom Ursprung weg in das Innere des durch diese Kurve und G definierten Kreisrings A weist – und auch hier muss eigentlich präziser geschlossen werden, was in HUBBARD-WEST unter Verweis auf das dortige Theorem 8.2.2 getan wird.

Jetzt kann der Satz von Poincaré-Bendixson angewendet werden. ■

Bemerkung: Man kann einige Parallelen zwischen dieser Analyse und der der Periodenverdopplung sehen. In beiden Fällen wurde eine superkritische (weiche) Verzweigung dann garantiert, wenn für den kritischen Parameter λ_H der zugehörige Fix- oder Gleichgewichtspunkt „gerade noch eben“ asymptotisch stabil ist. Ich bin sicher, dass man auch im Periodenverdopplungsfall eine strikte *diskrete* Lyapunovfunktion konstruieren kann ($h(z) = z^4$). Der dem Poincaré-Bendixson-Satz entsprechende Satz ist hier ganz simpel: ein Intervall, das durch eine stetige Abbildung in sich abgebildet wird, enthält stets einen Fixpunkt.

Umgekehrt, kann der Hopfverzweigungsbeweis ähnlich analytisch wie bei der Periodenverdopplung geführt werden.

Kapitel 6

Mikroskopische Verkehrsmodellierung

Es geht um einen Einblick in die drei Arbeiten des Literaturverzeichnisses in Kap. 6.4.

6.1 Modell mit Kreisverkehr

Wir haben N „punktförmige“ Fahrzeuge, sie sich in einem Kreis der Länge L bewegen und dabei ihre Geschwindigkeit zunächst an dem Abstand zum „Vordermann“ ausrichten. Es sei $x_j(t)$ die Position des Fahrzeugs Nr. j nach t ZE und $v_j(t) := \dot{x}_j(t)$ dessen Geschwindigkeit, wobei $x_j(t)$ Umrundungen des Kreises mitzählt, d.h., die eigentliche Position auf dem Kreis (als Mannigfaltigkeit) ist $\xi_j(t) := x_j(t) \bmod L$. Die Bewegungsgleichungen nach Newton werden als

$$\ddot{x}_j = \frac{1}{\tau_j} (V_j(x_{j+1} - x_j) - \dot{x}_j), j = 1, \dots, N, \quad x_{N+1} = x_1 + L \quad (6.1)$$

angenommen, wobei davon ausgegangen wird, dass $x_1(t) < x_2(t) < \dots < x_N(t) < x_1(t) + L$, insbesondere für $t = 0$ (Anfangsbedingungen). Der „Vordermann“ von Fahrzeug Nr. j ist das Fahrzeug Nr. $j + 1$, von Fahrzeug Nr. N ist es wieder Fahrzeug Nr. 1. Dabei ist die wichtigste „Kennlinie“ die *Optimal-Geschwindigkeitsfunktion* $V_j(y)$, die z.B. vom „Mahnke-Typ“

$$V(y) := v_{max} \frac{y^2}{a^2 + y^2} \quad (6.2)$$

oder vom „Bando-Typ“,

$$V(y) = v_{max} \frac{\tanh a(y - 1) + \tanh a}{1 + \tanh a} \quad (6.3)$$

mit von j abhängiger Maximalgeschwindigkeit v_{max} und Parameter $a > 0$ sein kann. Stets ist der Graph von V S-förmig, es ist $V(0) = 0$, V ist streng monoton wachsend mit einem Wendepunkt (Mahnke: bei $y_w := \frac{1}{3}a\sqrt{3}$) und $v_{max} = \lim_{y \rightarrow \infty} V(y)$, s. Abb. 6.1 (Mahnke) und Abb. 6.2 (Bando), an denen man sehr gut erkennt, dass die Kontrolle der Steigung durch den Parameter a sehr unterschiedlich ist.

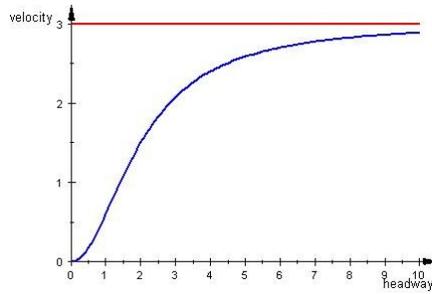


Abbildung 6.1: Graph einer Optimal-Geschwindigkeitsfunktion nach Mahne: $v_{max} = 3, a = 2$

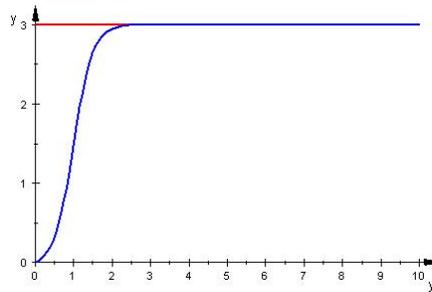


Abbildung 6.2: Graph einer Optimal-Geschwindigkeitsfunktion nach Bando: $v_{max} = 3, a = 2$

Das Argument y von $V(y)$ ist ein Abstand. Dann besagt (6.1), dass das Fahrzeug j beschleunigt (abbremst), wenn die aktuelle Geschwindigkeit kleiner (größer) als $V_j(y_j)$ mit dem aktuellen Abstand (*headway*) $y_j := x_{j+1} - x_j$ ist. Mit dem Parameter τ_j wird eine Reaktionszeit modelliert. Je größer τ_j ist, desto langsamer reagiert der j te Fahrer.

Um unsere Theorie anwenden zu können, schreiben wir (6.1) als System erster Ordnung mit $2N$ Zustandsvariablen:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_j = v_j \\ \dot{v}_j = \frac{1}{\tau_j}(V_j(x_{j+1} - x_j) - v_j) \end{array} \right\} \quad j = 1, \dots, N, \quad x_{N+1} = x_1 + L. \quad (6.4)$$

Man kann sehr leicht einsehen, dass v_j niemals Null werden kann, wenn etwa zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ alle Geschwindigkeiten positiv sind — sofern keine „Kollisionen“ eintreten ($y_j := x_{j+1} - x_j > 0$). Wir sprechen von „physikalischen“ Lösungen, wenn für alle Zeiten gilt: $y_j > 0, j = 1, 2, \dots, N$ (dies impliziert $v_j > 0, j = 1, 2, \dots, N$). Es gibt sehr wohl unphysikalische Lösungen von (6.4).

Wir können uns $x_j(t)$ als Position auf dem Kreis vorstellen, wobei Umrundungen mitgerechnet werden — während $\xi_j(t) := x_j(t) \bmod L$ den Ort auf dem Kreis ohne Rücksicht auf die bisher erfolgten Umrundungen beschreibt. Es ist naheliegend, (6.4) als ein Differentialgleichungs-System auf der Mannigfaltigkeit $(S_L^1 \times \mathbb{R})^N$ aufzufassen, wobei S_L^1 den Kreis mit Umfang L bezeichnet. Durch $\xi_j := x_j \bmod L$ wird die Zustandsvariable $x_j \in \mathbb{R}$ in eine aus S_L^1 umgerechnet. Dann ist $(\xi_j, v_j) \in S_L^1 \times \mathbb{R}$ — formal ist v_j im Tangentialraum von ξ_j . Jetzt kann man sich vorstellen, dass

es auf $(S_L^1 \times \mathbb{R})^N$ periodische Lösungen geben kann, die in den reellen Koordinaten x_j anders aussehen: Die Periodizität $\xi_j(t+T) = \xi_j(t)$ mit Periode T lautet jetzt $x_j(t+T) = x_j(t) + kL$ mit einer „Umlaufzahl“ $k \in \mathbb{N}$. Solche Funktionen nennen wir *Rotationslösungen*, s. Def. 6.4.

Ein wichtiger und mathematisch wegen der sich ergebenden Symmetrien reizvoller Spezialfall ist der, dass alle Fahrzeuge ein *homogenes Fahrverhalten* haben, d.h. identische Reaktionsparameter $\tau := \tau_j$ und Optimal-Geschwindigkeitsfunktionen $V := V_j$ besitzen. Dann lautet (6.1)

$$\ddot{x}_j(t) = \frac{1}{\tau}(V(x_{j+1}(t) - x_j(t)) - \dot{x}_j(t)), \quad j = 1, \dots, N, \quad x_{N+1} = x_1 + L \quad (6.5)$$

und (6.4)

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_j = v_j \\ \dot{v}_j = \frac{1}{\tau}(V(x_{j+1} - x_j) - v_j) \end{array} \right\}, \quad j = 1, \dots, N, \quad x_{N+1} = x_1 + L. \quad (6.6)$$

Dies Symmetrie ist eine Z_N -symmetrie mit der zyklischen Gruppe Z_N . Diese besagt Folgendes: Ist $(x_1(t), \dots, x_N(t))$ eine Lösung von (6.5), so auch $(x_2(t), \dots, x_N(t), x_1(t) + L)$, die durch einen zyklischen Shift entsteht. Diese Symmetrie wird noch offensichtlicher, wenn man die S_L^1 -Koordinaten verwendet: Mit $(\xi_1(t), \dots, \xi_N(t))$ ist auch $(\xi_2(t), \dots, \xi_N(t), \xi_1(t))$ eine Lösung.

Das erste Resultat notieren wir jedoch für allgemeines, *inhomogenes* Fahrverhalten

Satz 6.1. *Es gibt quasistationäre Lösungen von (6.1), $x_j^0(t)$, mit zeitlich konstanter, für alle Fahrzeuge gleiche Geschwindigkeit c und zeitlich konstanten Headways $d_j := x_{j+1}^0(t) - x_j^0(t)$.*

Beweis: Die Gleichungen $V_j(d_j) = c, j = 1, 2, \dots, N$ mit $d_1 + \dots + d_N = L$ für die Abstände d_j und für c haben eine eindeutige Lösung. ■

Bei homogenem Fahrverhalten ist die quasistationäre Lösung besonders einfach: Alle Abstände sind gleich ($d := \frac{L}{N}$), die Geschwindigkeit des Pulks ist $c := V(L/N)$.

Die quasistationären Lösungen wollen wir jetzt zu Gleichgewichtspunkten, also zu Ruhelösungen machen, um ihre Stabilität und ihre Verzweigungen (z.B. bzgl. L) untersuchen zu können. Dies geht auf mannigfache Weise. Die naheliegendste scheint diejenige mit Hilfe der Koordinatentransformation

$$X_j := x_j - x_j^0$$

zu sein. In den neuen (mitbewegten) Koordinaten lautet unser System jetzt:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X}_j = v_j - c \\ \dot{v}_j = \frac{1}{\tau_j}(V_j(X_{j+1} - X_j + d_j) - v_j) \end{array} \right\}, \quad j = 1, \dots, N, \quad X_{N+1} = X_1. \quad (6.7)$$

Wenn wir die Zustandsvariablen in die Reihenfolge $(X_1, \dots, X_N, v_1, \dots, v_N)$ bringen, hat (6.7) den Gleichgewichtspunkt $\mathbf{x}^0 = (0, \dots, 0, c, \dots, c)$. Um dessen Stabilität zu analysieren, linearisieren

$$A = \begin{pmatrix} D_1 & \mathcal{N} & O & \dots & O \\ O & D_2 & \mathcal{N} & \dots & O \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ O & \dots & O & D_{N-1} & \mathcal{N} \\ \mathcal{N} & \dots & \dots & O & D_N \end{pmatrix}$$

Allen diesen Jacobimatrizen ist gemein, dass sie das gleiche charakteristische Polynom

$$\chi_A(\lambda) = \left(\lambda\left(\lambda + \frac{1}{\tau_1}\right) + \beta_1\right) \cdots \left(\lambda\left(\lambda + \frac{1}{\tau_N}\right) + \beta_N\right) - \beta_1 \cdots \beta_N \quad (6.9)$$

haben, was man wohl mit Entwicklungssätzen zeigen kann, was ich jedoch weiter unten unter Ausnutzung der zyklischen Struktur für einen allgemeineren Fall (Aggressivitätsterme) beweisen werde (Satz 6.2).

Man erkennt sofort an (6.9), dass $\lambda = 0$ eine Nullstelle, sogar eine einfache ist, d.h. $\lambda = 0$ ist ein algebraisch einfacher Eigenwert der Jacobimatrix. Dies verhindert eine Anwendung des Prinzips der linearisierten Stabilität.

In den Übungen (AB 7) wurde der Fall *homogenen* Fahrverhaltens angenommen. In diesem Fall (aber nur in diesem) können die Koordinaten v_j durch die Headwaygeschwindigkeiten $\eta_j := \dot{y}_j$ ersetzt werden:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_j = \eta_j \\ \dot{\eta}_j = \frac{1}{\tau} \left(V(y_{j+1}) - V(y_j) - \eta_j \right) \end{array} \right\} \quad j = 1, \dots, N \quad y_{N+1} = y_1, \eta_{N+1} = \eta_1. \quad (6.10)$$

Wenn man hier die Reihenfolge $(y_1, \eta_1, \dots, y_N, \eta_N)$ wählt, ist die Jacobimatrix wieder eine block-zyklische Matrix mit den Diagonallblöcken D und Nebendiagonallblöcken \mathcal{N} :

$$D := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{N} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} D & \mathcal{N} & O & \dots & O \\ O & D & \mathcal{N} & \dots & O \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ O & \dots & O & D & \mathcal{N} \\ \mathcal{N} & \dots & \dots & O & D \end{pmatrix}$$

Man kann sich überlegen, welche der verschiedenen Versionen von Jacobimatrizen eine einfachere Anwendung von Entwicklungssätzen zulässt. Jedenfalls notieren wir für das charakteristische Polynom

$$\chi_A(\lambda) = \left(\lambda\left(\lambda + \frac{1}{\tau_1}\right) + \beta_1\right) \cdots \left(\lambda\left(\lambda + \frac{1}{\tau_N}\right) + \beta_N\right) - \beta_1 \cdots \beta_N \quad (6.11)$$

bzw. im homogenen Fall

$$\chi_A(\lambda) = \left(\lambda \left(\lambda + \frac{1}{\tau} \right) + \beta \right)^N - \beta^N. \quad (6.12)$$

Der triviale Eigenwert $\lambda = 0$ kann eliminiert werden, indem wir $y_N = L - y_1 - \dots - y_{N-1}$ eliminieren und aus (6.4) das $(2N - 1)$ -System

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_j = v_{j+1} - v_j \\ \dot{v}_j = \frac{1}{\tau_j} (V_j(y_j) - v_j) \\ \dot{v}_N = \frac{1}{\tau_N} (V_N(L - y_1 - \dots - y_{N-1}) - v_N) \end{array} \right\}, \quad j = 1, \dots, N - 1 \quad (6.13)$$

erhalten. Dieses System hat den Gleichgewichtspunkt $\mathbf{x}^0 := (d_1, \dots, d_{N-1}, c, \dots, c)$ und eine $(2N - 1) \times (2N - 1)$ -Jacobimatrix, von der man zeigen kann, dass sie dieselben Eigenwerte wie A hat — mit Ausnahme von $\lambda = 0$.

Bemerkungen:

1. Im allgemeinen inhomogenen Fall können wir nicht in ein System in den Abständen und deren Geschwindigkeiten übergehen.
2. Dass der triviale Eigenwert $\lambda = 0$ der Erhaltungsgröße $H(y, v) := \sum_{j=1}^N y_j$ zu verdanken ist, kann man so einsehen: $\dot{H}(y, v) = 0$ hat $\nabla H(y, v) \cdot f(y, v) = 0$ und dieses wiederum im Gleichgewichtspunkt $\nabla H(y, v) Df(y, v) = 0$ zur Folge, so dass man einen Linkseigenvektor $\nabla H(y, v) = (1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0)$ zum Eigenwert Null erhält.

6.1.1 Modellierung von aggressivem Fahrverhalten

Die Annahme, dass ein Fahrer seine Geschwindigkeit i.W. nur an dem Abstand zum Vordermann ausrichtet, trifft nur bedingt zu. Realistischer ist es, wenn auch die Änderung $\dot{y}_j = v_{j+1} - v_j$ mit einbezogen wird. Dies geschieht durch einen allgemeinen *Aggressivitätsterm* $g_j(y)$ (z.B. in Form einer Konstantenfunktion $g_j(y) := g_j$ für alle g) in

$$\ddot{x}_j = \frac{1}{\tau_j} \left(V_j(x_{j+1} - x_j) - \dot{x}_j \right) + g_j(x_{j+1} - x_j) (\dot{x}_{j+1} - \dot{x}_j), \quad j = 1, \dots, N, \quad x_{N+1} = x_1 + L \quad (6.14)$$

bzw. ($j = 1, \dots, N, x_{N+1} = x_1 + L, v_{N+1} = v_1$)

$$\begin{array}{l} \dot{x}_j = v_j \\ \dot{v}_j = \frac{1}{\tau_j} \left(V_j(x_{j+1} - x_j) - v_j \right) + g_j(x_{j+1} - x_j) (v_{j+1} - v_j) \end{array} \quad (6.15)$$

Dass g_j vom Abstand $y_j = x_{j+1} - x_j$ abhängt, erscheint sinnvoll: Für große Abstände wird man g_j verschwinden lassen.

Dieses System (6.15) hat dieselbe quasistationäre Lösung wie das ohne Aggressivitätsterm.

Wenn man die Zustandsvariablen wieder zu $(y_1, v_1, \dots, y_N, v_N)$ anordnet und die 2×2 -Matrizen

$$D_j := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\beta_j & -1/\tau_j - \gamma_j \end{pmatrix}, j = 1, \dots, N, \quad \mathcal{N}_j := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \gamma_j \end{pmatrix}$$

eingführt, ist die Jacobimatrix eine blockzyklische Matrix mit den Diagonalblöcken D_j und Nebendiagonalblöcken \mathcal{N}_j :

$$A = \begin{pmatrix} D_1 & \mathcal{N}_1 & O & \dots & O \\ O & D_2 & \mathcal{N}_2 & \dots & O \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ O & \dots & O & D_{N-1} & \mathcal{N}_{N-1} \\ \mathcal{N}_N & \dots & \dots & O & D_N \end{pmatrix}$$

mit $\beta_j := \frac{1}{\tau_j} V_j'(d_j)$, $\gamma_j := g_j(d_j)$.

Satz 6.2. Die Eigenwerte von A sind die Lösungen der Eigenwertgleichung

$$\prod_{j=1}^N \left(\lambda \left(\lambda + \gamma_j + \frac{1}{\tau_j} \right) + \beta_j \right) = \prod_{j=1}^N (\gamma_j \lambda + \beta_j) \quad (6.16)$$

Für den Z_N -symmetrischen Fall homogenen Fahrverhaltens ergibt sich

$$\left(\lambda \left(\lambda + \gamma + \frac{1}{\tau} \right) + \beta \right)^N = (\gamma \lambda + \beta)^N \quad (6.17)$$

Beweis: Wir machen den **Ansatz** $u = (u_1, \dots, u_N)$ mit $u_j \in \mathbb{C}^2$ und $u_{j+1} = \mu_j u_j$, $j = 1, 2, \dots, N$ für einen Block-Eigenvektor von A zum Eigenwert λ , wobei $u_{N+1} = u_1$, also $\prod_{j=1}^N \mu_j = 1$, $\mu_j \in \mathbb{C}$ angenommen wird. Wir werden sehen, dass dieser Ansatz Erfolg haben wird, ja, dass sogar jeder Eigenvektor so gewonnen werden kann. Dann muss

$$D_j u_j + \mu_j \mathcal{N}_j u_j = \lambda u_j, j = 1, 2, \dots, N$$

gelten, was $\lambda \in \sigma(D_j + \mu_j \mathcal{N}_j)$, also

$$\left(\lambda \left(\lambda + \frac{1}{\tau_j} + \gamma_j - \mu_j \gamma_j \right) + \beta_j (1 - \mu_j) \right) = 0,$$

bzw.

$$\left(\lambda \left(\lambda + \frac{1}{\tau_j} + \gamma_j + \beta_j \right) = \mu_j (\beta_j + \lambda \gamma_j) \right)$$

zur Folge hat.

Multipliziert man die linken und rechten Seiten N -mal miteinander und beachtet $\prod_{j=1}^N \mu_j = 1$, so erhält man die gesuchte Eigenwertgleichung!

Ist nun λ eine Lösung der Eigenwertgleichung, so kann man

$$\mu_j := \left(\lambda \left(\lambda + \frac{1}{\tau_j} + \gamma_j + \beta_j \right) / (\beta_j + \lambda \gamma_j) \right), j = 1, 2, \dots, N$$

definieren, $\prod_{j=1}^N \mu_j = 1$ und $\lambda \in \sigma(D_j + \mu_j \mathcal{N}_j)$ feststellen — der Ansatz ist gerechtfertigt. ■

6.2 Homogenes Fahrverhalten

Wir nehmen jetzt an, dass alle Fahrzeuge sich gleich verhalten und verzichten auf den Aggressivitätsterm: Dann ist $\tau = \tau_j$, $V(y) := V_j(y)$, $j = 1, 2, \dots, N$, und es geht um das System (6.6):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_j = v_j \\ \dot{v}_j = \frac{1}{\tau}(V(x_{j+1} - x_j) - v_j) \end{array} \right\}, \quad j = 1, \dots, N, \quad x_{N+1} = x_1 + L, \quad (6.18)$$

dessen Jacobimatrix als Eigenwerte die Nullstellen des Polynoms

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda^2 + \lambda + \beta)^N - \beta^N$$

mit $\beta := V'(L/N)/\tau$ hat (s. Satz 6.2 oder auch (6.9). Im Folgenden setzen wir $\tau := 1$, so dass wir als charakteristisches Polynom

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda^2 + \lambda + \beta)^N - \beta^N$$

erhalten.

Wir wissen, dass wir uns um die triviale Nullstelle nicht kümmern müssen, weil wir mittels Erhaltungsgröße $H(y, v) : \sum_{j=1}^N y_j (= L)$ eine Variable eliminieren können. Wir suchen eine Stabilitätsbedingung, die garantiert, dass alle Nullstellen negativen Realteil haben. Dabei wollen wir den Einfluss des Parameters L und damit der Verkehrsdichte N/L in Gestalt des Parameters β auf die Stabilität untersuchen. Daher interessieren wir uns dafür, wie die Eigenwerte von β abhängen. Für $\beta = 0$ sind $\lambda = 0$ und $\lambda = -1$ jeweils algebraisch N -fache Eigenwerte.

Für eine Nullstelle λ von χ_A erkennt man

$$\frac{\lambda^2 + \lambda + \beta^N}{\beta} = 1,$$

d.h. $z := \frac{\lambda^2 + \lambda + \beta}{\beta}$ ist eine N -te Einheitswurzel, wenn $\beta > 0$. Zu jeder der N Einheitswurzeln $c_k + is_k$ wobei $c_k := \cos(2\pi k/N)$, $s_k := \sin(2\pi k/N)$, $k = 1, \dots, N$ gibt es also zwei Eigenwerte. Hat man einen Eigenwert „vom Typ k “, so erhält man den anderen durch Spiegelung an $z = -\frac{1}{2}$ ($\lambda \mapsto -(\lambda + 1)$). Die Eigenwerte vom Typ k und $N - k$ bilden komplex-konjugierte Paare. Nur für $k = N$ und gerades N und $k = \frac{N}{2}$ sind bzw. können die Eigenwerte reell sein. Für $k = N$ sind es die Eigenwerte $\lambda = 0$ und $\lambda = -1$ (für alle β), für $k = \frac{N}{2}$, wandern die beiden Eigenwerte mit wachsendem β auf der reellen Achse aufeinander zu, um bei $z = -\frac{1}{2}$ zusammenzustoßen und nicht reell zu werden.

Machen wir den Ansatz $\lambda = \mu + i\omega$, so genügt ein Eigenwert vom Typ k

$$\mu^2 - \omega^2 + \mu + \beta + i\omega(2\mu + 1) = \beta(c_k + is_k).$$

Also: $\lambda = \mu + i\omega$ ist also genau dann Eigenwert, wenn es ein $k \in \{1, 2, \dots, N\}$ gibt mit

$$\mu^2 - \omega^2 + \mu = \beta(c_k - 1), \quad \omega(2\mu + 1) = \beta s_k. \quad (6.19)$$

Für $\beta = 0$ haben wir zwei N -fache Nullstellen $\lambda = 0$ und $\lambda = -1$. Wenn man β wachsen lässt, erhält man $2N$ Eigenwertkurven, von denen je zwei spiegelsymmetrisch zu $\mu = -\frac{1}{2}$ sind (s. Fig. 2 in GASSER ET AL.). Die bei $\lambda = 0$ entspringenden N Kurven laufen zunächst nach links, biegen dann um, um dann nacheinander für $k = 1, 2, \dots, N - 1$ (Ausnahme $k = \frac{N}{2}$ für gerades N) bei

$$\beta := \beta_k := \frac{1}{1 + c_k}$$

die imaginäre Achse im Imaginärteil

$$\omega := \omega_k := \frac{s_k}{1 + c_k}$$

zu überschreiten — mit nichtverschwindender Geschwindigkeit. Es findet Hopfverzweigung statt! Und zwar für das System (6.13) der Abstände und Geschwindigkeiten. Dies passiert für $k = 1$ das erste Mal — daher ist β_1 der wichtigste Parameter, weil die quasistationäre Lösung für $\beta < \beta_1$ noch asymptotisch stabil ist.

Satz 6.3. *Betrachte das homogene Verkehrsmodell (6.18). Falls $V'(L/N) < \frac{1}{1 + \cos(2\pi/N)}$, so ist die quasistationäre Lösung asymptotisch stabil. Falls*

$$V'(L/N) = \frac{1}{1 + \cos(2\pi \cdot k/N)}$$

für ein $k = 1, 2, \dots, N - 1$ gilt, findet Hopfverzweigung¹ statt, d.h. es gibt in einer Umgebung der quasistationären Lösung periodische Lösungen (periodisch in Abständen und Geschwindigkeiten). Die „hopfasymptotischen“ Perioden sind $\frac{2\pi}{\omega_k}$. Die Z_N -Symmetrie des homogenen Systems hat zur Folge, dass die periodischen abzweigenden Lösungen den Gleichungen

$$y_j(t + kT/N) = y_{j+1}(t), \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad v_j(t + kT/N) = v_{j+1}(t), \quad j = 1, 2, \dots, N$$

genügen, die als wandernde Wellen bezeichnet werden.

Bemerkungen:

1. Der wichtigste Fall ist $k = 1$, die Eigenschaft der wandernden Welle lautet

$$y_j(t + T/N) = y_{j+1}(t), \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad v_j(t + T/N) = v_{j+1}(t), \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Nach einem N -ten Teil der Periode T , also nach T/N ZE, hat sich der in Headways und Geschwindigkeiten gemessene Zustand aller Fahrzeuge nur insofern geändert, als dass ab jetzt Fahrzeug Nr.1 so fährt wie Fahrzeug Nr.2, Fahrzeug Nr.2 wie Fahrzeug Nr.3, ..., Fahrzeug Nr.N wie Fahrzeug Nr.1 vor T/N ZE.

Wie beweist man diese Wandernde-Wellen-Eigenschaft? Eine besondere Rolle spielt der Shift

$$S(y_1, \dots, y_N, v_1, \dots, v_N) := (y_2, \dots, y_N, y_1, v_2, \dots, v_N, v_1)$$

¹Hopfverzweigung findet gleichzeitig für $k = 1, N - 1$, für $k = 2, N - 2$, etc. statt.

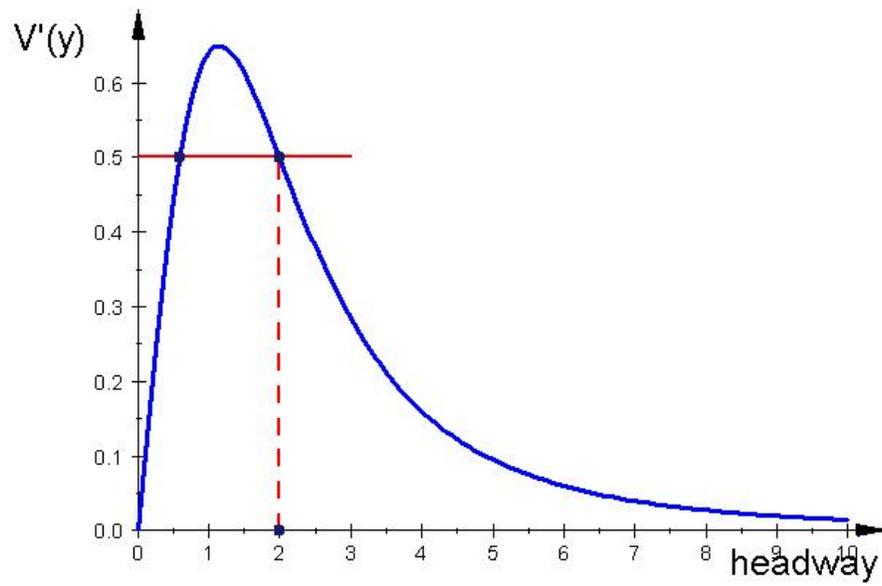


Abbildung 6.3: Graph von $V'(y)$ und zwei Hopflängen

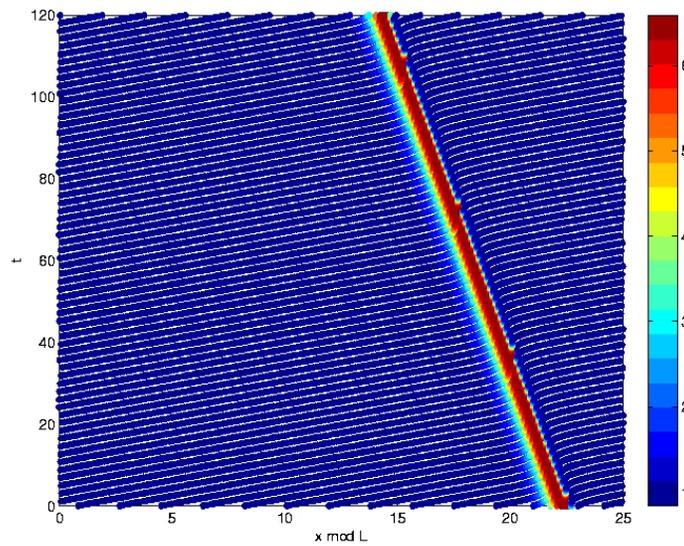


Abbildung 6.4: $N = 20, L = 25, v_{Max} = 1$

6.3 Baustelle

Bisher wurde der Verkehrsweg als homogen angenommen: Jeder Ort auf dem Kreis ist gleichberechtigt. Das geben wir jetzt auf, indem wir die Optimale-Geschwindigkeits-Funktion $V(y)$ so verändern, dass wir die dort auftretende maximale Geschwindigkeit v_{max} vom Ort x auf dem Kreis abhängig machen. Hierdurch können Verkehrsengpässe oder Baustellen modelliert werden. Hierbei führen wir einen Parameter $\varepsilon \geq 0$ ein, der die Stärke der Baustelle messen soll, so dass man für $\varepsilon = 0$ das baustellenfreie Modell erhalten.

In der Dissertation von T. SEIDEL wird

$$V_{j,\varepsilon}(x, y) := \left(1 - \varepsilon e^{-(x - \frac{L}{2})^2}\right) V_j(y) \quad (6.20)$$

gesetzt. Die Baustelle hat ihr Zentrum in $x := L/2$, wirkt sich aber auf den gesamten Kreis aus, wenn auch sehr stark mit $e^{-(x - \frac{L}{2})^2}$ abnehmend. Andere Ansätze sind denkbar².

Die quasistationären Lösungen mit konstanter Geschwindigkeit c existieren natürlich nur für $\varepsilon = 0$. Die Frage ist: Was wird aus ihnen, wenn man die Baustelle (sprich: ε) „aufdreht“? Die Lösung findet man, wenn man die quasistationären Lösungen als spezielle periodische Lösungen (*Rotationslösungen*) auf der Mannigfaltigkeit $(S_L^1 \times \mathbb{R})^N$ auffasst und Störungssätze (SIF!) für periodische Lösungen, aufgefasst als Fixpunkte von Poincaré-Abbildungen, ins Spiel bringt. Ziel ist eine Verzweigungsanalyse mit den beiden Parametern ε und L .

Definition 6.4. *Eine Rotationslösung mit orbitaler Periode T und Umlaufzahl $k \in \mathbb{N}$ ist durch*

$$x_j(t + T) = x_j(t) + kL, \quad v_j(t + T) = v_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

definiert, wobei T und k als minimal angenommen werden.

Man sieht sofort, dass unsere quasistationären Lösungen für $\varepsilon = 0$ Rotationslösungen mit orbitaler Periode $T := L/c$ und Umlaufzahl $k = 1$ sind, wobei c die gemeinsame Geschwindigkeit aller Autos ist. Die T -periodischen Lösungen aus einer Hopfverzweigung sind jedoch i.A. keine Rotationslösungen. Zwar genügen sie

$$x_j(t + T) = x_j(t) + L_p, \quad v_j(t + T) = v_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, N$$

mit einem für alle Autos gleichem $L_p > 0$, aber nur dann, wenn L und L_p kommensurabel sind, werden solche Lösungen zu Rotationslösungen mit einer i.A. sehr großen Umlaufzahl k und großen orbitalen Perioden $mT, m \in \mathbb{N}$.

Bemerkung: Ohne Baustelle kann man unser Modell als ein gedämpftes Schwingungssystem auffassen. Eine Baustelle der Stärke ε wirkt wie eine L -periodische Anregung auf diese Schwingung.

²Die Wahl des Bezeichners x für den Ort auf dem Kreis ist etwas unglücklich. Besser wäre $\xi \in S_L^1$, um Konfusion mit der reellen Variablen x_j der zurückgelegten Längen zu vermeiden. Ich wollte aber mit der Literatur konsistent bleiben.

Wir setzen $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_N, v_1, \dots, v_N)$ und $\mathbf{L} := (L, \dots, L, 0, \dots, 0)$. Dann sind Rotationslösungen mit Umlaufzahl $k = 1$ (nur für solche interessieren wir uns im Folgenden) durch

$$\mathbf{x}(t + T) = \mathbf{x}(t) + \mathbf{L} \text{ für alle } t$$

definiert.

Man kann die Stabilitätstheorie für periodische Orbits autonomer Systeme auch auf Mannigfaltigkeiten ausdehnen. Dann besitzen Rotationslösungen mit orbitaler Periode T $2N$ Floquetmultiplikatoren $\mu_k, k = 1, 2, \dots, 2N$. Führt man die Zeit-T-Abbildung φ^T unseres reellen $2N$ -Systems ein, so gilt $\varphi^T(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}(t) + \mathbf{L}$ für jeden Punkt $\mathbf{x}(t)$ auf dem „Rotationsorbit“. Definiert man $Q(\mathbf{x}) := \varphi^T(\mathbf{x}) - \mathbf{L}$, so ist $\mathbf{x}(t)$ Fixpunkt der auf dem \mathbb{R}^{2N} definierten Abbildung Q , und die Floquetmultiplikatoren sind gerade die Eigenwerte von $DQ(\mathbf{x}(t))$. Aus der Sicht von Mannigfaltigkeiten ist Q die Realisierung der Zeit-T-Abbildung auf $(S_L^1 \times \mathbb{R})^N$.

Wie bei allen autonomen Systemen ist ein Floquetmultiplikator stets trivial $= 1$. Ohne Baustelle ($\varepsilon = 0$) gibt es eine einfache Beziehung zwischen den Eigenwerten λ_k der quasistationären Lösungen, aufgefasst als Gleichgewichtspunkte, und den Floquetmultiplikatoren, nämlich

$$\mu_k = e^{T\lambda_k}, k = 1, 2, \dots, 2N.$$

Wie sieht man dies ein? Man kann die Zeit-T-Abbildung und Linearisierung vertauschen, die Zeit-T-Abbildung eines autonomen Systems $\dot{x} = Ax$ ist gerade e^{TA} , und die Eigenwerte λ einer Matrix A werden durch $A \mapsto e^{TA}$ nach $e^{T\lambda}$ transformiert.

Nun ist $\lambda = 0$ ein algebraisch einfacher Eigenwert der quasistationären Lösung. Dies hat zur Folge, dass $\mu = 1$ ein algebraisch einfacher Floquetmultiplikator der zugehörigen Rotationslösung ist. Führt man jetzt eine Poincaré-Abbildung Π etwa mit dem durch $x_1 \bmod L = 0$ definierten transversalen Schnitt³ ein, so wird die Rotationslösung zu einem *nichtentarteten* Fixpunkt, der zusammen mit seinen Eigenwerten wegen SIF durch $\varepsilon > 0$ gutartig gestört wird.

Satz 6.5. *Für festes L gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass (6.8) eine Rotationslösung $\mathbf{x}(\varepsilon, t)$ für $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$ mit orbitaler Periode $T(\varepsilon)$ besitzt, welche für $\varepsilon = 0$ mit der quasistationären Lösung ($\mathbf{x}(0, t) = x^0(t)$) zusammenfällt und so glatt von ε abhängt, wie es die rechte Seite des DGL-Systems ist.*

*Wenn die quasistationären Lösungen $\mathbf{x}^0(t)$ asymptotisch stabil (instabil) sind, so sind die Rotationslösungen orbital asymptotisch stabil (instabil)*⁴.

Bemerkung:

Wir wissen, dass es sein kann, dass für $\varepsilon = 0$ zwei Hopfpunkte (für gewisse „Hopfkritische“ L) stabile und instabile quasistationäre Lösungen trennen können. Es kann erwartet werden, dass eine analoge Situation auch für Rotationslösungen besteht, wobei die Hopfverzweigungspunkte

³In der reellen Version handelt es sich hier um eine unendliche Schar paralleler Hyperebenen. In der Mannigfaltigkeitsversion ist es aber einfach eine Hyperfläche.

⁴Evtl. muss ε_0 hierzu verkleinert werden.

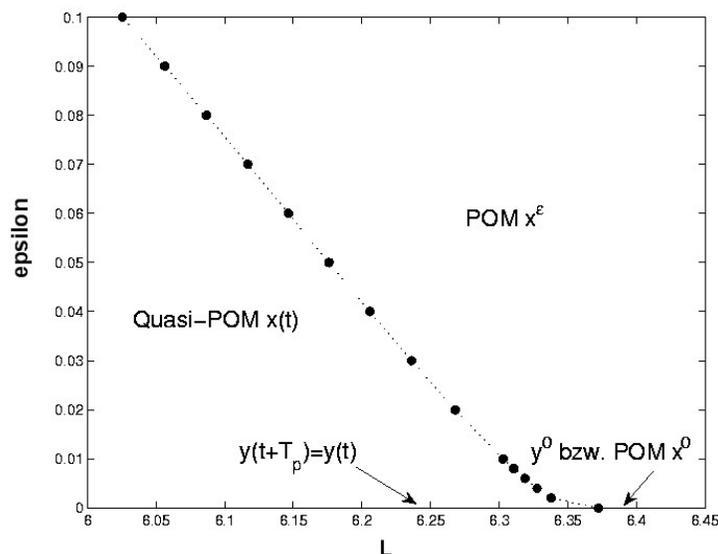


Abbildung 6.5: Eine Neimark-Sacker-Kurve

in Neimark-Sacker-Verzweigungspunkte für eine Poincaré-Abbildung übergehen. Die abzweigenden invarianten Kurven können dann als Quasi-Rotationslösungen gedeutet werden. In der (L, ε) -Ebene erwarte ich die Existenz von Neimark-Sacker-Verzweigungskurven, die bei $\varepsilon = 0$ aus einem Hopfpunkt entspringen wie etwa in Abb. 6.5, die numerisch von T. SEIDEL gefunden wurde.

6.3.1 Homogenes Fahrverhalten

Dieser Fall ist mathematisch besonders reizvoll, weil eine Z_N -Symmetrie vorliegt, die für $\varepsilon = 0$ durch die Eigenschaft „gleicher Abstand“ bei quasistationären Lösungen und durch die Eigenschaft

$$y_j(t + T/N) = y_{j+1}(t), \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad v_j(t + T/N) = v_{j+1}(t), \quad j = 1, 2, \dots, N$$

einer wandernden Welle wiedergegeben wird.

Man kann nun zeigen, dass die Rotationslösungen, die aus den quasistationären Lösungen mit zunehmenden ε „herauswachsen“, die Eigenschaft

$$x_j(t + T/N) = x_{j+1}(t), \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad v_j(t + T/N) = v_{j+1}(t), \quad j = 1, 2, \dots, N$$

besitzt, was wir als **POM-Lösung** (*Ponies-On-A-Merry-Go-Round-solution*) bezeichnet haben, einer Arbeit von ARONSON, GOLUBITSKY, KRUPA. folgend. Nach Ablauf des N ten Teils der orbitalen Periode befindet sich das Fahrzeug Nr. j dort, wo der Vordermann war und hat auch dessen Geschwindigkeit übernommen.

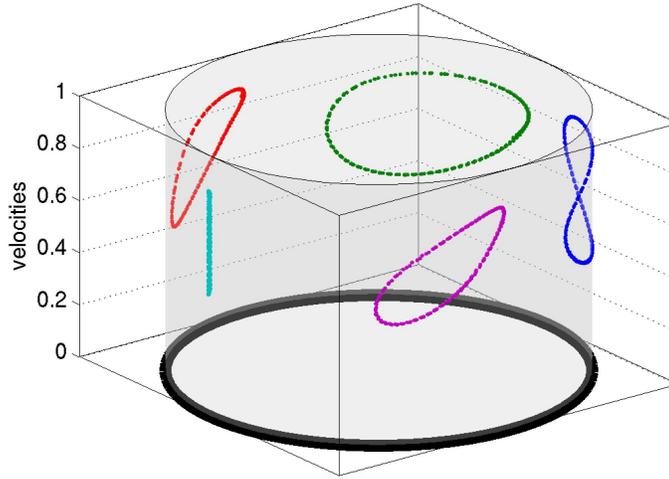


Abbildung 6.6: Invariante Kurven der reduzierten Poincaré-Abbildung

Die Beweisidee hierzu besteht in der Verwendung einer *symmetriegerechten (reduzierten)* Poincaré-Abbildung und der Anwendung von SIF. Statt wie bei der „normalen“ Poincaré-Abbildung machen wir nicht dann eine stoboskopische Aufnahme, wenn das Fahrzeug Nr.1 den „Kontrollpunkt“ $\xi = 0$ passiert⁵, sondern schon dann, wenn irgend ein Fahrzeug diesen Kontrollpunkt passiert. Wir haben offensichtlich dann eine POM, wenn nach jeder stoboskopischen Aufnahme die gesamte Fahrzeugkonstellation unverändert bleibt — vorausgesetzt, man nummeriert die Fahrzeuge um, indem jedes Fahrzeug die Nummer seines Vordermannes erhält. So wird eine POM zu einem Fixpunkt der reduzierten Poincaré-Abbildung, die N ten Potenzen dessen Eigenwerte sind gerade die Eigenwerte des Fixpunkts der nicht-reduzierten Poincaré-Abbildung, also die nichttrivialen Floquetmultiplikatoren! Auf diese reduzierte Fixpunkt-Gleichung kann dann SIF angewendet werden! Damit kann dann das Gewünschte gezeigt werden.

Wieder beobachtet man Neimark-Sacker-Verzweigungen für die reduzierte Poincaré-Abbildung, die für $\varepsilon = 0$ zu den Hopfverzweigungen werden. Die Symmetrie, die für die hopfperiodischen Lösungen noch so einfach formuliert werden kann, ist weniger leicht zu fassen. Wir nennen die zu den invarianten Kurven der reduzierten Poincaré-Abbildung (s. Abb. 6.6) gehörenden Lösungen **Quasi-POMs**.

Näheres findet man in der letzten Arbeit des Literaturverzeichnisses und in der Dissertation von T. SEIDEL.

⁵Die gesamte Fahrzeugkonstellation befindet sich dann in der durch $x_1 \bmod L = 0$ definierten Hyperebene.

6.4 Literatur

I. GASSER AND G. SIRITO AND B. WERNER, *Bifurcation analysis of a class of 'car following' traffic models*, *Physica D*, 2004,222-241.

I. GASSER AND T. SEIDEL AND G. SIRITO AND B. WERNER, *Bifurcation analysis of a class of 'car following' traffic models II: Variable Reaction Times and Aggressive Drivers*, *Bulletin of the Institute of Mathematics, Academia Sinica*, 2007

T. SEIDEL AND I. GASSER AND B. WERNER, *Microscopic Car-Following Models Revisited: from Road Works to Fundamental Diagrams*, Preprint 2007

T. SEIDEL, *Mikroskopische Verkehrsmodelle: Baustellen und wandernde Wellen* Dissertation 2007