

Fibonacci-Zahlen, Goldener Schnitt, Kettenbrüche und
Anwendungen
für Lehramtsstudierende
SoSe 06

Bodo Werner

<mailto:werner@math.uni-hamburg.de>

28. August 2006

Inhaltsverzeichnis

1	Basiswissen	3
1.1	Einführung	3
1.1.1	Kaninchen	4
1.1.2	Pflanzenwachstum	5
1.1.3	X-Chromosome	6
1.1.4	Wahrscheinlichkeiten	7
1.1.5	Geometrie, Spiele, Kombinatorik	8
1.1.6	Phyllotaxis	9
1.2	Erste Eigenschaften der Fibonacci-Folge	11
1.2.1	Lineare Differenzgleichungen	13
1.2.2	Fibonaccizahlen und der Goldene Schnitt	15
2	Drehungen	16
2.1	Drehungen der Ebene	16
2.1.1	Die Kreislinie	16
2.1.2	Drehungen	18
2.1.3	Die goldene Drehung	18
2.2	Die Analyse von Zahlen mit Hilfe von Drehungen	19
2.2.1	Ein von einer Drehung erzeugtes dynamisches System	19
2.2.2	Rationaler Drehwinkel	20
2.2.3	Irrationaler Drehwinkel	21
2.2.4	Ein spezieller Orbit	22
2.2.5	Linke und rechte Nachbarn und rationale Schranken für den Drehwinkel	23
2.2.6	Orbit der goldenen Drehung	24
2.2.7	Aufdatierung der linken und rechten Nenner und Zähler	27
2.2.8	Zusammenhang mit Kettenbrüchen	29
2.2.9	Nenner-Algorithmus	29
2.2.10	Kurzform des Nenner-Algorithmus	31
2.2.11	Ein Beispiel	32
2.2.12	Nenneralgorithmus für Goldene Drehung	35

3	Kettenbrüche	37
3.1	Einführung	37
3.2	Farey-Folgen	39
3.2.1	Farey-Folge und Medianten-Addition von Brüchen	39
3.2.2	Fibonacci-Zahlen und Fareyfolgen	41
3.2.3	Beziehung zum Nenner-Algorithmus	42
3.3	Kettenbrüche	43
3.3.1	Einführung	43
3.3.2	Geometrische Veranschaulichung („Rechteckalgorithmus“)	45
3.3.3	Berechnung des Kettenbruchs — Erste Beschreibung	46
3.3.4	Euklidischer Algorithmus	47
3.3.5	Euklidischer Algorithmus zur Berechnung eines Kettenbruchs	48
3.3.6	Kettenbruch einer rationalen Zahl	49
3.3.7	Unendliche Kettenbrüche bei irrationalen Zahlen	51
3.3.8	Konvergenz der Konvergenten	55
3.3.9	Geometrische Konstruktion	57
3.3.10	Die Goldene Drehung im Zusammenhang mit Pflanzenwachstum	57
3.3.11	Kettenbrüche, Goldener Schnitt und Fibonacci-Zahlen	59
3.3.12	Spiralbildung bei Sonnenblumen	62
3.3.13	Appetitliches über Kettenbrüche	63
3.4	Literatur	65

Kapitel 1

Basiswissen

1.1 Einführung

Bei den Fibonaccizahlen¹ waren wir in Kap. III.1.4.2 auf das rekursive Wachstumsgesetz (nach Umtaufung von a_n in F_n)

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 2$$

gestoßen. In Turin gibt es ein sehr schönes Gebäude, die Mole Antonelliana, die auf ihrer Kuppel die Fibonacci-Zahlen zu Ehre von Fibonacci trägt, siehe Abb. 1.2

Wenn man als *Anfangswerte* $F_0 := 0, F_1 := 1$ vorgibt, erhält man eine Zahlenfolge, die **die Fibonacci-Folge** genannt wird:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, F_{10} = 55, 89, \\ 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, F_{20} = 6765, 10946,$$

¹Nach LEONARDO DA PISA, genannt FIBONACCI (etwa 1170-1250), verfasste das berühmte Buch „liber abaci“



Abbildung 1.1: Leonardo da Pisa



Abbildung 1.2: Mole antonelliana in Turin

17711, 28657, 46368, 75025, 121393, 196418, 317811, 514229, $F_{30} = 832040$,
1346269, 2178309, 3524578, 5702887, 9227465, 14930352, 24157817, 39088169,
 63245986 , $F_{40} = 102334155$, ...

Mit (F_n) bezeichnen wir jetzt stets diese Fibonacci-Folge.

Andere Anfangswerte führen auf andere Zahlenfolgen, die **Lucasfolgen**² genannt werden. Z.B.

1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, ...

welche auch zuweilen **die** Lucasfolge genannt wird.

Warum sind Fibonacci-Zahlen so populär? Der eine Grund ist die enge Beziehung zum **Goldenen Schnitt**, siehe Kap. 1.2.2, der auch schon in Kap. III.1.4.2 hergestellt wurde.

Der andere ist das Auftreten in der Biologie, sei es als Anzahl der Blütenblätter etwa von Gänseblümchen oder als Anzahl von Spiralen (Parastichen) z.B. bei Sonnenblumen, Kiefernzapfen oder Ananas.

Einen kleinen Überblick findet man in meinem Vortrag auf der 25. Absolventenfeier am 8. Februar 2006 mit dem Titel **Fibonacci-Zahlen und ihr Vorkommen in der Biologie**, der sehr gut als Einleitung zu dieser Vorlesung angesehen werden kann. Er war an Nicht-MathematikerInnen gerichtet.

1.1.1 Kaninchen

Leonardo da Pisa stellte folgende Frage: Wieviel Nachkommen hat ein einzelnes Kaninchenpaar nach einem Jahr?

Es ist ein sehr vereinfachendes mathematisches Modell, das diese Frage beantwortet. Ich wiederhole kurz die Ausführungen aus Kap. III.1.4.2:

²EDOUARD LUCAS, 1842-1891

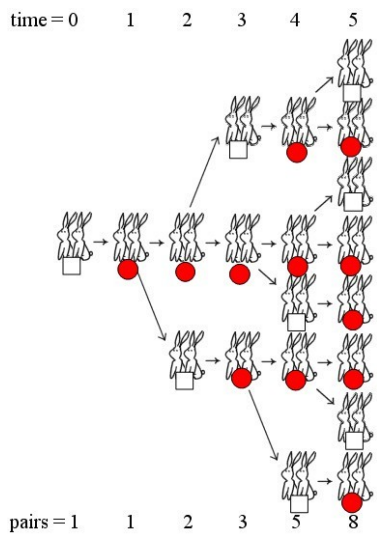


Abbildung 1.3: Kaninchenvermehrung

In einer Tierpopulation bezeichne J_n die Anzahl der Jungtiere und A_n die Anzahl der Alttiere nach n Monaten. Jungtiere können sich noch nicht fortpflanzen, während die Alttiere pro Monat ein Jungtiernachkommen zeugen³, aber nie sterben. Jungtiere werden nach einem Monat zu Alttieren. Dann gilt

$$A_{n+1} = A_n + J_n, \quad J_{n+1} = A_n.$$

Die erste Beziehung besagt, dass Jungtiere im „nächsten“ (dem auf n folgenden) Zeitschritt (dem $n + 1$ -ten) Alttiere werden, die zweite Gleichung, dass es im nächsten Zeitschritt genauso viele Jungtiere wie zuvor Alttiere gibt. Dann kann man für J_n auch A_{n-1} setzen und man erhält

$$A_{n+1} = A_n + A_{n-1},$$

die **Fibonacci-Rekursion**. Auch die Zahl aller Kaninchenpaare $X_n := A_n + J_n$ im n -ten Monat genügt dieser Fibonacci-Rekursion.

Wenn für $n = 1$ gerade ein Jungtier(paar) und kein Alttier(paar) existiert, so gilt $X_0 = 0, X_1 = J_1 = 1$ und man erhält für (X_n) die Fibonacci-Folge: $X_n = F_n$. Nach genau einem Jahr, also im 13. Monat, gibt es demnach $F_{13} = 233$ Kaninchenpaare, während es nach einem halben Jahr, also im 7. Monat, „nur“ $F_7 = 13$ Kaninchenpaare gibt.

In Abb. 1.3 werden die Alttiere mit einem roten Kreis und die Jungtiere mit einem weißen Quadrat markiert.

1.1.2 Pflanzenwachstum

Abb. 1.4 zeigt einen Prototyp einer Pflanze mit einer Fibonacci-Gesetzmäßigkeit, was die Seitentriebe betrifft.

³Genauer: Ein Geschlechterpaar zeugt ein weibliches und ein männliches Jungtier.

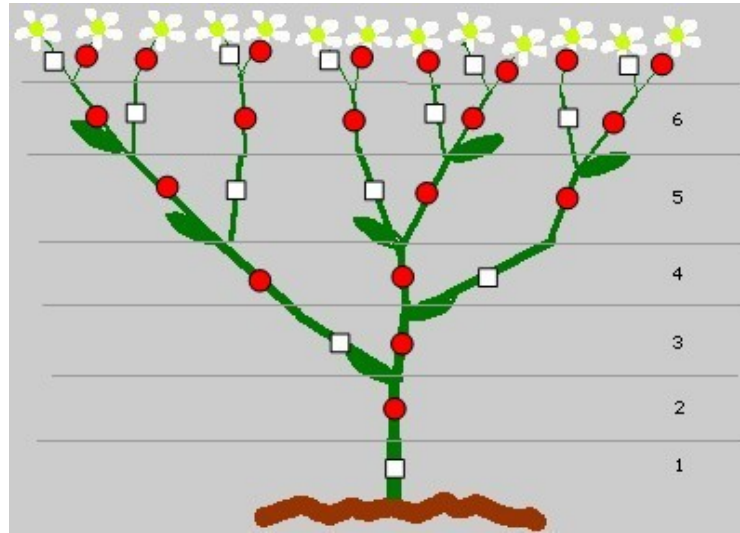


Abbildung 1.4: Blume mit Seitentriebe

Die „Alttriebe“ habe ich mit roten Kreisen, die „Jungtriebe“ mit weißen Quadraten versehen. Man erkennt sofort die Analogie zur Kaninchenvermehrung. Es gibt wirklich Blumen, die so wachsen: *Achillea ptarmica* — Sumpf-Schafgarbe.

1.1.3 X-Chromosome

Eine andere wenig bekannte Anwendung bezieht sich auf die Vererbung des X-Chromosoms, siehe **Erbmäßig bevorzugte Vorfahrenlinien bei zweigeschlechtigen Lebewesen** (Arndt Richter 1979). Wenn man unterstellt, dass jeder Mensch 2^n verschiedene Ahnen in der n -ten Vorgeneration hat ($n = 1$: 2 Eltern, $n = 2$: 4 Großeltern, etc), so kann man beispielsweise bei einem Mann nach der Anzahl der Vorfahren n -ter Stufe fragen, die einen Einfluss auf sein (einziges) X-Chromosom haben. Dabei muss man wissen, dass eine Frau ihre beiden X-Chromosome zu gleichen Teilen von Mutter und Vater erhält, während ein Mann sein X-Chromosom nur von der Mutter bekommt (das andere Y-Chromosom ist eine Kopie des Y-Chromosoms des Vaters). Wenn wir jetzt mit M_n die auf das X-Chromosom Einfluss habenden Frauen („Mütter“) und mit V_n entsprechend die „Väter“ bezeichnen, so haben beide Eltern einer der M_n Frauen und nur die Mutter eines der V_n Männer X-chromosomalen Einfluss. Es ergibt sich

$$M_{n+1} = M_n + V_n, \quad V_{n+1} = M_n.$$

Das ist genau die Rekursion für die Kaninchenvermehrung, wenn man „Mütter“ mit Alttieren und „Väter“ mit Jungtieren gleichsetzt! Auch die Anfangsbedingungen sind die gleichen: $V_0 = 1, M_0 = 0$.

Die Abb. 1.5 illustriert diesen Sachverhalt.

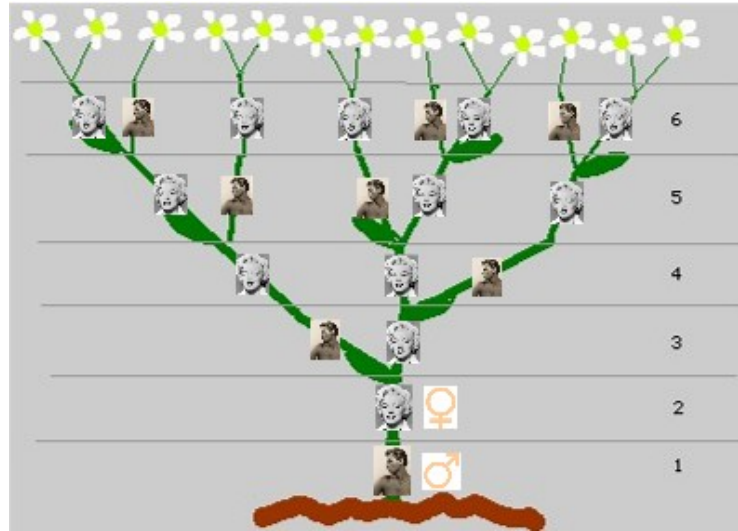


Abbildung 1.5: X-Chromosom-Vererbung

Beispielsweise gibt es in der 6. Vorgeneration eines Mannes von insgesamt $2^6 = 64$ Ahnen genau $F_7 = 13$ Ahnen, die dessen X-Chromosom beeinflusst haben könnten.

1.1.4 Wahrscheinlichkeiten

Wenn wir in den Stammbaum in Abb. 1.5 auch noch alle fehlenden Väter aufnehmen würden, gäbe es in der n -ten Vorgeneration 2^n Personen, von denen ja F_{n+1} X-chromosomalen Einfluss auf den Mann (Wurzel des Baums) hat.

Nun stellen wir uns einen Münzwurf vor, der bestimmt, wie der Baum von unten nach oben durchlaufen wird: Bei „Wappen“ wird der Vater, bei „Zahl“ die Mutter ausgewählt. Wir fragen nach der Wahrscheinlichkeit, dass nach n Würfeln ein Vorfahr ausgelost wird, der X-chromosomalen Einfluss hat. Die Wahrscheinlichkeit ist gerade

$$p = \frac{F_{n+1}}{2^n}.$$

Jetzt fragen wir bei n Münzwürfen nach der Wahrscheinlichkeit, dass *niemals* k -mal hintereinander Wappen geworfen wird. Für $k = 2$ ist dies fast die eben beschriebene Situation. Nur, dass im ersten Wurf gelost wird, ob es sich um einen Mann oder eine Frau handelt, deren Stammbaum man verfolgen will. Die Antwort ist jetzt

$$p = \frac{F_{n+2}}{2^n}.$$

Für $k > 2$ führt dieselbe Frage auf „Fibonacci- k -Schritt-Zahlen“, die z.B. für $k = 3$ durch

$$F_n^{(3)} = F_{n-1}^{(3)} + F_{n-2}^{(3)} + F_{n-3}^{(3)},$$

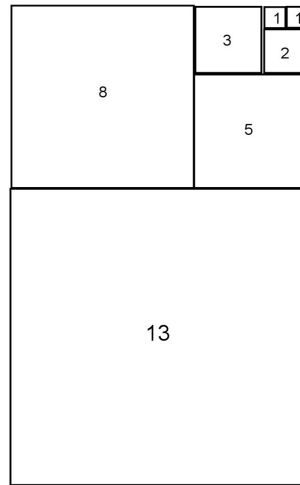


Abbildung 1.6: Fibonacci-Rechteck

$$F_0^{(3)} = 0, F_1^{(3)} = 1, F_2^{(3)} = 1$$

definiert sind (und **Tribonacci-Zahlen** heißen).

1.1.5 Geometrie, Spiele, Kombinatorik

Wenn man, beginnend mit einem Quadrat der Kantenlänge 1, an jedes Rechteck an deren längere Seite ein Quadrat anbaut, so erhält man Rechtecke, deren Kantenlängen benachbarte Fibonacci-Zahlen sind, siehe Abb. 1.6.

Solche Rechtecke nennt man Fibonacci-Rechtecke. Beachten Sie, dass ein solches Rechteck sich aus lauter Quadraten mit Fibonacci-Zahlen als Kantenlängen zusammensetzt. Wenn man deren Flächen betrachtet, erhält man eine der vielen Fibonacci-Formeln

$$\sum_{k=1}^n F_k^2 = F_n \cdot F_{n+1}.$$

Mit dieser geometrischen Deutung kann man auch weitere Formeln wie

$$\sum_{k=1}^n F_{2k-1} = F_{2n},$$

$$\sum_{k=1}^n F_{2k} = F_{2n+1} - 1$$

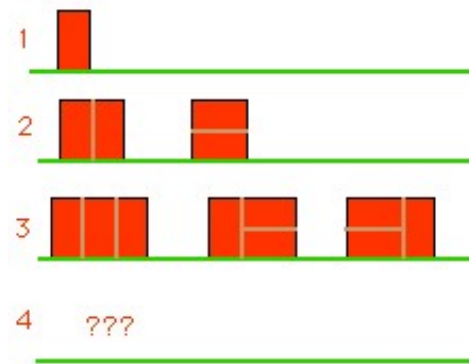


Abbildung 1.7: Mauermuster

und

$$\sum_{k=1}^n F_k = F_{n+2} - 1$$

„begünden“, siehe Übungen.

Wenn man das Quadrat immer gegen oder immer mit dem Uhrzeigersinn anbaut, so erhält man eine Spirale, die, wenn das Ausgangsrechteck golden ist, zur goldenen Spirale führt.

Die Frage nach der Anzahl der möglichen Muster, wenn man eine Mauer der Länge n und Höhe 2 aus Ziegelsteinen mit den Kantenlängen 1 und 2 bauen will, führt ebenfalls auf Fibonacci-Zahlen, siehe Abb. 1.7.

Bei dem Damebrettspiel, siehe Abb. 1.8 kann man die Frage stellen, ob es gelingt, durch sukzessives Ziehen von weißen Spielsteinen (Diagonalzug, der einen eigenen Stein überspringt und diesen „schlägt“) die letzte Linie des Brettes zu erreichen.

Die Antwort ist „Nein“, wie man sehen kann, wenn man die Spielfelder mit Fibonacci-Zahlen unterlegt, siehe Abb. 1.9.

Man muss nur alle Zahlen unter den auf dem Brett befindlichen Spielsteinen addieren. Zu Beginn ist diese Summe 35. Sie bleibt nach jedem Zug unverändert! Daher kann allenfalls die vorletzte Linie erreicht werden.

Eine ähnliche Überlegung findet man in BEUTELSPACHER zum *Wüstenspiel*, wobei aber als Gewichte Potenzen der kleinen Goldene-Schnitt-Zahl auftreten. Mit Seitwärts- und Vorwärtzügen soll man möglichst weit in die „Wüste“ vordringen.

1.1.6 Phyllotaxis

In der Phyllotaxis (Lehre von der Blattstellung, Musterbildung beim Pflanzenwachstum), z.B. dem Wachstum von Kiefernzapfen oder von Sonnenblumen hat man Fibonacci-Zahlen entdeckt, siehe die Webseite [Phyllotaxis](#) (Smith College, UK).

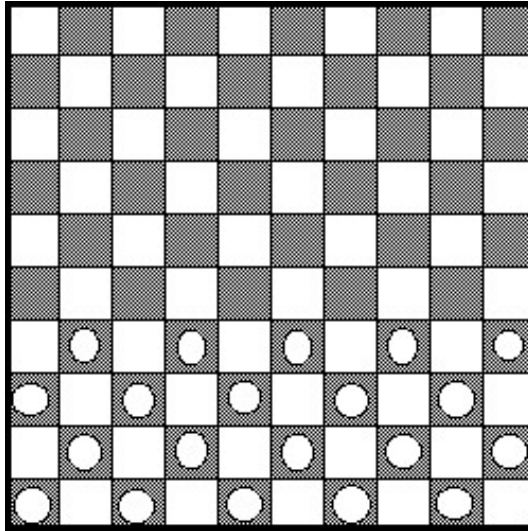


Abbildung 1.8: Damebrett

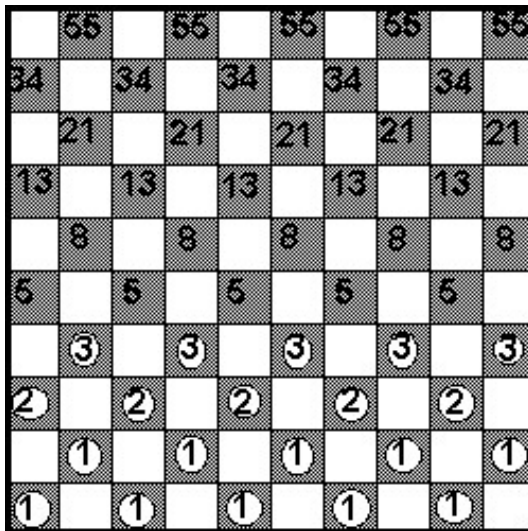


Abbildung 1.9: Damebrett mit Fibonacci-Zahlen

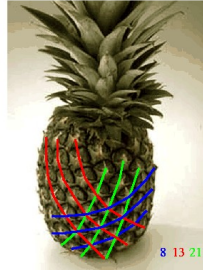
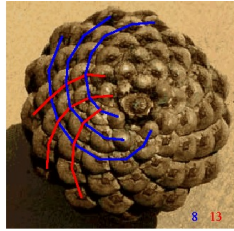


Abbildung 1.10: Spiralen bei Kiefernzapfen und Ananas

In der Abb. 1.10 sind die Anzahlen der nach links und nach rechts laufenden Spiralen Fibonacci-Zahlen.

Desgleichen bei der Sonnenblume, siehe Abb. 1.11.

Auf der Webseite [Rekursionen](#) (Mathe Prisma Wuppertal) findet sich auch ein schön dargestellter Zusammenhang zwischen dem Wachstum von Sonnenblumen, Fibonaccizahlen, und dem goldenen Schnitt, den wir später vertiefen werden.

Dabei verweise ich auf Kap. I.2.2, was die Definition der großen (Φ) und kleinen (φ) Goldenen-Schnitt-Zahl und ihre Interpretation als Teilungsverhältnis betrifft.

1.2 Erste Eigenschaften der Fibonacci-Folge

Bemerkenswert ist es nun, dass man eine „geschlossene Formel“ für die Fibonaccifolge bei beliebigen Anfangsbedingungen angeben kann, die eine Beziehung zur Goldenen-Schnittzahl liefert.

Satz 1.1. Sei $\lambda_1 := \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$, $\lambda_2 := \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$. Dann erfüllt die Folge (a_n) mit den Folgengliedern

$$a_n = \frac{a_1 - \lambda_2 a_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \lambda_1^n + \frac{\lambda_1 a_0 - a_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \lambda_2^n, n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

die Rekursion

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

für $n \geq 2$.

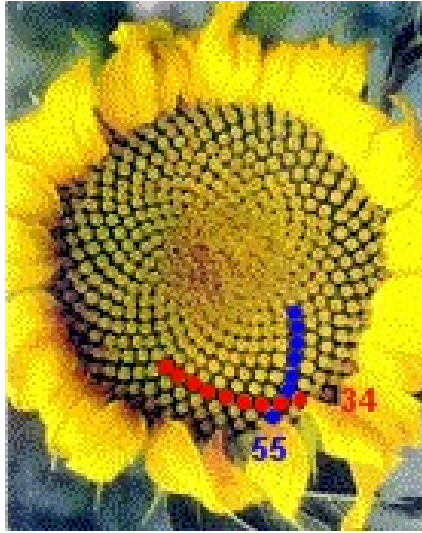


Abbildung 1.11: Sonnenblume

Beachten Sie, dass λ_1 gerade die große Goldene-Schnitt-Zahl ist, während $-\lambda_2$ die kleine Goldene-Schnitt-Zahl ist.

Beachten Sie ferner, dass man in (1.1) für $n = 0$ und $n = 1$ die Identitäten $a_0 = a_0$ und $a_1 = a_1$ erhält.

Jetzt soll der Spezialfall $a_0 := 0, a_1 := 1$, der auf **die** Fibonacci-Folge (F_n) führt, untersucht werden. Nach Satz 1.1 gilt

$$F_n = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \lambda_1^n - \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \lambda_2^n,$$

bzw., wenn man λ_1 und λ_2 einsetzt:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{5} \right)^n - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{5} \right)^n \right), n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

oder auch

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\Phi^n + (-1)^n \varphi^n \right) \quad (1.3)$$

Formel (1.2) wird J. P. M. BINET (1786-1856) zugeschrieben und heißt daher auch *Binet-Formel*, ist aber wohl schon 1745 von L. EULER publiziert worden.

Wegen $|\varphi| = 0.618.. < 1$ ist $\varphi^n \approx 0$ für große n . Daher gilt die Näherung

$$F_n \approx \frac{\Phi^n}{\sqrt{5}}.$$

Sie gilt aber auch für keine n , da (ohne Beweis)

$$F_n = \left\lfloor \frac{\Phi^n}{\sqrt{5}} + 0.5 \right\rfloor.$$

1.2.1 Lineare Differenzgleichungen

Um Satz 1.1 zu beweisen, müssen wir mehr über *lineare Differenzgleichungen* wissen, von denen $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ ein Spezialfall ist.

Definition 1.2. *Eine lineare Differenzgleichung k -ter Ordnung für eine Folge (a_n) ist ein rekursives Bildungsgesetz der Form*

$$a_{n+k} = \alpha_{k-1}a_{n+k-1} + \alpha_{k-2}a_{n+k-2} + \cdots + \alpha_1a_{n+1} + \alpha_0a_n, n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.4)$$

mit den k **Koeffizienten** $\alpha_j \in \mathbb{R}, j = 0, 1, \dots, k-1$.

Für die Fibonacci-Rekursion ist offensichtlich $k = 2$ die Ordnung der Differenzgleichung, und es gilt $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$.

Die Folge (a_n) wird offensichtlich dann eindeutig festgelegt, wenn k Startwerte a_0, a_1, \dots, a_{k-1} vorgegeben werden — das kennen Sie von der Fibonacci-Folge.

Bemerkung: (1.4) bezeichnet man in engerem Sinne als **homogene** Differenzgleichung — im Gegensatz zu *inhomogenen* wie z.B. bei

$$a_{n+1} = (1+p)a_n + b,$$

wie sie z.B. als Differenzgleichung 1.Ordnung auftritt, bei Ratensparverträgen auftritt, siehe Kap.III, Übungsaufgabe 5.

Die Lösungstheorie solcher linearen Differenzgleichungen geht zunächst von dem Begriff **Lösung** aus: Hierunter verstehen wir eine reelle Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, die der Rekursion (1.4) genügt. Es dürfte klar sein, dass es sehr viele verschiedene Lösungen gibt: Was ich auch immer für die Startwerte a_0, a_1, \dots, a_{k-1} einsetze — ich erhalte stets eine Lösung.

Auf Grund der Linearität und der Homogenität von (1.4) sieht man sehr schnell ein:

Satz 1.3. *Mit zwei Folgen ist auch stets die Summe sowie die skalaren Vielfachen hiervon eine Lösung.*

Mehr noch: Die Menge aller Lösungsfolgen bildet einen Vektorraum der Dimension k , wenn man als Summe und skalares Vielfaches von Folgen das versteht, was wir in Kap. III definiert haben:

$$(a_n)_n + (b_n)_n := (a_n + b_n)_n, \quad \lambda(a_n)_n := (\lambda a_n)_n.$$

Wir wollen diesen Satz nicht beweisen, sondern ihn an der Fibonacci-Rekursion demonstrieren: Wir erwarten einen Lösungsraum der Dimension 2. In der Tat ist jede Lösung eine Linearkombination der Folge (a_n) , die der Fibonacci-Rekursion und den Anfangswerten $a_0 = 1$ und $a_1 = 0$ genügt, sowie der Folge (b_n) , die ebenfalls der Fibonacci-Rekursion und den Anfangswerten $b_0 = 0, b_1 = 1$ genügt. Letztere ist gerade die Fibonaccifolge $(F_n) := 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$, erstere ist die Folge $1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$, welche sich als (F_{n-1}) darstellen lässt, wenn man $F_{-1} := 1$ setzt. So ist die Folge $(c_n) := 3, 2, 5, 7, 12, 19, \dots$ gerade das 3-fache von (a_n) plus das 2-fache von (b_n) . Daher kann man $c_n = 3F_{n-1} + 2F_n$ für $n \geq 1$ gewinnen!

Letzteres kann man verallgemeinern.

Satz 1.4. Sei (c_n) die durch die Fibonacci-Rekursion und die Anfangswerte $c_0 = A, c_1 = B$ definierte Folge mit beliebigen (reellen!!) A und B . Dann gilt $c_n = AF_{n-1} + BF_n, n \geq 1$.

BEWEIS: Mit den eben eingeführten „Basisfolgen“ (a_n) und (b_n) gilt $c_n = A \cdot a_n + B \cdot b_n$ und wegen $a_n = F_{n-1}$ und $b_n = F_n$ folgt die Behauptung. ■

Wenn Ihnen diese Argumentation zu abstrakt ist, schreiben Sie die ersten Folgenglieder von (c_n) auf:

$$A, B, A + B, A + 2B, 2A + 3B, 3A + 5B, 5A + 8B, \dots$$

Erkennen Sie die Gesetzmäßigkeit?

Satz 1.4 ist sehr hilfreich zum Beweis einiger überraschender Aussagen über (F_n) wie z.B.

$$F_n(F_{n-1} + F_{n+1}) = F_{2n},$$

s. Übungen.

Das Wunderbare ist nun, dass man spezielle Lösungen von (1.4) durch einen Ansatz $a_n := \lambda^n$ in Form von geometrischen Folgen (exponentielles Wachstum!) mit einer unbekanntem Zahl λ gewinnen kann (diese kann sogar nichtreell komplex sein!). Gehen wir mit diesem Ansatz in (1.4), so erhält man

$$\lambda^k = \alpha_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0.$$

Diese Gleichung ist eine polynomiale Gleichung k -ter Ordnung, sie heißt **charakteristische Gleichung** von (1.4).

Im Falle der Fibonacci-Rekursion ist die charakteristische Gleichung eine quadratische Gleichung

$$\lambda^2 = \lambda + 1.$$

I.A. besitzt die charakteristische Gleichung k Lösungen $\lambda_j, j = 1, 2, \dots, k$, die in der Regel auch eine Basis von geometrischen Folgen des Lösungsraums liefern.

Dies demonstrieren wir wieder an dem Beispiel der Fibonacci-Rekursion mit dem Ziel, den Satz 1.2 zu verstehen: Die charakteristische Gleichung lautet ja $\lambda^2 = \lambda + 1$. Sie hat λ_1 und λ_2 (s. Satz 1.2) zur Lösung. Mit den *Linearkoeffizienten* $c_j, j = 1, 2$ ist damit jede Folge (a_n) mit

$$a_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n \tag{1.5}$$

eine Lösung der Fibonacci-Rekursion. Die Fibonacci-Zahlen erhält man nun, indem man die Bedingungen $a_0 = 0, a_1 = 1$ in (1.5) einsetzt, also

$$0 = c_1 + c_2, \quad 1 = c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2$$

erhält. Dies sind zwei lineare Gleichungen für c_1 und c_2 . Es ergibt sich

$$c_1 = -c_2 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

und die eigentliche Formel von BINET

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \right)^n - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \right)^n \right), n = 0, 1, 2, \dots$$

Die Formel (1.2) in Satz 1.2 erhält man, wenn man

$$c_1 + c_2 = a_0, \quad c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 = a_1$$

nach $c_j, j = 1, 2$ auflöst.

1.2.2 Fibonaccizahlen und der Goldene Schnitt

Es gilt der folgende schon JOHANNES KEPLER (1571-1630) bekannte

Satz 1.5. *Der Quotient zweier aufeinanderfolgender Fibonaccizahlen konvergiert gegen eine Goldene-Schnitt-Zahl. Genauer: Es gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \Phi$$

mit der großen Goldene-Schnitt-Zahl

$$\Phi = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1).$$

Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} = \varphi$$

mit der kleinen Goldene-Schnitt-Zahl

$$\varphi = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Beweis: Offensichtlich gilt $\lambda_1 = \Phi$.

Es ergibt sich

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}}{\lambda_1^n - \lambda_2^n}.$$

Dividiert man Zähler und Nenner des Bruches durch λ_1^n und setzt $\mu := \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, so folgt

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2\mu^n}{1 - \mu^n}.$$

Da $|\mu| < 1$, konvergiert die geometrische Folge (μ^n) gegen Null und $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ gegen $\lambda_1 = \Phi$.

Die letzte Behauptung des Satzes 1.5 folgt aus $\Phi = \frac{1}{\varphi}$. ■

Aus der letzten Rechnung folgt wegen $\lambda_2 < 0$ und daher auch $\mu < 0$, dass die Quotienten *alternierend* konvergieren: Man erhält abwechselnd eine obere und eine untere Schranke für den Grenzwert Φ . Dies werden wir im Rahmen der *Kettenbrüche* wiederentdecken.

Kapitel 2

Drehungen

2.1 Drehungen der Ebene

Zum Verständnis des Auftretens von Fibonacci-Zahlen muss man verstehen, was eine Drehung um den goldenen Winkel und allgemein, was überhaupt **Drehungen** sind.

Viele Phänomene im Verbindung mit dem Auftreten von Fibonacci-Zahlen im Pflanzenwachstum hängen damit zusammen, dass das Wachstum „spiralförmig“ von innen nach außen verläuft. Zwei aufeinanderfolgende Blattansätze z.B unterscheiden sich durch einen „Divergenzwinkel“, der sich als *golden* in dem Sinne herausstellt, dass er $360 \cdot \varphi = 222, 4$ Grad bzw. dessen Komplement $360 \cdot (1 - \varphi) = 137, 6$ (s. Abb. 2.1) Grad betragen kann. Warum diese Winkel bevorzugt werden, werden wir erklären.

2.1.1 Die Kreislinie

Im Folgenden haben wir es mit einem Kreis zu tun, genauer mit der *Kreislinie*¹. Ein Punkt dieser Kreislinie ist alleine durch einen Winkel φ bestimmt, im Bogenmaß durch $\varphi \in [0, 2\pi)$. Da es im Folgenden sehr darauf ankommt, ob Winkel rationale oder irrationale Vielfache von

¹Im Gegensatz zur Kreisscheibe, die auch das Innere eines Kreises enthält.



Abbildung 2.1: Goldener Winkel

π sind, mache ich einen Trick. Ich definiere die Kreislinie als

$$S^1 := [0, 1),$$

indem ich jedes $\alpha \in S^1$ mit einem Winkel $\varphi := \alpha \cdot 2\pi$ „identifiziere“. Wenn man also von $\alpha = 0.5$ spricht, meint man den Winkel π im Bogenmaß bzw. 180 Grad im Gradmaß.

Nun führe ich eine Addition \oplus auf S^1 ein, die Sie schon in ähnlicher Form ($(\mathbb{Z}_n, +_n)$) in Kap. I.8.3) kennen:

$$\alpha \oplus \beta := (a + b) \bmod 1.$$

Man addiert ganz normal und schneidet sodann den ganzzahligen Anteil weg. Hiermit wird (S^1, \oplus) eine Gruppe (siehe Def.I.8.6). Das neutrale Element ist 0, das additive Inverse von $\alpha > 0$ ist $1 - \alpha$.

Übrigens kann man auf \mathbb{R} eine Äquivalenzrelation durch

$$x \sim y :\iff x \bmod 1 = y \bmod 1$$

(in Worten: x und y sind kongruent modulo 1) einführen. S^1 ist dann gewissermaßen die Menge aller Äquivalenzklassen. Jede dieser Klassen hat genau einen Vertreter in $[0, 1)$. In diesem Sinne gilt $1 \sim 0$ und $-\varepsilon \sim 1 - \varepsilon$ für kleine $\varepsilon > 0$.

Nun kann man auf S^1 auch einen Abstand definieren, der auf dem Abstandsbegriff auf der reellen Zahlengeraden basiert: Für $\alpha, \beta \in S^1$ ist der Abstand $d(\alpha, \beta)$ zwischen α und β durch die kleinste der drei Zahlen $|\alpha - \beta|$, $|1 + \alpha - \beta|$ und $|1 + \beta - \alpha|$ definiert. Beachten Sie, dass beispielsweise $d(0, 0.99) = 0.01$ ist. Man kann auch sagen, dass $d(\alpha, \beta)$ das Minimum aller $|\alpha - \tilde{\beta}|$ ist, wenn $\tilde{\beta}$ aus einer Äquivalenzklasse von β gewählt wird.

Mit dem Abstandsbegriff weiß man auch, was man unter einem (abgeschlossenen) Intervall I_ε mit Mittelpunkt $\alpha \in S^1$ und Radius $\varepsilon > 0$ verstehen soll: Auf der reellen Achse wäre dies einfach $I_\varepsilon = [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$. Doch dieses kann negative Zahlen oder Zahlen ≥ 1 enthalten. Doch diese kann man einfach durch ihre Vertreter aus S^1 ersetzen. So ist z.B. das Intervall mit Mittelpunkt 0 und Radius $\varepsilon := 0.1$ die Menge $I_{0.1} := [0.0, 0.1] \cup [0.9, 1)$. Um diese unübersichtliche Schreibweise zu verhindern, schreibe ich wie gewohnt $I_{0.1} = [-0.1, 0.1]$ und denke mir die kleinen negativen Zahlen x mit $1 + x$ identifiziert. Übrigens gilt allgemein $I_\varepsilon = \{\beta \in S^1 : d(\alpha, \beta) < \varepsilon\}$. Diese Menge nenne ich ε -**Umgebung** von α .

Damit wird S^1 zu einem sehr vertrauten Objekt. Man kann addieren und man kennt linke und rechte Nachbarn eines Punktes $\alpha \in S^1$ und kann die Nähe sogar quantifizieren. Man kann die Definition von **Grenzwert** und **Häufungspunkt** von reellen Folgen auf Folgen in S^1 übertragen, vgl. Def.III.1.7 und Def.III.1.20.

Man kann auch von (irr)ationalen Winkeln sprechen! Wie in Kap. II.1.4 bemerkt, kann man jeden rationalen Winkel beliebig gut durch irrationale approximieren und umgekehrt. Genauer: Die (ir)rationalen Winkel liegen **dicht** in S^1 , d.h. für alle $\alpha \in S^1$ und für alle $\varepsilon > 0$ gibt es es in der ε -Umgebung von α stets (ir)rationale Winkel $\neq \alpha$.

In einem weiteren Abstraktionsschritt kann man $S^1 \times S^1$ als Fahrradschlauch ansehen. In der Mathematik heißt diese Menge *Torus*.

2.1.2 Drehungen

Wir können Drehungen einer Ebene um ein Drehzentrum, in das wir den Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems legen, betrachten. Dann sind Drehungen eindeutig durch ihre **Drehwinkel** definiert, wenn wir den Drehungen eine Richtung geben. Diese Drehrichtung soll stets die entgegen dem Uhrzeigersinn sein. Wir lösen uns von der Ebene, sondern definieren Drehungen nur mit Hilfe der abstrakten Kreislinie S^1 .

Definition 2.1. Sei $\omega \in S^1$ ein Winkel. Die **Drehung** R_ω um den Winkel ω ist eine Abbildung von S^1 nach S^1 , die durch $R_\omega(x) := x \oplus \omega$ definiert ist.

Ich denke, die Bezeichnung *Drehung* ist selbsterklärend. Man spricht auch von **Rotation**. Jede Drehung ist offensichtlich eine Bijektion. Die Umkehrabbildung (für $\omega \neq 0$) von R_ω ist $R_{1-\omega}$, die man auch als $R_{-\omega}$ bezeichnen kann, wenn man auch negative Vertreter von Winkeln in S^1 zulässt. Das ist auch anschaulich sehr sinnvoll, da die Umkehrabbildung einer Drehung um den Winkel ω gegen den Uhrzeigersinn natürlich eine Drehung um ω **im** Uhrzeigersinn ist — diese ist gerade $R_{-\omega}$.

Eine ganz wesentliche Aussage lautet

$$R_{\omega_1} \circ R_{\omega_2} = R_{\omega_1 \oplus \omega_2}.$$

Das bedeutet, dass man die Addition von Winkeln auch als Verkettung von Rotationen erklären kann. Genauso, wie man in Kap. II.2.3.2 die Addition von Vektoren als Verkettung von Translationen verstanden hat.

Die Menge aller Drehungen ist mit der Verkettung als Verknüpfung wieder eine Gruppe, die irgendwie dieselbe Gruppe wie S^1 ist. Mathematisch spricht man von *isomorphen* Gruppen. In den Übungen werden wir noch zwei weitere zu S^1 isomorphe Gruppen kennenlernen, nämlich die Menge aller 2×2 -„Dreh-“Matrizen (s. Kap. II.4.4)

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\alpha) & -\sin(2\pi\alpha) \\ \sin(2\pi\alpha) & \cos(2\pi\alpha) \end{pmatrix}$$

mit der Matrizenmultiplikation als Verknüpfung und die Menge aller komplexen Zahlen vom Betrag Eins² mit der Multiplikation komplexer Zahlen als Verknüpfung.

2.1.3 Die goldene Drehung

Sie kennen die kleine ($\varphi = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$) und die große ($\Phi = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$) Goldene Schnitt-Zahl. Ich verweise auf Kap. I.1.2.2, notiere nur

$$\Phi = \frac{1}{\varphi}, \quad \Phi = \varphi + 1. \tag{2.1}$$

²Diese haben die Darstellung $z = \cos(2\pi\alpha) + i \sin(2\pi\alpha)$ mit $\alpha \in S^1$.

Eine Drehung um die kleine Goldene Schnittzahl $\varphi \in S^1$, im Gradmaß also um $360 \cdot \varphi = 222,5$ Grad heißt **Goldene Drehung**. Zuweilen wird auch die Drehung um den Komplementwinkel $1 - \varphi$ als Goldene Drehung bezeichnet.

Dass die Goldene Drehung eine herausragende Bedeutung für die spiralförmige, mit Fibonacci-Zahlen zusammenhängende Anordnung der Sonnenblumensamen hat, wird hoffentlich später klar.

2.2 Die Analyse von Zahlen mit Hilfe von Drehungen

Eine Zahl $\omega \in [0, 1)$ wird offensichtlich vollständig durch ihre Drehung R_ω charakterisiert. Im Folgenden werden wir diese Idee verfolgen und dabei einerseits auf eine schöne Beziehung zu den Kettenbrüchen von ω stoßen und andererseits auch das spiralförmige Wachstum von Pflanzen modellieren.

2.2.1 Ein von einer Drehung erzeugtes dynamisches System

Jetzt betrachten wir ein durch eine Drehung gegebenes *dynamisches System*, wie wir es in ähnlicher Form schon in Kap. III.1.4.5 im Rahmen eines diskreten Wachstumsmodells kennengelernt haben. Hierdurch ist eine Rekursionsvorschrift

$$x_{k+1} = R_\omega(x_k), k = 0, 1, 2, \dots$$

bzw.

$$x_{k+1} = x_k \oplus \omega, k = 0, 1, 2, \dots$$

zur Generierung einer Folge $(x_k)_k$ in S^1 gemeint. Diese Folge ist durch den *Startwert* x_0 und natürlich durch die Drehung R_ω bzw. ω selbst festgelegt. Wir werden stets $x_0 := 0$ wählen und bezeichnen die Berechnung von x_k als **k-ten Iterationsschritt**.

Mit der Rotation $R_\omega : S^1 \rightarrow S^1$ ist offensichtlich die reelle, als Translation sehr vertraute Abbildung

$$r_\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x + \omega$$

verbunden. Betrachtet man dessen dynamisches System

$$\xi_{k+1} = r_\omega(\xi_k), k = 0, 1, 2, \dots, \quad \xi_0 = 0,$$

so erhält man als explizite Darstellung die **arithmetische Folge**

$$\xi_k = k \cdot \omega, k = 0, 1, 2, \dots$$

Jetzt ergibt sich eine ganz einfache explizite Darstellung von x_k . Denn es gilt³ (für $x_0 = 0$) $x_k = \xi_k \bmod 1$, also

$$x_k = k \cdot \omega \bmod 1, k = 0, 1, 2, \dots,$$

³Allgemein $x_k = (k \cdot \omega + x_0) \bmod 1$.

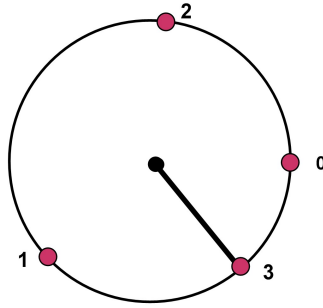


Abbildung 2.2: Samen-3-Orbit

der Beweis ist eine sehr gute Übung für vollständige Induktion.

Schreibt man $R^k := R \circ R \circ \dots \circ R$ (k -mal) für die k -fache Verkettung von R , so gilt

$$x_k = R_\omega^k(0), k = 0, 1, 2, \dots$$

Dabei ist R_ω^k selbst wieder eine Rotation um den Winkel $x_k = k \cdot \omega \bmod 1$!

Diese Sichtweise führt zu folgender Einsicht: x_{j+k} entsteht, indem x_j um den Winkel x_k gedreht wird, kurz:

$$x_{j+k} = x_j \oplus x_k, \quad j, k \in \mathbb{N}_0.$$

Man nennt die Menge aller Folgenglieder x_k auch einen **Orbit** unter R_ω . Wenn wir nur die ersten $N + 1$ Folgenglieder x_0, x_1, \dots, x_N betrachten, so sprechen wir von einem **N-Orbit**.

Im Hinblick auf die Phyllotaxis gebe ich eine Interpretation des dynamischen Systems durch eine *Saatmaschine*. Diese bestehe aus einem im Mittelpunkt des Kreises drehbar gelagerten Arm, an dessen Ende Samen in ein kreisförmiges Beet eingesetzt werden können. Nach jeder Drehung um den Winkel ω pflanze diese Maschine einen Samen, beginnend in $x_0 = 0$. Nach N Schritten erhalten wir dann einen „N-Samen-Orbit“.

In Abb. 2.2 sehen Sie eine solche Saatmaschine, die den Samen Nr.3 „ausspuckt“.

Eine wesentliche Frage ist die nach der „Verteilung“ des Orbits auf S^1 . Hierbei ist es ganz entscheidend, ob der Drehwinkel rational oder irrational ist.

2.2.2 Rationaler Drehwinkel

Offensichtlich gilt für rationale Drehwinkel $\omega = \frac{p}{q}$ mit $0 \leq p < q$ und teilerfremden natürlichen Zahlen p und q , dass $x_q = x_0$, d.h. nach q Iterationsschritten befindet man sich wieder im Ausgangspunkt! (Beweis: $x_q = q \cdot \omega \bmod 1 = p \bmod 1 = 0$). Wir sprechen in naheliegender Weise von einer **q-periodischen Folge** (x_k) , da jetzt natürlich

$$x_{k+q} = x_k \text{ für alle } k$$

folgt.

Wenn umgekehrt $x_q = x_0 = 0$, so muss wegen $x_q = q \cdot \omega \bmod 1$ das Produkt $q \cdot \omega$ ganzzahlig, etwa $= p \in \mathbb{N}$ sein, woraus $\omega = \frac{p}{q}$ folgt.

Beispiel: Eine Drehung um 220 Grad entspricht einer Drehung um $\omega = \frac{11}{18}$. Das kleinste gemeinsame Vielfache von 220 und 360 ist $18 \cdot 220 = 11 \cdot 360$. Nach 18 Drehungen um diesen Winkel befindet man sich wieder im Ausgangspunkt. Dabei wurde der Kreis 11-mal umrundet.

Wir fassen dies zusammen:

Satz 2.2. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

- *Der Drehwinkel ω ist rational, $\omega = \frac{p}{q}$ (gekürzt).*
- *Der Orbit besteht aus q verschiedenen Punkten.*
- *Es gilt $x_q = x_0$ und q ist mit dieser Eigenschaft minimal.*
- *Es gilt $x_{j+q} = x_j$ für irgend ein $j \in \mathbb{N}_0$ und q ist mit dieser Eigenschaft minimal.*

2.2.3 Irrationaler Drehwinkel

Etwas schwieriger ist der Fall eines irrationalen ω . Zunächst einmal wissen wir nur, dass alle Orbitpunkte verschieden sein müssen. Hier notieren wir den schönen Satz

Satz 2.3. *Ist $\omega \in S^1$ irrational, so liegt die Folge $x_k := R_\omega(x_{k-1}), k = 0, 1, 2, \dots$, **dicht** in S^1 , d.h. für alle $x \in S^1$ und alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein k mit der Eigenschaft, dass x_k in der ε -Umgebung von x liegt.*

BEWEIS-Skizze: Dieser geht auf A.L. CAUCHY (1789-1857) zurück. Wenn die Aussage falsch ist, so gibt es eine ε -Umgebung I eines $x \in S^1$, der frei von *Orbitpunkten* x_k ist. Mache I nun so groß wie möglich, so dass das Innere orbitfrei ist. Dann sind beide Randpunkte von I Orbitpunkte. Das Bild von I unter R_ω muss disjunkt zu I sein, ebenfalls ein orbitfreies Inneres und Randpunkte in Gestalt von Orbitpunkten haben. Fährt man so fort, muss man irgendwann ein Intervall erhalten, dessen Inneres mit einem seiner Vorgänger nichtleeren Schnitt hat, weil die Gesamtlänge von S^1 ja Eins und der Durchmesser von I positiv ist. Dann liegt ein Randpunkt eines der Intervalle im Inneren eines anderen. Widerspruch! ■

Für meine Saatmaschine bedeutet dieser Satz, dass die Samen (als Punkte aufgefasst!) nie übereinanderliegen, sich aber immer näher kommen und dabei die Kreislinie „ausfüllen“. Die Art und Weise, wie dies jedoch geschieht, hängt ganz von ω ab. Für den goldenen Winkel werden wir sehen, dass die „Packung“ für die Samen optimal ist, weil sie sich so wenig wie möglich „ins Gehege kommen“.

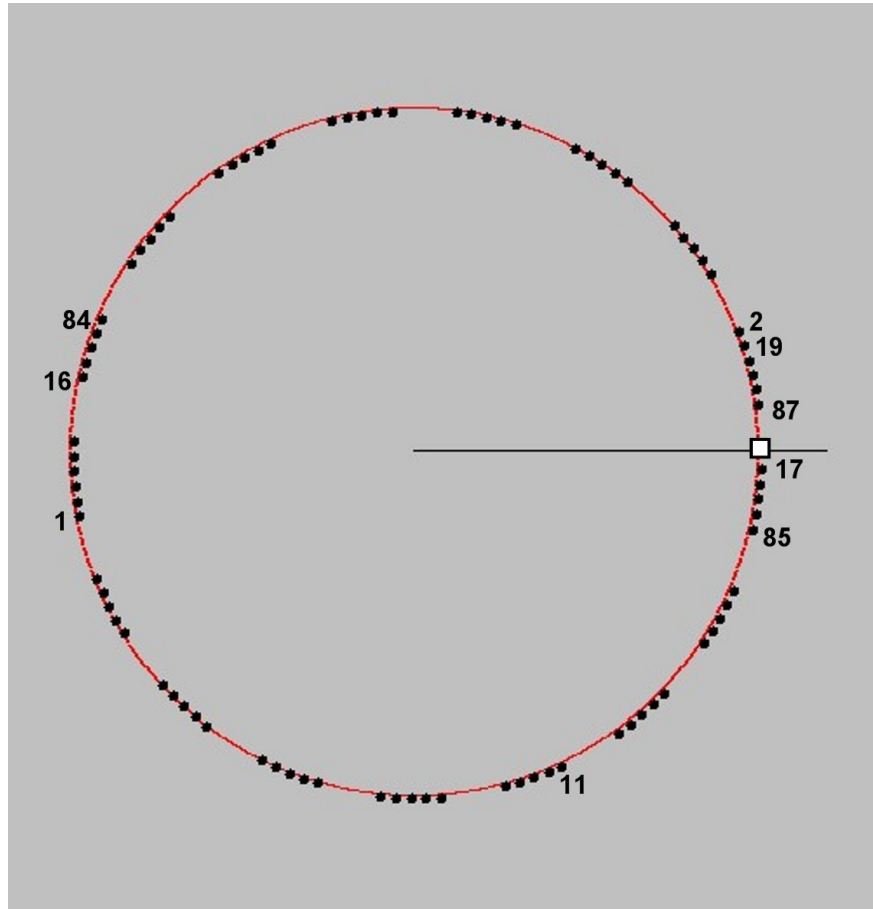


Abbildung 2.3: $\omega = 0.529$, $x_k, k = 1, 2, \dots, 87$

2.2.4 Ein spezieller Orbit

In der für das Folgende wichtigen Abb. 2.3 sehen Sie die ersten 87 Orbitpunkte für den Drehwinkel $\omega = 0.529$ (ca. 190 Grad). Die Null selbst ist durch ein kleines weißes Quadrat markiert. Zur Verdeutlichung habe ich einige Indizes in die Abbildung eingezeichnet, um die Lage der jeweiligen x_k zu kennzeichnen.

Sie sehen 17 aus fünf bis sechs Punkten bestehende „Inseln“ auf S^1 . „Auslöser“ hierfür ist $x_{17} = 0.993$, der am dichtesten bei 0 (links davon) liegende Orbitpunkt (ein *linker Nachbar*). Da $\xi_{17} = 17 \cdot \omega = 8.993$, hat der Orbit bis zu diesem „Zeitpunkt“ den Kreis fast 9-mal umrundet. Daher ist $\frac{9}{17} = 0.529411\dots$ eine „gute“ Näherung von 0.529 ist (Es ist $|0.529 - \frac{9}{17}| \leq 0.0004$).

Die *rechten Nachbarn* von $x_0 = 0$ sind nacheinander $x_2, x_{19}, x_{36}, x_{53}, x_{70}, x_{87}$, wobei $x_{87} = 0.023$ am dichtesten bei Null liegt.

Hätte man weiteriteriert, so würden die Orbitpunkte erst nach insgesamt 138 Iterationen in etwa gleichmäßig auf S^1 verteilt sein. Dabei wäre S^1 wegen $138 \cdot \omega = 73.002$ insgesamt 73 Mal umrundet worden, $x_{138} = 0.002$ würde sich als *rechter Nachbar* von $x_0 = 0$ entpuppen. Daher

ist $\frac{73}{138} = 0.5289855\dots$ eine sehr gute Näherung von $\omega = 0.529$. (Es ist $\frac{73}{138}$ wegen $|0.529 - \frac{73}{138}| = 0.0000145$ eine noch bessere Näherung als zuvor $\frac{9}{17}$).

Nach 1000 (dies ist der Nenner von ω als gekürzter Bruch) Iterationen würde man wieder beim Ausgangspunkt landen. Ab da wiederholt sich alles. Der Orbit ist 1000-periodisch.

2.2.5 Linke und rechte Nachbarn und rationale Schranken für den Drehwinkel

Wir sehen in dem eben besprochenen Beispiel, dass offensichtlich linke (rechte) Nachbarn obere (untere) rationale Schranken für ω liefern, wobei der Index k von x_k den Nenner des Bruches liefert. Den Zähler erhalten wir, indem wir den ganzzahligen Anteil von $\xi_k = k \cdot \omega$ heranziehen. Dies geschieht mit Hilfe der „**floor**“-Funktion:

Definition 2.4. Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl $\leq x$.

Dann gilt nämlich

$$x_k = k \cdot \omega - \lfloor k \cdot \omega \rfloor$$

und $\lfloor k \cdot \omega \rfloor$ ist die Anzahl der bisher erfolgten Umläufe.

Bei irrationalem ω kommt man für hinreichend viele Iterationen dem Ausgangspunkt x_0 beliebig nahe, man erhält immer dichtere linke und rechte Nachbarn und immer bessere Näherungen für ω durch Brüche mit allerdings immer größerem Nenner. Dies wird jetzt genauer ausgeführt:

Wir nennen x_ℓ einen „**linken**“ und x_r einen „**rechten**“ **Nachbarn** von $x_0 = 0$, wenn es keinen „früheren“ Orbitpunkt x_k gibt mit $x_k > x_\ell, k < \ell$, bzw. $0 < x_k < x_r, k < r$, gibt. Dabei schauen wir von außen auf den Kreis. Linke Nachbarn sind durch Winkel $1 - \varepsilon$ ($\sim -\varepsilon$), rechte durch Winkel ε mit i.A. sehr kleinem $\varepsilon > 0$ charakterisiert.

Nun notieren wir uns alle Indizes ℓ und r , für die x_ℓ bzw. x_r im Vergleich zu ihren Vorgängern dichteste linke bzw. rechte Nachbarn sind. Gleichzeitig notieren wir uns die zugehörigen **Umlaufzahlen** p_ℓ und p_r , wobei p_ℓ so gewählt wird, als ob x_ℓ den letzten Umlauf nicht nur „fast“, sondern vollständig abgeschlossen hat (Man braucht nur $\ell \cdot \omega$ bzw. $r \cdot \omega$ auf eine ganze Zahl zu runden). Offensichtlich gilt

$$p_\ell := \lfloor \ell \cdot \omega \rfloor + 1, \quad p_r := \lfloor r \cdot \omega \rfloor \tag{2.2}$$

Es wird sich zeigen, dass sich auf diese Weise alle *Konvergenten des zugehörigen Kettenbruchs* als Brüche

$$\frac{p_\ell}{\ell}, \quad \frac{p_r}{r} \tag{2.3}$$

wiederfinden lassen. Wie auch immer: Schon jetzt erkennt man, dass die beiden Brüche in (2.3) die irrationale Zahl ω umso besser approximieren, je kleiner die Abstände $d(0, x_\ell)$ ($=1 - x_\ell$) bzw. $d(0, x_r)$ ($=x_r$) sind. Bis zum Punkt x_r wurden p_r Umläufe geschafft *plus* dem Winkel $d(0, x_r)$. Das heißt, dass ω einen Tick größer sein muss als $\frac{p_r}{r}$. Analog wurden bis zu x_ℓ nur *fast* p_ℓ Umläufe geschafft, es fehlte der Winkel $d(x_\ell, 0)$. Daher muss ω einen „Tick“ kleiner sein als $\frac{p_\ell}{\ell}$. Wir notieren:

Satz 2.5. Seien x_ℓ und x_r linke bzw. rechte Nachbarn von $x_0 = 0$ und p_ℓ und p_r ihre in (2.2) definierten Umlaufzahlen. Dann gilt

$$\frac{p_r}{r} < \omega < \frac{p_\ell}{\ell}.$$

Merkregel: **Rechte Nachbarn liefern untere, linke obere Schranken.**

Die Güte der Schranken hängt offensichtlich mit den Abständen $d(0, x_\ell)$ und $d(0, x_r)$ zusammen, die sich aber ganz einfach mit Hilfe von ℓ, p_ℓ, r, p_r ausdrücken lassen. Man beachte nur, dass $x_r = r \cdot \omega - p_r$ und $x_\ell = \ell \cdot \omega - \lfloor \ell \cdot \omega \rfloor = \ell \cdot \omega - p_\ell + 1$.

Lemma 2.6. Es gilt

$$d(x_\ell, 0) = p_\ell - \ell \cdot \omega,$$

$$d(x_r, 0) = r \cdot \omega - p_r.$$

Wegen Satz 2.5 nennen wir Zahlen ℓ einen **linken Nenner** und r einen **rechten Nenner von** ω und die zugehörigen Umlaufzahlen **linke** bzw. **rechte Zähler von** ω , wenn x_ℓ bzw. x_r linke bzw. rechte Nachbarn von x_0 sind.

2.2.6 Orbit der goldenen Drehung

Zur Einstimmung schaue man sich Abb. 2.4 an. Hier sehen Sie den 12-Orbit der Goldenen Drehung. In Rot sind alle die Nummern notiert, die im Laufe der Drehung zu linken oder rechten Nachbarn gehören, also linke Nenner ℓ und rechte Nenner r markieren. So ist nach 2 Schritten $\ell = 1$ und $r = 2$, nach einem weiteren Schritt wird $\ell = 1$ durch $\ell = 3$ abgelöst, nach zwei weiteren Schritten gibt es mit $r = 5$ einen neuen rechten Nachbarn von $x_0 = 0$, der achte „Drehschritt“ liefert einen neuen linken Nachbarn $\ell = 8$. Die Nummer 13 würde einen neuen rechten Nachbarn liefern ($r = 13$) — dieser Schritt ist hier nicht ausgeführt.

Fällt Ihnen etwas auf? Ja, alle roten Zahlen sind Fibonacci-Zahlen! In Abb. 2.5 wird analog ein 33-Orbit gezeigt. Der „Samen“ Nr. 34 würde zu einem neuen rechten Nachbarn.

Wenn Sie die Umläufe mitzählen, kommen Sie im 34. Iterationsschritt auf fast genau 21 Umläufe — die rationale Zahl $\frac{21}{34}$ ist eine untere Schranke der Goldenen-Schnittzahl φ . Überhaupt ist jede Umlaufzahl wieder eine Fibonacci-Zahl! Vermutung: x_{F_k} ist für gerade $k = 2j$ ein linker und für ungerade $k = 2j + 1$ ein rechter Nachbar, die zugehörige Umlaufzahl ist F_{k-1} . Dies ist noch eine durch Experimente erhärtete Vermutung, die später im Rahmen der Kettenbruchtheorie bewiesen wird, und führt zusammen mit Satz 2.5 zur Aussage

$$\frac{F_{2j}}{F_{2j+1}} < \varphi < \frac{F_{2j-1}}{F_{2j}}, j = 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

Mit den positiven (!) Zahlen

$$d_j := F_{2j+1}\varphi - F_{2j}, j = 0, 1, 2, \dots$$

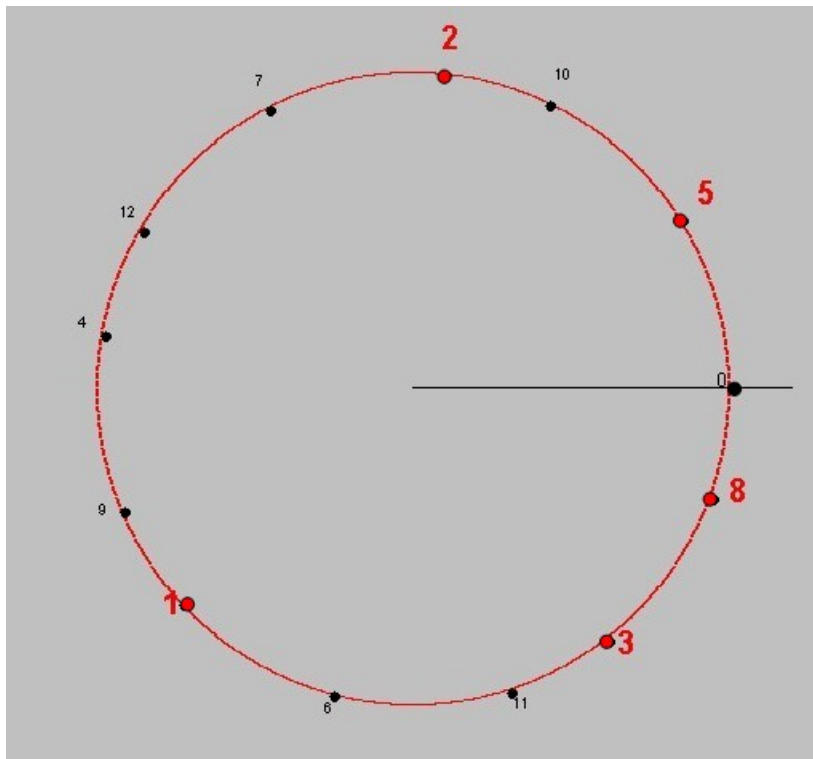


Abbildung 2.4: 12-Orbit der Goldenen Drehung

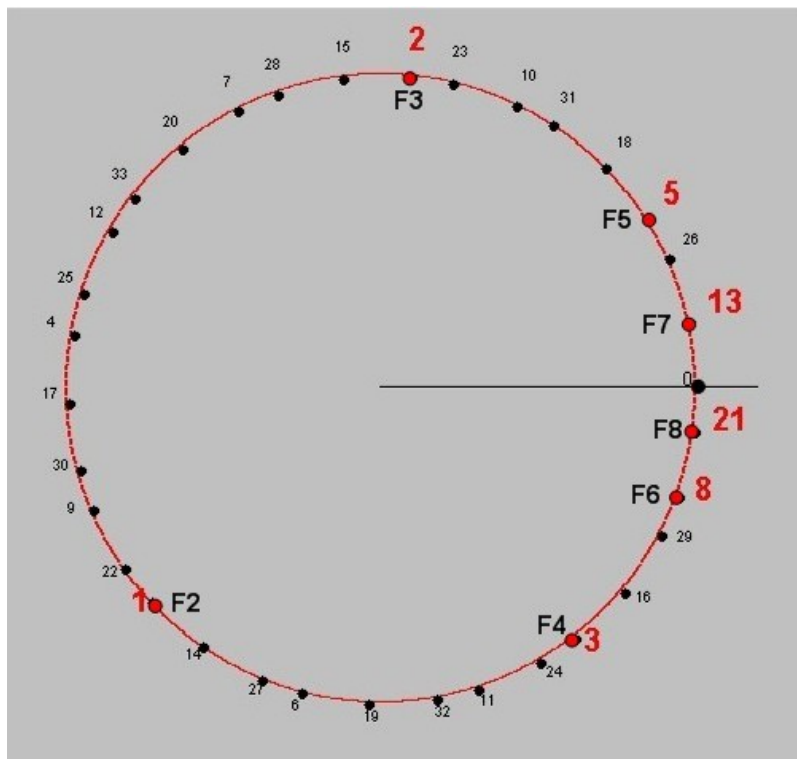


Abbildung 2.5: 33-Orbit der Goldenen Drehung

und

$$e_j := F_{2j-1} - F_{2j}\varphi, j = 1, 2, \dots,$$

erhalten wir die Abstände dieser linken und rechten Nachbarn zu x_0 . In den Übungen wurde gezeigt, dass diese in jedem j -Schritt auf das $(1 - \varphi)$ -fache abnehmen, was nichts anderes heißt, als dass die Kreisbögen zwischen x_{F_k} und x_0 durch den nachfolgenden Nachbarn $x_{F_{k+2}}$ golden geteilt wird.

2.2.7 Aufdatierung der linken und rechten Nenner und Zähler

Zu jedem N eines N -Orbits von R_ω gibt es offensichtlich sog. **aktuelle** linke x_ℓ und rechte Nachbarn x_r von $x_0 = 0$. Die Indizes (linke und rechte Nenner genannt) ℓ und r hängen von N ab und sind dadurch festgelegt, dass für $k \leq N$ kein x_k dichter bei $x_0 = 0$ liegt als x_ℓ und x_r . Wenn die Iteration fortschreitet, d.h. N wächst, wird x_N irgendwann zu einem neuen *rechten* oder *linken* Nachbarn von $x_0 = 0$. Dann kann $x_r = x_N$ und $r = N$ oder $x_\ell = x_N$ und $\ell = N$ als neue aktuelle Werte gesetzt werden. Wir sagen, dass ℓ oder r „aufdatiert“ wird.

In dem Beispiel der Abb. 2.3 sind für $19 \leq N \leq 35$ die aktuellen Nachbarn durch $\ell = 17$ und $r = 19$ gegeben. Bei wachsendem N wird nach und nach $r = 36, r = 53, r = 70, r = 87$. Für $r = 19$ ist die Umlaufzahl $p_r = 10$. Diese erhöht sich bei jedem neuen rechten Nachbarn um $p_\ell = p_{17} = 9$, die Umlaufzahl von x_ℓ . Schließlich ist $p_{87} = 46$ und später $p_{138} = 73$.

Im Folgenden werden wir von dieser Beobachtung ausgehend eine ganz einfache rekursive Gesetzmäßigkeit feststellen, mit der man die nächsten Indizes rechter und linker Nachbarn (also die neuen Nenner) sowie ihre Umlaufzahlen (also die neuen Zähler) berechnen kann.

Wir behaupten, dass wir, ausgehend von aktuellen linken und rechten Nachbarn x_ℓ und x_r , als nächsten neuen linken *oder* rechten Nachbarn $x_{\ell+r}$ mit neuer Umlaufzahl $p_\ell + p_r$ erhalten, der nächste Nenner ist also $\ell + r$, der nächste Zähler ist $p_\ell + p_r$. Dies entspricht der Fibonacci-Rekursion!

Dies sieht man sofort mit Hilfe von

$$x_{\ell+r} = x_\ell \oplus x_r$$

ein. Dieses erlaubt zwei Deutungen: $x_{\ell+r}$ entsteht aus x_ℓ durch „Vorwärtsdrehung“ um den (i.A. kleinen) Winkel x_r , aber ebenso durch „Rückwärtsdrehung“ von x_r um den durch $1 - x_\ell$ gegebenen (ebenfalls i.A. kleinen) Winkel.

In beiden Deutungen erkennt man, dass $x_{\ell+r}$ näher an der Null liegen muss als x_ℓ und x_r . Ist $x_{\ell+r}$ wieder ein rechter Nachbar von x_0 , so übernimmt $x_{\ell+r}$ die Rolle von x_r , das neue r ist gleich $\ell + r$. Wir sprechen von einem **Wechselschritt**, wenn $x_{\ell+r}$ auf der anderen Seite von x_0 liegt als sein unmittelbarer Vorgänger $x_{\max(\ell,r)}$, wenn also $x_{\ell+r}$ ein linker Nachbar im Falle $r > \ell$ und ein rechter im Falle $\ell > r$ wird. Im ersten Fall wird p_ℓ , im zweiten Fall p_r durch $p_{\ell+r} = p_\ell + p_r$ ersetzt, was sofort aus $(\ell + r) \cdot \omega = \ell \cdot \omega + r \cdot \omega$ folgt.

Geometrisch können wir $x_{\ell+r}$ ganz einfach konstruieren. Hierzu nehme man $r > \ell$ an. Man trage von x_r in Richtung $x_0 = 0$ (also in Uhrzeigersinn) einen Kreisbogen ab, der die Länge

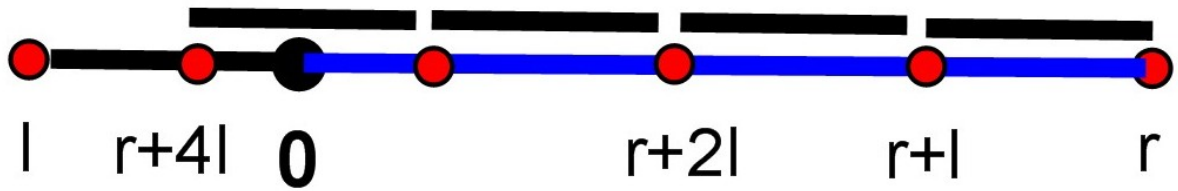


Abbildung 2.6: Nennersritte

$1 - x_\ell$ des von x_0 nach x_ℓ reichenden Kreisbogens hat. $x_{\ell+r}$ ist dann der Endpunkt dieses Kreisbogens. Diese Konstruktion ist besonders einfach, wenn wir den Kreis begradigen, s. die farbige Abb. 2.6.

Hier hat eine schwarze Strecke die Länge $\alpha_\ell := d(0, x_\ell)$, die blaue die (größere) Länge $\alpha_r := d(0, x_r)$. Die schwarze Strecke passt dreimal in die blaue, so dass der vierte nachfolgende Nennersritt ein Wechselschritt ist. $x_{\ell+r}$ (in der Abbildung mit $\ell + r$ bezeichnet) entsteht, indem x_r um den Winkel $\alpha_\ell < 0$ zurück gedreht wird. Mit dieser geometrischen Veranschaulichung haben wir der durch den „Rechteckalgorithmus“ für Kettenbrüche (s. Kap. 3.3.2) schon vorgegriffen.

α_r werden wir später wegen Lemma 2.6 als Fehler 2.Art der Annäherung von ω durch den Bruch $\frac{p_r}{q_r}$ bezeichnen. Offensichtlich kann dieser Fehler erst dann verkleinert werden, wenn ein Wechselschritt vorliegt. Vergleiche mit den Zahlen d_j und e_j für $\omega = \varphi$, für die wir Formeln hergeleitet haben.

Die obigen Ausführungen haben ergeben, dass der auf ℓ und r folgende Nenner $\ell + r$ mit Zähler $p_\ell + p_r$ ist. Die Frage ist nur, ob es sich um rechte oder linke Nenner (Zähler) handelt. Das kann man auch ohne große Rechnung klären: Wenn

$$\frac{p_\ell + p_r}{\ell + r} < \omega,$$

handelt es sich um einen rechten Nenner (Zähler). Wenn

$$\omega < \frac{p_\ell + p_r}{\ell + r},$$

um einen linken.

Wir betrachten noch einmal zur Erläuterung Abb. 2.3, also den Fall $\omega = 0.529$. Dort hatten wir schon erkannt, dass $\ell := 17$ ein linker Nenner mit Zähler $p_\ell := 9$ ist. In der Tat gilt

$$\omega = 0.529 < \frac{9}{17} = 0.5294\dots$$

Der Vorgänger-Nenner ist 2 mit Zähler 1 (beide sind rechte), der Bruch $\frac{1}{2}$ ist eine untere Schranke von ω . Der auf 17 folgende Nenner ist $\ell + r = 17 + 2 = 19$, ein rechter Nenner. Der zugehörige Zähler ist $p_\ell + p_r = 9 + 1 = 10$. Es folgen eine Reihe von Schritten (insgesamt 8), die jeweils zu rechten Nennern und den Einschließungen

$$\frac{10}{19} < \frac{19}{36} < \frac{28}{53} < \frac{37}{70} < \dots < \frac{73}{138} < \omega$$

führen, bevor ein Wechselschritt zu

$$\omega < \frac{82}{155} = 0.52903\dots$$

mit linkem Nenner 155 und Zähler 82 führt.

2.2.8 Zusammenhang mit Kettenbrüchen

Natürlich muss sich rechts und links nicht dauernd abwechseln⁴. Vielmehr können mehrere rechte Nenner aufeinander folgen, bevor wieder ein linker auftritt. Unter Benutzung der späteren Kettenbruchnotationen (**Konvergente** und **Koeffizient** des Kettenbruchs, s. Def. 3.15) notieren wir (kann bei der ersten Durcharbeit überlesen werden):

Satz 2.7. *Seien ℓ und r aktuelle linke und rechte Nenner mit $\ell > r$. Der nächste Nenner $\ell + r$ sei ein rechter Nenner von ω , so dass ein Wechselschritt vorliegt. Dann ist $\frac{p_\ell}{\ell}$ eine Konvergente von ω . Wenn auf ℓ insgesamt $a \in \mathbb{N}$ rechte Nenner bis zum nächsten Wechselschritt folgen, so ist a ein Koeffizient des Kettenbruchs von ω . Die zugehörige Konvergente ist $\frac{p_r + a \cdot p_\ell}{r + a \cdot \ell}$. Analoges gilt, wenn $r > \ell$ und der nächste Nenner $\ell + r$ ein linker Nenner von ω ist.*

2.2.9 Nenner-Algorithmus

Wir nennen den Übergang von einem Nenner von ω zum nächsten einen **Nennersschritt** und unterscheiden einen **linken** und einen **rechten** Nennersschritt, je nachdem, ob der neue Nenner ein linker oder ein rechter Nenner ist. Weiterhin sprechen wir von einem **Wechselschritt**, wenn einem linken Nenner ein rechter Nenner folgt oder umgekehrt. Dann besagt Satz 2.7, dass die Koeffizienten des Kettenbruchs von ω gerade durch die Anzahl der Nennersritte bis zu einem Wechselschritt gegeben sind und dass die Quotienten aus Zähler und Nenner von ω **vor** einem Wechselschritt gerade die Konvergenten des Kettenbruchs sind.

Den bisher angedeuteten Algorithmus, den wir im Folgenden „Nenner-Algorithmus“ nennen, kann man rekursiv formalisieren, wobei besonderes Augenmerk auf die Anzahl der Nennersritte bis zu einem Wechselschritt gelegt wird, da diese die *Koeffizienten des Kettenbruchs* ergeben:

⁴Das ist nur für den Goldenen Winkel der Fall, wie wir sehen werden!

Dazu beginne man ($\mathbf{k=1}$) mit dem Nenner $q = 1$. Mit Zähler $p = 0$ ist dies ein rechter Nenner. Es gilt ja $0 = \frac{0}{1} < \omega$. Setzt man $p = 1$, kann man $q = 1$ auch als linken Nenner auffassen ($\omega < \frac{1}{1}$), d.h. x_1 ist sowohl linker als auch rechter Nachbar von x_0 . Der nächste Nenner ist $q = 2$. Es gibt zwei Möglichkeiten: Entweder ist $2\omega > 1$ oder es ist $2\omega < 1$. Im ersten Fall wurde S^1 einmal umlaufen, $q = 2$ ist rechter Nenner (mit $p = 1$ als Zähler), es gilt $\frac{1}{2} < \omega$. Im zweiten Fall ist $q = 2$ linker Nenner (mit $p = 1$ als Zähler), es gilt $\omega < \frac{1}{2}$. In diesem Fall iterieren wir bis zur Stufe q , nach der der erste Wechselschritt erfolgt, d.h. für die

$$\frac{1}{q+1} < \omega < \frac{1}{q}$$

gilt⁵. Nach Satz 2.7 ist $\frac{1}{q}$ eine (die erste) Konvergente von ω , q ist der erste Koeffizient a_1 des Kettenbruchs. Die erste Konvergente nennen wir $\frac{p_1}{q_1}$, q_1 nennen wir den ersten **Konvergentenner** (Wir nummerieren jetzt anders!). Damit ist der erste Wechselschritt beschrieben. Für die nachfolgende Rekursion setzen wir $p_0 := 0, q_0 := 1$ und nennen $\frac{p_0}{q_0} = \frac{0}{1}$ formal ebenfalls eine Konvergente.

Sei der k -te Wechselschritt erfolgt⁶. Der letzte (Konvergenten-) Nenner sei q_k , der letzte Zähler p_k , die vorletzten Nenner q_{k-1} und Zähler p_{k-1} . (Sind die einen links, so sind die anderen rechts und umgekehrt). Dass ein Wechselschritt vorliegt, bedeutet, dass $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ auf einer anderen Seite als $\frac{p_k}{q_k}$, aber auf derselben Seite von ω liegt wie $\frac{p_k + p_{k-1}}{q_k + q_{k-1}}$. Nun mögen a_{k+1} Nennersritte durchgeführt werden, bevor wieder ein Wechselschritt erfolgt, d.h. es lege

$$\frac{ap_k + p_{k-1}}{aq_k + q_{k-1}}$$

für $1 \leq a \leq a_{k+1}$ auf einer anderen Seite von ω als

$$\frac{(a_{k+1} + 1)p_k + p_{k-1}}{(a_{k+1} + 1)q_k + q_{k-1}}.$$

Dann ist

$$q_{k+1} := a_{k+1}q_k + q_{k-1}$$

ein Konvergentenner, der „entgegengesetztes Vorzeichen“ zu q_k hat (d.h.: Ist der eine links, ist der andere rechts) mit dem Zähler

$$p_{k+1} = a_{k+1}p_k + p_{k-1}.$$

Wir fassen den Algorithmus in einer Weise zusammen, die nicht mehr Gebrauch macht von Rotationen, sondern nur noch von Abfragen, ob gewisse Brüche kleiner oder größer als ω sind. Dieser Algorithmus liefert offensichtlich rationale Approximationen der irrationalen Zahl ω .

⁵Man kann q auch als die größte natürliche Zahl charakterisieren, die kleiner als $\frac{1}{\omega}$ ist, in Symbolen $q = \lfloor \frac{1}{\omega} \rfloor$, vgl. Def. 2.4 und Lemma 3.13. Wenn man ein Rechteck mit den Kantenlängen 1 und ω betrachtet, so ist q die Anzahl der Quadrate mit Länge ω , die noch gerade in das Rechteck hineinpassen.

⁶Eben wurde $k = 1$ beschrieben.

2.2.10 Kurzform des Nenner-Algorithmus

Gegeben sei ein irrationales $\omega \in (0, 1)$.

- Sei $a_1 \in \mathbb{N}$ durch

$$\frac{1}{a_1 + 1} < \omega < \frac{1}{a_1}$$

definiert. Setze $p_0 := 0, p_1 := 1, q_0 := 1, q_1 := a_1$.

- Seien $a_k, p_{k-1}, p_k, q_{k-1}, q_k$ für $k \geq 1$ definiert mit

$$\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} < \frac{p_{k-1} + p_k}{q_{k-1} + q_k} < \omega < \frac{p_k}{q_k}$$

(dann ist q_k ein linker Nenner) oder

$$\frac{p_k}{q_k} < \omega < \frac{p_{k-1} + p_k}{q_{k-1} + q_k} < \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$$

(dann ist q_k ein rechter Nenner). Dann bestimme das kleinste $a_{k+1} \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\frac{p_{k-1} + a_{k+1}p_k}{q_{k-1} + a_{k+1}q_k} < \omega < \frac{p_{k-1} + (a_{k+1} + 1)p_k}{q_{k-1} + (a_{k+1} + 1)q_k}$$

oder

$$\frac{p_{k-1} + (a_{k+1} + 1)p_k}{q_{k-1} + (a_{k+1} + 1)q_k} < \omega < \frac{p_{k-1} + a_{k+1}p_k}{q_{k-1} + a_{k+1}q_k}$$

und setze

$$p_{k+1} := a_{k+1}p_k + p_{k-1}, \quad q_{k+1} := a_{k+1}q_k + q_{k-1}. \quad (2.5)$$

Die Bestimmung von $a_{k+1}, p_{k+1}, q_{k+1}$ kann auch so beschrieben werden:

Setze $p_{k,0} := p_k, q_{k,0} := q_k$ und

$$p_{k,j} := p_{k-1} + p_{k,j-1}, \quad q_{k,j} := q_{k-1} + q_{k,j-1},$$

solange $\frac{p_{k,j}}{q_{k,j}}$ auf der selben Seite von ω liegt wie $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$. Das größte j mit dieser Eigenschaft ist gerade a_{k+1} . Setze wieder

$$p_{k+1} := a_{k+1}p_k + p_{k-1}, \quad q_{k+1} := a_{k+1}q_k + q_{k-1}.$$

Bevor wir die Beziehung dieses Algorithmus zu Kettenbrüchen herstellen, bemerken wir, dass wir die Begriffe **k-te Konvergente** $\frac{p_k}{q_k}$ und **k-ter Koeffizient** a_k , die wir in Satz 2.7 verwendeten, genauso gut durch den Algorithmus, der diese liefert, hätten definieren können. Dass wir dies nicht tun, liegt daran, dass diese Begriffe mit Kettenbrüchen verbunden sind, die wir erst noch einführen. Dann werden diese Begriffe definiert werden und Sie werden sofort sehen, dass volle Übereinstimmung besteht, d.h., dass Satz 2.7 gilt.

2.2.11 Ein Beispiel

Eine Präsenzaufgabe der Vorlesung lautete:

Schreiben Sie an jeden Punkt des N -Orbits ($N = 25$) von R_ω in Abb. 2.7 den zugehörigen Index k von x_k , $k = 1, 2, \dots, 25$, markieren Sie alle linken und rechten Nachbarn (bzw. deren Indizes ℓ und r) sowie die zugehörigen Umlaufzahlen p_ℓ und p_r und geben Sie damit Schranken

$$\frac{p_r}{r} < \omega < \frac{p_\ell}{\ell}$$

für den Drehwinkel ω an. Bestimmen Sie ferner die Wechselschritte und „unterstreichen“ Sie die jeweiligen Brüche **vor** den Wechselschritten (die sog. **Konvergenten**) und die Anzahl der „Nennerschritte“ zwischen zwei Wechselschritten

Hier ist die **Lösung**, die auch einen Zusammenhang zu den Kettenbrüchen aufzeigt:

Der dritte Punkt unterhalb der Null erhält den Index 1. Mit den Augen geschätzt ist der Drehwinkel damit etwas größer als 0.75. Beachten Sie, dass gegen den Uhrzeigersinn gedreht wird.

x_1 ist sowohl ein linker als auch ein rechter Nachbar, man erhält die triviale Einschließung

$$\frac{0}{1} < \omega < \frac{1}{1}.$$

x_2 ist der 5te Punkt unterhalb der Null. Er ist ein neuer rechter Nachbar ($r = 2$) mit Umlaufzahl $p_r = 1$. Jetzt lautet die aktuelle Einschließung

$$\frac{1}{2} < \omega < \frac{1}{1}.$$

Diesen Schritt muss man als Wechselschritt auffassen, der Bruch des Vorgängers x_1 , also $\frac{1}{1}$ ist die erste Konvergente von ω , der zugehörige Koeffizient ist $a_1 = 1$, da nur ein Schritt benötigt wurde.

Es folgen 6 rechte Schritte $r = 3, 4, 5, 6, 7, 8$ mit Umlaufzahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7, bevor der siebte Schritt mit $\ell = 9$ und Umlaufzahl 8 ein Wechselschritt ist. Wir erhalten die Einschließung

$$\frac{7}{8} < \omega < \frac{8}{9}.$$

Der letzte Bruch vor diesem Wechselschritt ist $\frac{7}{8}$ eine weitere Konvergente von ω mit Koeffizient $a_2 = 7$, weil 7 Schritte bis zum Wechselschritt benötigt wurden.

Der nächste Kandidat für einen neuen Nachbarn hat den Index (Nenner) $\ell + r = 9 + 8 = 17$ mit Umlaufzahl (Zähler) $p_{\ell+r} = p_{17} = p_\ell + p_r = 8 + 7 = 15$. Dieser ist ein rechter Nachbar ($r = 17$), wir erhalten die Einschließung ($p_r = 15$)

$$\frac{15}{17} < \omega < \frac{8}{9}.$$

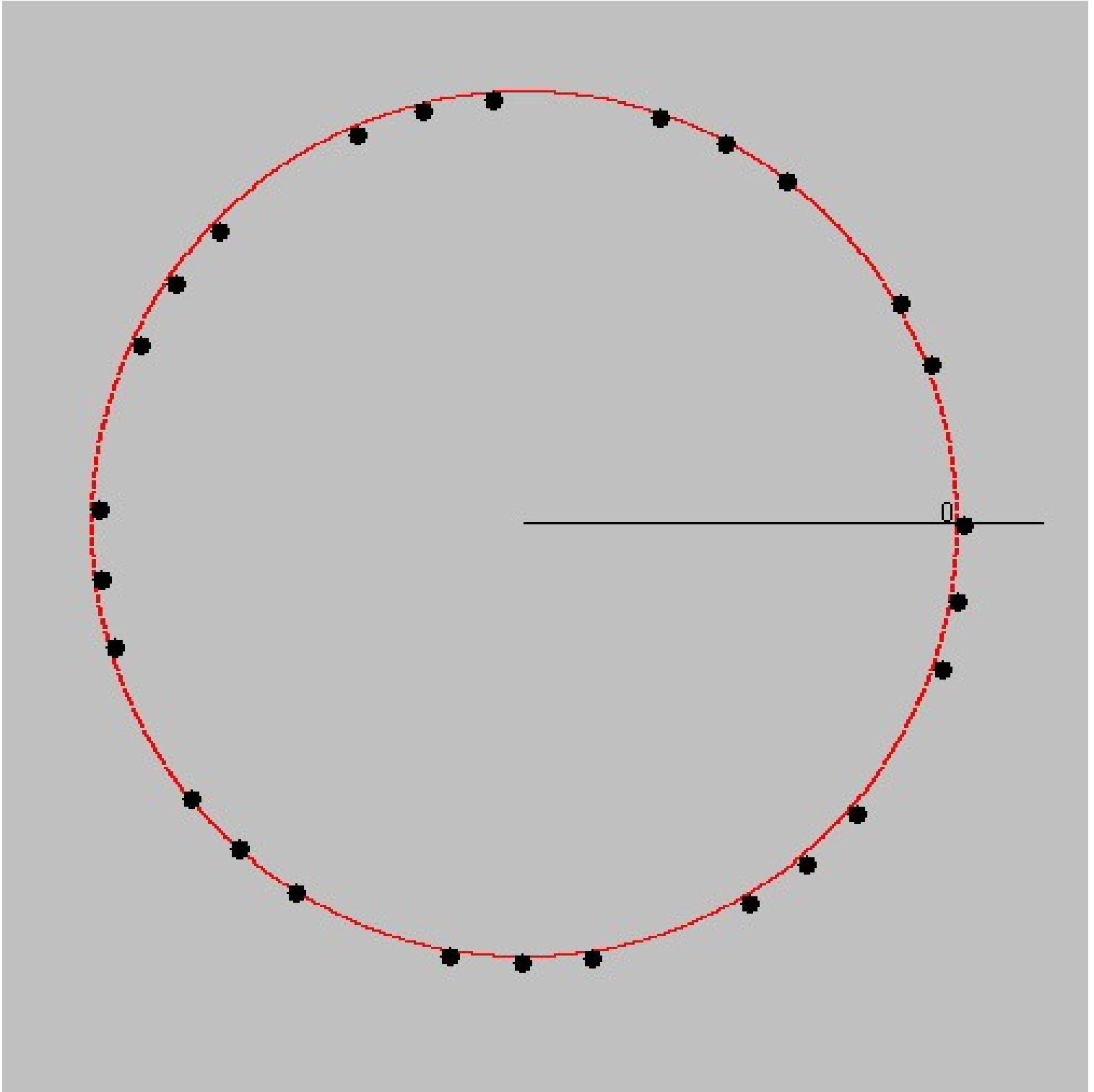


Abbildung 2.7: 25-Orbit mit $\omega=?$

Dies ist schon wieder ein Wechselschritt. Daher ist $\frac{8}{9}$ eine Konvergente (die dritte) mit Koeffizient $a_3 = 1$.

Der nächste Kandidat für einen neuen Nachbarn hat den Index (Nenner) $\ell + r = 9 + 17 = 26$ mit Umlaufzahl (Zähler) $p_{\ell+r} = p_{26} = p_\ell + p_r = 8 + 15 = 23$. Dies ist (so kann man an der Zeichnung ablesen) wieder ein rechter Nachbar ($r = 26$), der allerdings nicht mehr dem 25-Orbit angehört, wir erhalten die Einschließung ($p_r = 23$)

$$\frac{23}{26} < \omega < \frac{8}{9}.$$

Wenn wir über die Abb. 2.7 hinaus weiter iterieren, erhalten wir noch einen weiteren rechten Nachbarn ($r = 35, p_r = 31$), bevor es einen Wechselschritt gibt, der zu einem linken Nachbarn ($\ell = 44, p_\ell = 39$) führt. Das bedeutet, dass $\frac{31}{35}$ die vierte Konvergente von ω mit Koeffizient $a_4 = 3$ ist. Die aktuelle Einschließung lautet

$$\frac{31}{35} = 0.885714\dots < \omega < \frac{39}{44} = 0.88636\dots$$

Der gewählte Wert ist $\omega = 0.886$.

Insgesamt haben wir bis zu diesem „Zeitpunkt“ vier Wechselschritte, die die vier Konvergenten (in Klammern die zugehörigen Koeffizienten) $\frac{1}{1}(a_1 = 1)$, sodann $\frac{7}{8}(a_2 = 7)$, als dritte $\frac{8}{9}(a_3 = 1)$ und schließlich als vierte $\frac{31}{35}(a_4 = 3)$. Siehe Abb. 2.8.

Wir werden in Folge die Konvergenten durch $\frac{p_k}{q_k}, k = 1, 2, \dots$ nummerieren und damit die Notation p_j für die Umlaufzahl von x_j aufheben. Mit dieser neuen Bezeichnung haben wir

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{1}, \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{7}{8}, \quad \frac{p_3}{q_3} = \frac{8}{9}, \quad \frac{p_4}{q_4} = \frac{31}{35}.$$

Diese Konvergenten ergeben sich auch als die endlichen Kettenbrüche

$$\begin{aligned} \frac{p_1}{q_1} &= \frac{1}{1}, \\ \frac{p_2}{q_2} &= \frac{1}{1 + \frac{1}{7}} = \frac{7}{8}, \\ \frac{p_3}{q_3} &= \frac{1}{1 + \frac{1}{7 + \frac{1}{1}}} = \frac{8}{9}, \\ \frac{p_4}{q_4} &= \frac{1}{1 + \frac{1}{7 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}} = \frac{31}{35}. \end{aligned}$$

Rechnen Sie nach!

Beachten Sie die Rekursionsformeln (siehe (2.5))

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \quad q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}, \quad k = 2, 3, 4,$$

wenn man $p_0 := 0, q_0 := 1$ setzt. Denn:

$$7 = p_2 = a_2 p_1 + p_0 = 7 \cdot 1 + 0, \quad 8 = q_2 = a_2 q_1 + q_0 = 7 \cdot 1 + 1 = 8,$$

$$8 = p_3 = a_3 p_2 + p_1 = 1 \cdot 7 + 1, \quad 9 = q_3 = a_3 q_2 + q_1 = 1 \cdot 8 + 1 = 9,$$

$$31 = p_4 = a_4 p_3 + p_2 = 3 \cdot 8 + 7, \quad 35 = q_4 = a_4 q_3 + q_2 = 3 \cdot 9 + 1 = 8.$$

2.2.12 Nenneralgorithmus für Goldene Drehung

Kann man jetzt schon beweisen, dass alle Kettenbruchkoeffizienten $a_k = 1$ sind, d.h., dass jeder Nennerschnitt ein Wechselschnitt ist, wie in Kap. 2.2.6 vermutet? Ja – wenn man die Schrankenauaussage (2.4) als bewiesen ansieht. Dann ist ja jeder Nennerschnitt ein Wechselschnitt und die vertrauten Fibonacci-Rekursionen $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$ sind genau die Rekursionen, die der Aufdatierung von Nennern und Zählern zu Grunde liegen.

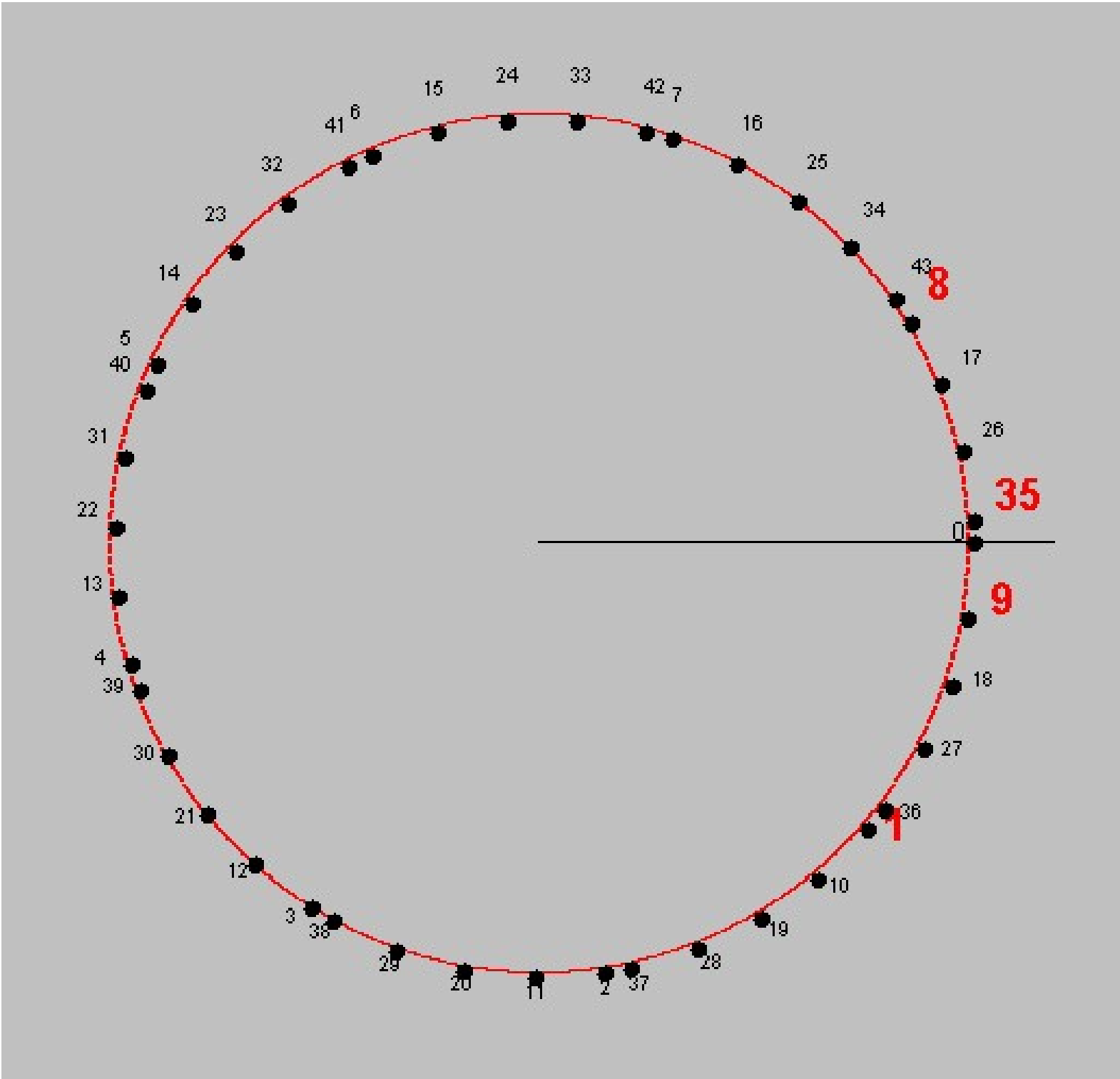


Abbildung 2.8: 43-Orbit mit $\omega=0.886$

Kapitel 3

Kettenbrüche

3.1 Einführung

Sie können zunächst alles Bisherige vergessen und ein wenig elementare Zahlentheorie betreiben. Es geht um (unkürzbare) Brüche $\frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{N}_0, q \in \mathbb{N}$ bzw. um die *Approximation* (Annäherung) irgendwelcher, auch irrationaler Zahlen durch diese. So ist z.B. $\frac{22}{7} = 3.14285714$ eine erstaunlich gute Näherung für die Kreiszahl π . Auf diese Näherung kommt man mit Hilfe von *Kettenbrüchen*. Die Dezimalbruchdarstellung von π hilft hier wenig.

Dabei interessieren insbesondere Näherungsbrüche mit relativ *kleinem* Nenner oder mit einem gewissen Höchstnenner Q .

So kann man zu vorgegebenem Höchstnenner Q nach demjenigen Bruch $\frac{p_0}{q_0}$ fragen, für den einerseits $q_0 \leq Q$ und andererseits jeder andere Bruch $\frac{p}{q}$ mit $q \leq Q$ eine gegebene reelle Zahl ω schlechter annähert:

$$\left| \omega - \frac{p_0}{q_0} \right| < \left| \omega - \frac{p}{q} \right|,$$

falls nur $q \leq Q$ und $\frac{p_0}{q_0} \neq \frac{p}{q}$.

Der Näherungsfehler $\left| \omega - \frac{p_0}{q_0} \right|$ heißt **Fehler 1.Art**. Als **Fehler 2.Art** bezeichnet man

$$|q_0\omega - p_0|,$$

der mit dem Nenner multiplizierte Fehler 1.Art.

Man sucht also zu einem gegebenen Höchstnenner Q und einer Zahl ω diejenigen Brüche, die die Fehler 1. Art bzw. 2. Art minimieren. Beide Fehler werden z.B. für $\omega = \pi$ und $Q = 105$ durch $\frac{22}{7}$ minimiert.

Für eine Näherung $\frac{p_0}{q_0}$ für ω kann man zunächst als Höchstnenner $Q := q_0$ setzen und fordern, dass es keine besseren Näherungen $\frac{p}{q}$ mit $q \leq q_0$ gibt:

Definition 3.1. $\frac{p_0}{q_0}$ mit $q_0 > 0$ heißt **beste Approximation erster (bzw. zweiter) Art** von

$\omega > 0$ genau dann, wenn für $q \leq q_0$ und $\frac{p}{q} \neq \frac{p_0}{q_0}$

$$\left| \omega - \frac{p_0}{q_0} \right| < \left| \omega - \frac{p}{q} \right|,$$

bzw.

$$|q_0\omega - p_0| < |q\omega - p|.$$

Man kann leicht zeigen:

Satz 3.2. Sei $\omega > 0$ und $\frac{p_0}{q_0}$ sei beste Approximation 2. Art von ω . Dann ist $\frac{p_0}{q_0}$ auch beste Approximation 1. Art.

BEWEIS: Nach Voraussetzung ist

$$|q_0\omega - p_0| < |q\omega - p|,$$

falls nur $q \leq q_0$ und $\frac{p}{q} \neq \frac{p_0}{q_0}$. Nun dividiere man diese Ungleichung durch q_0 und nutze $\frac{1}{q_0} \leq \frac{1}{q}$ aus. ■

Die Umkehrung ist nicht richtig. Siehe KHINTCHINE.

Wenn wir an den Nenneralgorithmus in Kap. 2 denken und hier insbesondere an Lemma 2.6, so sehen wir, dass die Abstände eines linken bzw. rechten Nachbarn von $x_0 = 0$ gerade die Fehler 2. Art sind, mit denen ω durch die zugehörigen Brüche $\frac{p_\ell}{\ell}$ bzw. $\frac{p_r}{r}$ angenähert werden. Ich nehme an, dass ℓ und r aktuelle linke bzw. rechte Nenner von $\omega \in (0, 1)$ zu einem „Zeitpunkt“ $Q \geq \max(\ell, r)$ sind. In Bezug auf den Fehler 2. Art ist der kleinere der beiden Abstände zu nehmen. Es ist offensichtlich, dass andere Brüche mit einem kleineren Nenner als Q für eine bessere Approximation in Bezug auf den Fehler 2. Art nicht in Frage kommen. Der nächste in Frage kommende Nenner ist $\ell + r$. Also können sogar alle Brüche mit einem Nenner $< \ell + r$ keine besseren Approximationen in Bezug auf den Fehler 2. Art liefern. Immer dann, wenn der Übergang (Nennersschritt) von $q := \max(\ell, r)$ zu $\ell + r$ ein Wechselschritt ist, muss also $\frac{p}{q}$ beste Approximation 2. Art sein, sogar in Bezug auf einen Höchstnenner $Q < \ell + r$ (wobei p der zu q gehörende Zähler ist). In der schon vorweggenommenen Konvergenten-Sprechweise des letzten Kapitels ist also jede Konvergente von ω beste Approximation 2. Art (und damit nach Satz 3.2 auch beste Approximation 1. Art). Einige, aber nicht alle Brüche zu irgendwelchen Nachbarn von $x_0 = 0$ sind beste Approximationen 1. Art.

Damit haben wir mit dem Nenneralgorithmus eine rechnerische Möglichkeit zur Lösung obiger Approximationsaufgaben. Wir werden aber sehen, dass es effizientere Methoden gibt. Dennoch habe ich mit dem Nenneralgorithmus begonnen, weil der Rotationsaspekt für die Phyllotaxis zentral ist.

Wegen ihrer Bedeutung auch für die Kettenbrüche werde ich die Fehler 2. Art der Konvergenten von ω mit

$$d_k := |q_k\omega - p_k|, k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.1)$$

benennen und noch einmal erwähnen, dass diese gerade die Abstände $d(x_{q_k}, 0)$ der Nachbarn von $x_0 = 0$ vor einem Wechselschritt sind.

3.2 Farey-Folgen

3.2.1 Farey-Folge und Medianten-Addition von Brüchen

Man gebe sich ein $n \in \mathbb{N}$ vor und betrachte alle (gekürzten) Brüche in $[0, 1]$ mit Nenner $\leq n$ (Höchstnenner n). Diese ordne man der Größe nach an, beginnend bei $\frac{0}{1}$, endend bei $\frac{1}{1}$. Die (endliche) Folge nennt man **Farey¹-Folge** F_n . Für $n = 5$ haben wir z.B.

$$\frac{0}{1} < \frac{1}{5} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \frac{1}{1}. \quad (3.2)$$

Wenn wir zwei Nachbarn $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ dieser Folge betrachten, fällt auf, dass ihre Differenz die Gestalt $\frac{1}{qs}$ hat. Z.B. gilt

$$\frac{4}{5} - \frac{3}{4} = \frac{1}{20}.$$

Definition 3.3. Zwei Brüche $\frac{p_1}{q_1}$ und $\frac{p_2}{q_2}$ heißen **Farey-benachbart**, wenn

$$\left| \frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2} \right| = \frac{1}{q_1 q_2}.$$

Es folgt sofort (Bruchrechnung!)

Lemma 3.4. Zwei Brüche $\frac{p_1}{q_1}$ und $\frac{p_2}{q_2}$ sind Farey-benachbart, wenn

$$|p_1 q_2 - p_2 q_1| = 1.$$

Dass obige Beobachtung kein Zufall ist, ist nicht so unmittelbar einsehbar. Hier hilft der auch für sich sehr interessante **Medianten-Operator**, der eine ganz spezielle, bei Schülern sicherlich beliebte Form der Addition von Brüchen vornimmt:

Definition 3.5. Seien $\frac{p_1}{q_1}$ und $\frac{p_2}{q_2}$ zwei Brüche. dann heißt

$$\frac{p_1}{q_1} \oplus \frac{p_2}{q_2} := \frac{p_1 + p_2}{q_1 + q_2}$$

ihr **Mediant**².

Wenn man beginnend bei den Brüchen $\frac{0}{1}$ und $\frac{1}{1}$ fortlaufend Medianten benachbarter Brüche bilden, erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{0}{1} \oplus \frac{1}{1} &= \frac{1}{2}, & \frac{0}{1} \oplus \frac{1}{2} &= \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{2} \oplus \frac{1}{1} &= \frac{2}{3}, & \frac{1}{3} \oplus \frac{1}{2} &= \frac{2}{5}, \end{aligned}$$

etc. Auf diese Weise erhalten wir alle Brüche von F_5 in (3.2). Man sieht darüber hinaus, dass jeder Bruch in (3.2), der nicht am Rande liegt, der Mediant seiner Nachbarn ist und dass je zwei Nachbarn von F_5 Farey-benachbart sind!

¹JOHN FAREY, 1766-1826

²Pennäler-Addition von Brüchen

Lemma 3.6. Seien $\frac{p_1}{q_1}$ und $\frac{p_2}{q_2}$ zwei Farey-benachbarte Brüche und $\frac{p_3}{q_3} = \frac{p_1+p_2}{q_1+q_2}$ ihre Mediant. Dann ist dieser zu beiden Brüchen Farey-benachbart.

Der BEWEIS ergibt sich durch einfache Bruchrechnung:

$$\frac{p_1 + p_2}{q_1 + q_2} - \frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2 q_1 - p_1 q_2}{(q_1 + q_2) q_1}.$$

Da $\frac{p_1}{q_1}$ und $\frac{p_2}{q_2}$ Farey-benachbart sind, ist der Zähler Eins. ■

Jetzt ist offensichtlich, dass der obige Algorithmus, der bei den Brüchen $\frac{0}{1}$ und $\frac{1}{1}$ beginnend fortlaufend Medianten berechnet, eine Folge Farey-benachbarter Brüche liefert, wenn man sie der Größe nach anordnet.

Jetzt haben wir fast den

Satz 3.7. Zwei Nachbarn $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ einer Farey-Folge F_n sind Farey-benachbart, d.h. es gilt

$$\frac{r}{s} - \frac{p}{q} = \frac{1}{qs}.$$

bewiesen. Es muss nur noch gewiss sein, dass man *jeden* Bruch von F_n auf diese Weise der fortwährenden Mediantenbildung erhält.

Hierzu bietet sich ein BEWEIS mit vollständiger Induktion nach n an:

F_1 besteht nur aus den beiden trivialen Brüchen $\frac{0}{1}$ und $\frac{1}{1}$. Diese sind Farey-benachbart.

Nehmen wir nun an, dass alle Brüche von F_n Farey-benachbart sind. Zu zeigen ist, dass sich die Brüche aus F_{n+1} , die noch nicht in F_n erfasst sind, also diejenigen mit Nenner $n + 1$, als Medianten zweier Nachbar aus F_n (die wegen der Induktionsannahme wieder Farey-benachbart sind) ergeben, so dass Lemma 3.6 angewendet werden kann.

Dass dem so ist, besagt das nachfolgende Lemma 3.8. ■

Lemma 3.8. Seien $\frac{p_1}{q_1}$ und $\frac{p_2}{q_2}$ zwei Farey-benachbarte Brüche. Dann hat jeder Bruch zwischen diesen beiden Brüchen einen Nenner $\geq q_1 + q_2$. Oder anders ausgedrückt: Der Bruch mit dem kleinsten Nenner, der zwischen diesen beiden Brüchen liegt, ist ihr Mediant.

BEWEIS: Sei ohne Einschränkung $\frac{p_1}{q_1} < \frac{p}{q} < \frac{p_2}{q_2}$. Dann gilt wegen der Farey-Nachbarschaft

$$p_2 q_1 - p_1 q_2 = 1. \tag{3.3}$$

Ferner folgt aus $\frac{p_1}{q_1} < \frac{p}{q}$, dass

$$p q_1 - p_1 q \geq 1 \tag{3.4}$$

und aus $\frac{p}{q} < \frac{p_2}{q_2}$, dass

$$p_2 q - p q_2 \geq 1. \tag{3.5}$$

Wenn wir die Ungleichung (3.4) mit q_2 und die Ungleichung (3.5) mit q_1 multiplizieren und diese dann entstehenden beiden Ungleichungen

$$pq_1q_2 - p_1qq_2 \geq q_2, \quad p_2qq_1 - pq_1q_2 \geq q_1 \quad (3.6)$$

addieren, hebt sich der Term pq_1q_2 weg, und es bleibt

$$q(p_2q_1 - p_1q_2) \geq q_1 + q_2.$$

Aus (3.3) folgt jetzt die Behauptung. ■

In Aufgabe Ü15 tauchte die Frage auf, ob $\omega = \frac{11}{57}$ der einzige Bruch mit einem Nenner ≤ 60 ist, der $\frac{5}{26} < \omega < \frac{6}{31}$ erfüllt. Jetzt wissen wir sogar, dass der Bruch mit nächstkleinerem Nenner $\frac{5}{26} \oplus \frac{11}{57} = \frac{16}{83}$ ist, dass es sogar keinen weiteren Bruch mit dieser Eigenschaft gibt, der einen Nenner < 83 hat!

In Bezug auf den Nenneralgorithmus aus Kap. 2 ist uns der Mediantenoperator durchaus vertraut: Ein Nennerschnitt macht aus den linken bzw. rechten Nachbarn x_ℓ bzw. x_r mit Brüchen $\frac{p_\ell}{\ell}$ bzw. $\frac{p_r}{r}$ einen neuen Nachbarn $x_{\ell+r}$ mit dem Bruch

$$\frac{p_\ell + p_r}{\ell + r} = \frac{p_\ell}{\ell} \oplus \frac{p_r}{r}.$$

Ausführlicheres findet man in Kap. 3.2.3.

3.2.2 Fibonacci-Zahlen und Fareyfolgen

Auf den ersten Blick überhaupt nicht einsichtig ist die sogenannte **Simpson-Identität** (auch Cassini's Identität³):

Satz 3.9. *Es gilt für alle $n \geq 1$*

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

Eine BEWEIS-möglichkeit ist die der vollständigen Induktion (Übungen). Wir werden jetzt einen Beweis geben, der ausnutzt, dass diese Eigenschaft mit Fareyfolgen zu tun hat. Wir betrachten die Brüche $r_n := \frac{F_{n-1}}{F_n}$. Von diesen wissen wir bereits, dass sie gegen die kleine Goldene-Schnittzahl φ konvergieren. Wenn wir genau hinschauen (Beweis von Satz 2.4), erkennen wir, dass die Konvergenz alternierend ist⁴, man erhält abwechselnd untere und obere Schranken,

$$r_1 < r_3 < r_5 < \dots < \varphi < \dots < r_6 < r_4 < r_2.$$

In der neuen Sprechweise sehen wir

³wiederum ein Spezialfall der sog. Catalan-Identität $F_n^2 - F_{n-r}F_{n+r} = (-1)^{n-r}F_r^2$ genannt.

⁴Dies wird sich als ein Spezialfall im Rahmen der Kettenbrüche herausstellen, siehe Satz 3.19.

Lemma 3.10. r_{n+1} ist Mediant von r_n und r_{n-1} .

BEWEIS:

$$r_{n-1} \oplus r_n = \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}} \oplus \frac{F_{n-1}}{F_n} = \frac{F_n}{F_{n+1}} = r_{n+1},$$

wie man sofort unter Ausnutzung der Fibonacci-Rekursion sieht. ■

Wir wollen jetzt zeigen, dass die Simpson-Identität in Satz 3.9 aus Lemma 3.6 und diesem Lemma 3.10 folgt.

Hierzu zeigen wir durch Induktion, dass zwei aufeinanderfolgende Quotienten r_{n+1} und r_n für alle $n \in \mathbb{N}$ Farey-benachbart sind. Für $n = 1$ ist dies richtig ($r_1 = \frac{0}{1}$ und $r_2 = \frac{1}{1}$ sind Farey-benachbart). Wenn r_{n-1} und r_n Farey-benachbart sind, so auch wegen Lemma 3.10 r_{n+1} und r_{n-1} bzw. r_{n+1} und r_n .

Jetzt folgt unsere Behauptung aus Lemma 3.4. Denn es gilt für gerades n

$$r_{n+1} = \frac{F_n}{F_{n+1}} < \varphi < r_n = \frac{F_{n-1}}{F_n}.$$

Bildet man die Differenz $r_n - r_{n+1}$ der beiden Brüche, so lautet deren Zähler $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2$ und ist gleich 1. Für ungerade n erhält man analog -1. ■

Später werden wir sehen, dass Satz 3.9 ein Spezialfall im Rahmen der Kettenbrüche ist, siehe (3.10).

Es gibt einen schönen geometrischen Trugschluss, der auf der Simpson-Identität beruht (Übungen).

3.2.3 Beziehung zum Nenner-Algorithmus

Sehen Sie, wo im Nenneralgorithmus ein Mediant von zwei Brüchen ins Spiel kam?

Dort hatten wir zwei aufeinanderfolgende Nenner r und ℓ einer irrationalen Zahl ω mit Zählern p_r und p_ℓ betrachtet. Dies führte zu einer Einschließung von ω durch (2.5),

$$\frac{p_r}{r} < \omega < \frac{p_\ell}{\ell}.$$

Es wurde gezeigt, dass der nachfolgende Nenner stets $\ell + r$ mit Zähler $p_\ell + p_r$ ist, der — wenn es sich um einen rechten (linken) Nenner handelt — zu einer unteren (oberen) Schranke

$$\frac{p_\ell + p_r}{\ell + r} < (>) \omega$$

von ω führt. Die neue Schranke ist offensichtlich **Mediant** der Brüche $\frac{p_r}{r}$ und $\frac{p_\ell}{\ell}$!

Ein *Nennerschnitt* des Nenner-Algorithmus ist also nichts anderes als ein Mediantenschritt! Mehr noch: Der Nenner-Algorithmus startet mit der trivialen Inklusion

$$\frac{0}{1} < \omega < \frac{1}{1}$$

und kann als eine Folge von Medianten-Berechnungen aufgefasst werden, wobei jeweils durch die Abfrage

$$\frac{p_\ell + p_r}{\ell + r} < (>) \omega$$

eine Schranke von ω durch den Medianten abgelöst wird.

Mit dieser Einsicht kann man auch völlig losgelöst von Drehungen von einem **Mediantenalgorithmus** zur Annäherung von ω durch Brüche reden.

Jetzt haben wir zusätzlich noch eine Erkenntnis über die Güte des Fehler 1. Art erhalten:

Satz 3.11. *Wenn es im Zuge des Medianten- bzw. Nenneralgorithmus zu einer Einschließung des Typs*

$$\frac{p_r}{r} < \omega < \frac{p_\ell}{\ell}$$

kommt, so hat das Einschließungsintervall die Länge $\frac{1}{r\ell}$.

Die Eigenschaft eines Bruches, beste Approximierende 1. oder 2. Art zu sein, bleibt bis zu Nennern $Q < r + \ell$ erhalten..

BEWEIS: folgt aus der *Farey-Nachbarschaft* der beiden Schranken. ■

Dass vor einem Wechselschritt auch der Fehler 2. Art minimiert wird, haben wir schon in der Einführung zu diesem Kapitel (Kap. 3.1) gesehen.

Ich bemerke noch einmal, dass alle diese Erkenntnisse ohne Gebrauch von Kettenbrüchen gewonnen wurden. Das ändert sich jetzt.

3.3 Kettenbrüche

3.3.1 Einführung

Definition 3.12. *Ein endlicher Kettenbruch⁵ der Ordnung k mit Koeffizienten $a_j \in \mathbb{N}, j = 1, 2, \dots, k$ ist die Darstellung*

$$\frac{p_k}{q_k} = a_0 \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots + \cfrac{1}{a_k}}}} \tag{3.7}$$

⁵Engl.: Continued fraction

einer rationalen Zahl $\frac{p_k}{q_k} \in (0, 1)$.

Man sagt, dass $\omega \in (0, 1)$ durch einen unendlichen Kettenbruch

$$\omega = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_k + \dots}}}}$$

darstellbar ist, wenn die endlichen Kettenbrüche k -ter Ordnung gegen ω konvergiert.

Ich beschränke mich hier auf Zahlen $0 < \omega < 1$, um die Beziehung zu den Drehungen zu betonen. Durch ein vorgeschaltetes $a_0 \in \mathbb{N}_0$ kann man sofort auch Darstellungen beliebiger positiver Zahlen erfassen.

Diese Form der Kettenbrüche wird zuweilen auch *einfach* genannt, weil es auch allgemeinere Kettenbrüche der Form

$$\omega = \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \frac{b_3}{a_3 + \dots + \frac{b_k}{a_k + \dots}}}}$$

gibt. Diese erlauben z.B. die von L.EULER gefundene Darstellung

$$e - 1 = 1 + \frac{2}{2 + \frac{3}{3 + \frac{4}{4 + \dots + \frac{k+1}{k+1 + \dots}}}}$$

Naheliegend ist der Vergleich mit **Dezimalbrüchen**

$$\omega = 0.a_1a_2 \dots a_k \dots$$

mit Ziffern $a_k \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, die ja über

$$\omega = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 10^{-k}$$

mit unendlichen Reihen zusammenhängen.

Doch zuvor werden wir eine neue Notation einführen, weil die Kettenbruch-Schreibweise zu mühsam ist: Für den endlichen Kettenbruch in (3.7) schreiben wir kurz $[a_1, a_2, \dots, a_k]$, für den unendlichen Kettenbruch entsprechend $[a_1, a_2, \dots, a_k, \dots]$.

Um auch Kettenbrüche mit beliebigen positiven Werten zu erfassen, wird von Zahlen ≥ 1 einfach der ganzzahlige Anteil abgezogen. Wird dieser mit $a_0 := \lfloor \omega \rfloor$ bezeichnet, so schreiben wir $\omega = [a_0; a_1, a_2, \dots]$.

3.3.2 Geometrische Veranschaulichung („Rechteckalgorithmus“)

Ich bin mir nicht sicher, ob das Folgende Allgemeingut unter „Kettenbruchexperten“ ist. Ich bin auf diesen Punkt durch irgendeine Internetseite gestoßen. Auf diese Weise erhalten wir eine sehr einfache, und wie ich meine auch schöne geometrische Konstruktion der Kettenbruchentwicklung, aber auch eine Veranschaulichung des Euklidischen Algorithmus zur Berechnung von $ggT(m, n)$ zweier natürlicher Zahlen m und n .

Wir betrachten ein Rechteck R_1 der Längen $x_1 := \omega$ und $x_0 := 1$. Dann ist a_1 die Anzahl der Quadrate mit Kantenlänge ω , die in das Rechteck R_1 hineinpassen. Was nachbleibt, ist ein Rechteck R_2 mit den Längen $x_2 := 1 - a_1\omega$ und ω , wobei man in x_2 gerade den Fehler 2. Art der 1. Konvergente $\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{a_1}$, siehe (3.1), erkennt. Dann ist a_2 die Anzahl der Quadrate der Länge x_2 , die in dieses Rechteck R_2 passen. Nun setze $x_3 := x_1 - a_2x_2$, usw. Diesen Algorithmus nenne ich **Rechteckalgorithmus**. Er liefert offensichtlich die Koeffizienten des Kettenbruchs, aber nicht direkt — wie der Nenneralgorithmus — die Konvergenten(nenner). Eine ganz ähnliche geometrische Überlegung wurde beim Nenneralgorithmus angestellt.

Man kann leicht zeigen, dass $x_3 = d_2$ und allgemein die Kantenlängen des Rechtecks R_k gerade die Fehler 2. Art der $(k - 1)$ -ten und $(k - 2)$ -ten Konvergente ist, ganz in Übereinstimmung mit der Nenneralgorithmus-Erkenntnis, dass a_k die Anzahl der Intervalle der Länge d_{k-1} sind, die noch in ein Intervall der Länge d_{k-2} „hineinpassen“.

Diese Beobachtung hat besondere Bedeutung für die „optimale Packung“ der Samen bei der Saatmaschine bei einem goldenen Drehwinkel $\omega = \varphi$ (siehe Kap. 3.3.10).

Ist $\omega = \varphi$ die kleine Goldene Schnittzahl, so ist das Ausgangsrechteck ein **goldenes Rechteck**, das verbleibende Rechteck nach Abtrennen von einem Quadrat mit Kantenlänge φ ist wieder golden, da $\frac{1-\varphi}{\varphi} = \varphi$. Daher sind alle Kettenbruchkoeffizienten von φ gleich 1.

Wir müssen das Folgende daraufhin überprüfen, ob diese Deutung wirklich so richtig ist. Aber schon jetzt kann man sagen: Wenn der Rechteckalgorithmus nach endlich vielen Schritten bei einem goldenen Rechteck landet, so ist die asymptotische Kettenbruchentwicklung gleich der von φ . Das ist wichtig für die Bedeutung von Lukasfolgen für die Anzahl der Parastichen in der Phyllotaxis! Weil dann eine Drehung um ω nach endlich vielen Schritten ebenfalls „optimal packt“.

3.3.3 Berechnung des Kettenbruchs — Erste Beschreibung

Im Folgenden verwende ich wieder die *Floor-Funktion*, siehe Kap. 2.2.5. Zur Erinnerung:

Für $a > 0$ bezeichnet $\lfloor a \rfloor$ die größte Zahl $n_0 \in \mathbb{N}_0$ mit $n_0 \leq a$.

Verbindung zum Rechteckalgorithmus: $\lfloor a \rfloor$ ist die größte Anzahl von Quadraten der Länge 1, die in ein Rechteck mit den Kanten 1 und a hineinpassen.

Wir notieren:

Lemma 3.13. *Zu $\omega \in (0, 1)$ gibt es genau ein $a_1 \in \mathbb{N}$ und ein $\varepsilon_1 \in [0, 1)$ mit*

$$\omega = \frac{1}{a_1 + \varepsilon_1}.$$

Es gilt

$$a_1 = \left\lfloor \frac{1}{\omega} \right\rfloor, \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{\omega} - a_1.$$

BEWEIS: Ganz einfach. Klar, dass für alle y

$$y = \lfloor y \rfloor + \varepsilon, \quad \varepsilon := y - \lfloor y \rfloor.$$

Nun setze $y := \frac{1}{\omega}$. ■

Verbindung zum *Rechteckalgorithmus*: a_1 ist die größte Anzahl von Quadraten der Länge ω , die in ein Rechteck mit den Kanten ω und 1 hineinpassen. Das verbleibende Restrechteck hat die Längen $1 - a_1\omega = \frac{\varepsilon_1}{a_1 + \varepsilon_1}$ und ω . Oder: a_1 ist die größte Anzahl von Quadraten der Länge 1, die in ein Rechteck mit den Kanten 1 und $1/\omega$ hineinpassen.

a_1 ist also dadurch bestimmt, dass

$$\frac{1}{a_1 + 1} < \omega \leq \frac{1}{a_1}.$$

Genau diese Überlegung wurde in Kap. 2.2.9 im Nenneralgorithmus angestellt, um den ersten Koeffizienten zu bestimmen!

Wenn $\varepsilon_1 = 0$, ist der „Kettenbruch“ $\omega = \frac{1}{a_1}$ schon fertig, sonst wende man das Lemma auf ε_1 statt auf ω an: Es gibt eine eindeutige Darstellung

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{a_2 + \varepsilon_2}$$

mit $a_2 \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon_2 \in [0, 1)$. Insgesamt haben wir

$$\omega = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \varepsilon_2}}$$

Verbindung zum *Rechteckalgorithmus*: Das Restrechteck nach dem ersten Schritt hat die Kantenlängen $1 - a_1\omega = \frac{\varepsilon_1}{a_1 + \varepsilon_1}$ und ω . Wir skalieren dies durch Multiplikation mit $\frac{1}{\omega}$. Dann hat das Restrechteck R_2 die Längen ε_1 und 1, da

$$\frac{\omega}{1 - a_1\omega} = \varepsilon_1.$$

a_2 ist dann die Anzahl der Quadrate mit Kantenlänge ε_1 , die in R_2 hineinpassen.

Nun können wir so fortfahren und erhalten nacheinander a_3, a_4, \dots , bis möglicherweise das erste Mal ein $\varepsilon_k = 0$. Dann gilt

$$\omega = [a_1, a_2, \dots, a_k].$$

Ein solcher Abbruch kann nur für rationale ω vorliegen.

Diesen Algorithmus wollen wir im Folgenden ausführlicher darstellen und ihn insbesondere mit dem klassischen Euklidischen Algorithmus in Beziehung setzen. Hierzu dient der folgende Einschub.

3.3.4 Euklidischer Algorithmus

Der klassische **Euklidische Algorithmus** (Wikipedia) berechnet den größten gemeinsamen Teiler $ggT(m, n)$ zweier natürlicher Zahlen m und n . Auch ihn können wir mit einem Rechteckalgorithmus geometrisch interpretieren. Wir setzen $n > m$ voraus. Nun setze $r_0 := m$ und dividiere n durch r_0 , so dass man

$$n = q_0 r_0 + r_1, \quad 0 \leq r_1 < r_0$$

mit $q_0, r_1 \in \mathbb{N}_0$ erhält. Beachten Sie, dass $q_0 = \lfloor \frac{n}{r_0} \rfloor$.

r_1 ist also der Rest bei der Division von n durch $r_0 = m$ und q_0 gibt an, „wieviele m in n hineinpassen“ („Wie oft kann man m von n abziehen?“).

Rechteckalgorithmus: Man betrachte ein Rechteck mit den Längen m und n . Dann ist q_0 die maximale Anzahl von m -Quadraten (ein Quadrat der Kantenlänge m), die in das Rechteck hineinpassen. Es bleibt nach ein Rechteck mit den Kantenlängen $r_1 = n - q_0 m$ und $r_0 = m$.

Im nächsten Schritt dividiert man r_0 durch r_1 mit Rest r_2 :

$$r_0 = q_1 r_1 + r_2, \quad 0 \leq r_2 < r_1$$

und dann analog

$$r_1 = q_2 r_2 + r_3, \quad 0 \leq r_3 < r_2.$$

(Beachten Sie, dass $q_1 = \lfloor \frac{r_0}{r_1} \rfloor$ und $q_2 = \lfloor \frac{r_1}{r_2} \rfloor$.)

Nun fährt man solange fort, bis $r_k = 0$. Dann gilt

$$r_{k-1} = ggT(m, n),$$

d.h. $ggT(m, n)$ ist der letzte nicht verschwindende Rest beim Euklidischen Algorithmus. Man sieht unmittelbar ein, dass der letzte nicht verschwindende Rest r_{k-1} alle vorherigen r_j ($j < k - 1$) teilen muss, insbesondere also auch m und n . Dass er auch der größte gemeinsame Teiler ist, macht man sich schnell klar.

Rechteckalgorithmus: Dieser bricht ab, wenn das Restrechteck ein Quadrat ist.

Beispiel: $n = 24, m = 18$. Dann gilt $24 = 1 \cdot 18 + 6$ und $18 = 3 \cdot 6 + 0$. Der letzte nicht verschwindende Rest war $r_1 = 6 = ggT(m, n)$.

Die $q_j, j = 0, 1, 2, \dots$ haben hier keine Bedeutung — im Gegensatz zur nachfolgenden Kettenbruchberechnung. Daher erhalten sie einen (vorläufigen) Namen: **Quotienten** von m und n .

3.3.5 Euklidischer Algorithmus zur Berechnung eines Kettenbruchs

Der Kettenbruchalgorithmus wird induktiv definiert:

Gegeben sei $\omega \in (0, 1)$. Setze $\mathbf{k} := \mathbf{1}$ und $\varepsilon_1 := \omega$.

K-Schritt (für allgemeines k):

Setze $y_k := \frac{1}{\varepsilon_k}$, $a_k := \lfloor y_k \rfloor$ und $\varepsilon_{k+1} := y_k - a_k$.

Bemerkung für $k = 1$: Nach Lemma 3.13 gilt

$$\omega = \frac{1}{a_1 + \varepsilon_1}.$$

Fall 1: $\varepsilon_{k+1} > 0$. Ersetze k durch $k + 1$ und gehe zum K-Schritt.

Fall 2: $\varepsilon_{k+1} = 0$. Dann breche den Algorithmus ab.

Im letzten Fall 2 haben wir $\omega = [a_1, a_2, \dots, a_k]$ als endlichen Kettenbruch dargestellt. Falls der Fall 2 niemals eintritt, haben wir die Darstellung $\omega = [a_1, a_2, \dots]$ als unendlichen Kettenbruch.

Einfache Merkform des Algorithmus: Invertiere ($y := \frac{1}{\omega}$), setze a_1 als ganzzahligen Anteil von y (die Zahl vor dem Punkt: $a_1 = \lfloor y \rfloor$), nehme den nicht ganzzahligen Anteil von y ($\varepsilon := y - \lfloor y \rfloor$) und mache mit ε dasselbe wie vorher mit ω . Kurz: Invertieren, vor dem Punkt (Komma) merken, abziehen, invertieren,.....

Die kurze rekursive Form des Algorithmus lautet

Start: $y_1 := \frac{1}{\omega}, a_1 := \lfloor y_1 \rfloor$.

$$y_{k+1} = \frac{1}{y_k - a_k}, \quad a_{k+1} := \lfloor y_{k+1} \rfloor$$

Abgebrochen werden muss, wenn erstmals $y_k = a_k$.

Rechteckalgorithmus: y_k ist das Verhältnis der längeren zur kürzeren Seite des Rechtecks R_k .

Beispiel: $\omega = 0.886$.

1. $y_1 = \frac{1}{\omega} = 1.1287$, also $a_1 = \lfloor y_1 \rfloor = 1$. Dann $\varepsilon_2 := y_1 - a_1 = 0.1287$.

2. $y_2 = \frac{1}{\varepsilon_2} = 7.7719$, also $a_2 = \lfloor y_2 \rfloor = 7$. Dann $\varepsilon_3 := y_2 - a_2 = 0.7719$.
3. $y_3 = \frac{1}{\varepsilon_3} = 1.2955$, also $a_3 = \lfloor y_3 \rfloor = 1$. Dann $\varepsilon_4 := y_3 - a_3 = 0.2955$.
4. $y_4 = \frac{1}{\varepsilon_4} = 3.3846$, also $a_4 = \lfloor y_4 \rfloor = 3$. Dann $\varepsilon_5 := y_4 - a_4 = 0.3846$.
5. $y_5 = \frac{1}{\varepsilon_5} = 2.6000$, also $a_5 = \lfloor y_5 \rfloor = 2$. Dann $\varepsilon_6 := y_5 - a_5 = 0.6000$.
6. $y_6 = \frac{1}{\varepsilon_6} = 1.6667$, also $a_6 = \lfloor y_6 \rfloor = 1$. Dann $\varepsilon_7 := y_6 - a_6 = 0.6667$.
7. $y_7 = \frac{1}{\varepsilon_7} = 1.5000$, also $a_7 = \lfloor y_7 \rfloor = 1$. Dann $\varepsilon_8 := y_7 - a_7 = 0.5$.
8. $y_8 = \frac{1}{\varepsilon_8} = 2.0000$, also $a_8 = \lfloor y_8 \rfloor = 2$. Dann $\varepsilon_9 := y_8 - a_8 = 0$.

Überzeugen Sie sich, dass

$$0.886 = \frac{1}{1 + \frac{1}{7 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}}}}$$

Sie sehen hoffentlich, dass dieser Algorithmus in einer klaren Beziehung zum Nenneralgorithmus des letzten Kapitels steht. Man bedenke, dass a_k gerade angibt, wie oft das kleinere Intervall der Länge $d_k := d(x_{q_k}, 0)$ in das größere der Länge d_{k-1} hineinpasst. Das y_{k+1} ist gerade der Quotient $\frac{d_k}{d_{k-1}}$, gibt also die „Verzerrung“ oder die „Ungleichförmigkeit“ der Partition von S^1 durch den q_k -Orbit an, die ja gerade nur zwei verschiedene Intervalllängen aufweist.

3.3.6 Kettenbruch einer rationalen Zahl

Wir schauen uns den rationalen Fall $\omega = \frac{p}{q}$ mit teilerfremden p und q genauer an. Dann kann man zum einen die Verwandtschaft zum Euklidischen Algorithmus zur Berechnung von $ggT(q, p) = 1$ sehen, zum anderen sieht man auch, dass in diesem Fall der Kettenbruch-Algorithmus abbricht.

E-Schritt 1: $q = a_1 p + r_1$, $0 \leq r_1 < p$.

Dies ist auch der erste Schritt des Kettenbruch-Algorithmus (da $a_1 = \lfloor \frac{q}{p} \rfloor$ und $\frac{r_1}{p} = \varepsilon_1$ mit ε_1 in obigem Schritt).

E-Schritt 2: $p = a_2 r_1 + r_2$, $0 \leq r_2 < r_1$.

Wieder erkennt man mit $\varepsilon_2 := \frac{r_1}{p}$ aus dem E-Schritt 1 und dass dies wegen $a_2 = \lfloor \frac{1}{\varepsilon_2} \rfloor$ gerade der Schritt des Kettenbruchalgorithmus ist.

Insgesamt sind die a_j gerade die *Quotienten* des Euklidischen Algorithmus für p und q , dessen letzter Schritt wegen der Teilerfremdheit von p und q zu einem Rest $r = 1$ führt. Das ist, bezogen auf den Kettenbruch-Algorithmus, der vorletzte ($k - 1$ -te) Schritt, der durch $a_k := r_{k-2}$ ergänzt wird (es ist $r_{k-1} = 1$ und $r_k = 0$). Beachten Sie⁶, dass $a_k \geq 2$.

Wir fassen die bisherigen Überlegungen zusammen:

Satz 3.14. *Jede rationale Zahl $\frac{p}{q}$ mit $1 \leq p < q$ ist durch einen endlichen Kettenbruch $[a_1, \dots, a_k]$ der Ordnung k mit $a_k \geq 2$ darstellbar. Jeder endliche Kettenbruch ist eine rationale Zahl.*

Die Koeffizienten a_j , $j = 1, 2, \dots, k$ können mit dem Euklidischen Algorithmus zur Berechnung von $\text{ggT}(q, p)$ als Quotienten von p und q berechnet werden.

Diese Aussage ist viel einfacher als der analoge Satz bei Dezimalbrüchen, weil zwar endliche Dezimalbrüche rationale Zahlen darstellen, es aber auch unendliche (periodische) Dezimalbrüche gibt, die rationale Zahlen darstellen.

Beachten Sie, dass der Satz 3.14 nichts über die Ordnung des Kettenbruchs aussagt, der nur bedingt etwas mit der Größe des Nenners q zu tun hat. Aber natürlich ist die Ordnung niemals größer als q .

Beispiele:

1.

$$\frac{17}{50} = \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{16}}}$$

Die Ordnung ist 3, es ist $a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = 16$

2.

$$\frac{8}{13} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}$$

Die Ordnung ist 5, es ist $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1, a_5 = 2$.

⁶Dann ist $[a_1, \dots, a_k] = [a_1, \dots, a_k - 1, 1]$. Jeden endlichen Kettenbruch kann man mit einem letzten Koeffizienten $a_k \geq 2$ darstellen.

3.3.7 Unendliche Kettenbrüche bei irrationalen Zahlen

Für irrationale ω bricht der Kettenbruchalgorithmus niemals ab, er liefert also einen unendlichen Kettenbruch, der im Sinne von

$$\omega = \lim_{k \rightarrow \infty} [a_1, a_2, \dots, a_k]$$

gegen ω konvergiert. Dies ist zwar anschaulich klar, muss aber noch gezeigt werden. Hierzu vermerken wir zunächst, dass die Kettenbruch-Koeffizienten von ω durch den Algorithmus eindeutig bestimmt sind, wir können von **den** Kettenbruch-Koeffizienten von ω sprechen.

Jeder endliche Teilbruch $[a_1, a_2, \dots, a_k]$ ist eine rationale Zahl und lässt sich daher eindeutig als Bruch $\frac{p_k}{q_k}$ mit teilerfremden p_k und q_k darstellen.

Definition 3.15. Seien $a_k, k = 1, 2, \dots$, die Kettenbruch-Koeffizienten von $\omega \in (0, 1)$. Dann heißt der Bruch

$$\frac{p_k}{q_k} = [a_1, a_2, \dots, a_k],$$

k-te Konvergente von ω . Der Zähler p_k heißt **Konvergenzähler**, der Nenner q_k **Konvergentenner**.

Wir haben gesehen, dass die erste Konvergente $\frac{1}{a_1}$ eine obere Schranke von ω ist. Da

$$\omega = \frac{1}{a_1 + \varepsilon}$$

mit einem $\varepsilon \in (0, 1)$ gilt und da $\frac{1}{a_2}$ eine obere Schranke von ε ist, muss

$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}$$

eine untere Schranke von ω sein. Diesen Schluss kann man induktiv fortsetzen und man erhält

Satz 3.16. Für gerade $k = 2j$ ist die k -te Konvergente eine untere, für ungerade $k = 2j - 1$ eine obere Schranke von ω :

$$\frac{p_{2j}}{q_{2j}} \leq \omega \leq \frac{p_{2j-1}}{q_{2j-1}}, j = 1, 2, \dots \quad (3.8)$$

Ist ω irrational, so steht so steht in (3.8) stets $<$ statt \leq .

Dies stimmt überein mit dem uns bekannten Fall $\omega = \varphi$, siehe (2.4). Hier sind ja die Brüche $\frac{F_{2j}}{F_{2j+1}}$ obere und $\frac{F_{2j-1}}{F_{2j}}$ untere Schranken von φ . Die k -te Konvergente von φ ist $\frac{F_k}{F_{k+1}}, k = 1, 2, 3, \dots$. Siehe (2.4) aus Kap. 2

Wir können noch mehr herausfinden. Hierzu nehmen wir an, dass die Kettenbruchdarstellung von ω bis zum k -ten Glied erfolgt ist und noch nicht abgebrochen werden kann. Dann gibt es ein $\varepsilon_k \in (0, 1)$ mit

$$\omega = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_k + \varepsilon_k}}}}$$

Jetzt fokussieren wir den Blick auf die Abhängigkeit dieses Kettenbruchs von ε_k und betrachten

$$f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \varepsilon \mapsto \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_k + \varepsilon}}}}$$

Wir notieren die Spezialfälle

- $k = 1$:

$$f_1(\varepsilon) = \frac{1}{a_1 + \varepsilon},$$

- $k = 2$:

$$f_2(\varepsilon) = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \varepsilon}} = \frac{a_2 + \varepsilon}{a_1 a_2 + 1 + a_1 \varepsilon}$$

Es ist daher naheliegend, dass f_k eine *gebrochen-lineare Funktion* ist gemäß

Definition 3.17. Eine reelle Funktion heißt **gebrochen-linear** genau dann, wenn es reelle Zahlen α, β, γ und $\delta \neq 0$ gibt mit

$$f(x) = \frac{\alpha + \beta x}{\gamma + \delta x}, \quad x \neq \frac{-\gamma}{\delta}$$

und

$$D := \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

Das D kann als Determinante einer 2×2 -Matrix aufgefasst werden. Falls $D = 0$, so wäre $f(x)$ eine Konstantenfunktion.

In unserem Fall haben wir noch eine speziellere Situation: Die vier Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sind aus \mathbb{N}_0 , und es ist die „Determinante“ $D := \alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$, genauer die Determinante von

$$A := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

Solche Funktionen heißen *unimodular*.

Beachten Sie, dass eine gebrochen-lineare Funktion i.A. eine Polstelle in der Nullstelle $z := \frac{-\gamma}{\delta}$ des Nenners hat, d.h. dass nicht ganz \mathbb{R} zum Definitionsbereich zählt. Genauer: Eine gebrochen-lineare Funktion ist eine Bijektion zwischen $\mathbb{R} \setminus \{\frac{-\gamma}{\delta}\}$ und $\mathbb{R} \setminus \{\frac{-\beta}{\delta}\}$. Die Umkehrfunktion ist selbst wieder gebrochen-linear und hat dieselbe Determinante. Die Umkehrfunktion einer D-Funktion ist daher selbst wieder eine D-Funktion.

Lemma 3.18. *Die oben definierte Funktion f_k ist gebrochen-linear für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{N}_0$ und „Determinante“ $D_k := \alpha\delta - \beta\gamma = (-1)^k$.*

BEWEIS durch vollständige Induktion nach k :

Induktionsanfang: ($k = 1$) $f_1(x) = \frac{1}{a_1+x}$ hat die gewünschte Form.

Induktionsschluss: Es gilt (Innduktionsschlüssel!!)

$$f_{k+1}(x) = \frac{1}{a_1 + \tilde{f}_k(x)}$$

mit

$$\tilde{f}_k(x) = \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots + \frac{1}{a_{k+1} + x}}}}$$

Nach Induktionsannahme ist \tilde{f}_k gebrochen-linear und es gibt α, β, γ und δ aus \mathbb{N} mit $D_k := \alpha\delta - \beta\gamma = (-1)^{k+1}$ und

$$\tilde{f}_k(x) = \frac{\alpha + \beta x}{\gamma + \delta x}.$$

Dann ist aber

$$f_{k+1}(x) = \frac{1}{a_1 + \tilde{f}_k(x)} = \frac{1}{a_1 + \frac{\alpha + \beta x}{\gamma + \delta x}}.$$

Einfaches Bruchrechnen zeigt, dass

$$f_{k+1}(x) = \frac{\gamma + \delta x}{a_1\gamma + \alpha + (a_1\delta + \beta)x},$$

mit „Determinante“ $D_{k+1} = \delta(a_1\gamma + \alpha) - \gamma(a_1\delta + \beta) = \delta\alpha - \beta\gamma = -D_k$.

Daher ist auch f_{k+1} gebrochen-linear und die Koeffizienten genügen den obigen Bedingungen.

Nun notieren wir die folgenden Eigenschaften von f_k :

1.

$$f_k(0) = \frac{p_k}{q_k},$$

2.

$$f_k\left(\frac{1}{a_{k+1}}\right) = \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}},$$

3.

$$f_k(\varepsilon_k) = \omega,$$

4.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} f_k(\varepsilon) = \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}.$$

Nur die letzte Aussage bedarf einer Erklärung: Diese Aussage folgt aus

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{1}{a_k + \varepsilon} = 0.$$

Jetzt folgern wir aus der ersten und letzten Aussage, dass

$$f_k(\varepsilon) = \frac{p_k + \varepsilon p_{k-1}}{q_k + \varepsilon q_{k-1}}$$

und aus der zweiten nach Erweiterung des Bruchs mit a_{k+1} , dass

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = \frac{a_{k+1}p_k + p_{k-1}}{a_{k+1}q_k + q_{k-1}}$$

sowie die überaus wichtige und interessante Rekursionsformel

$$p_{k+1} = a_{k+1}p_k + p_{k-1}, \quad q_{k+1} = a_{k+1}q_k + q_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.9)$$

mit der Verankerung $p_0 = 0, q_0 = 1, p_1 = 1, q_1 = a_1$. Diese Rekursion erlaubt eine einfache Berechnung der Konvergenten aus den Koeffizienten des Kettenbruchs!

Diese Rekursion kennen Sie vom Nenneralgorithmus, s. (2.5). Dies schließt den Kreis. Der Zusammenhang mit dem Nenneralgorithmus ist jetzt klar! Statt des Nenneralgorithmus haben wir jetzt den noch einfacheren Euklidischen Algorithmus zur Berechnung von Brüchen, die die Fehler 1. und 2. Art minimieren.

3.3.8 Konvergenz der Konvergenten

Wenn $\omega \in (0, 1)$ irrational ist, so ist ω durch einen unendlichen Kettenbruch $[a_1, a_2, \dots]$ darstellbar, und die Konvergenten

$$\frac{p_k}{q_k} := [a_1, a_2, \dots, a_k], \quad k = 1, 2, \dots$$

konvergieren gegen ω . Jetzt stellen wir die Frage, wie gut denn die rationalen Konvergenten die irrationale Zahl approximieren. Dabei können wir von der geometrischen Interpretation des Nenneralgorithmus, von der zahlentheoretischen Interpretation durch den Mediantenalgorithmus oder eben durch die Kettenbrucheigenschaft Gebrauch machen. Auch die geometrische Veranschaulichung durch den Rechteckalgorithmus in Kap. 3.3.2 kann hilfreich sein. Rechnerisch ist natürlich vor allem die Rekursion (3.9) wertvoll.

Die Medianteninterpretation liefert sofort (s. auch Satz 3.16)

Satz 3.19. *Zwei aufeinander folgende Konvergenten schließen ω ein. Dabei bilden die Konvergenten mit geradem Index k eine streng monoton wachsende, die Konvergenten mit ungeradem Index eine streng monoton fallende Folge, genauer: Mit $c_k := \frac{p_k}{q_k}$ gilt*

$$c_2 < c_4 < c_6 < \dots < c_{2n} < c_{2n+1} < \dots < c_3 < c_1.$$

Die Länge des Einschließungsintervalls zwischen k -ter und $(k+1)$ -ter Konvergente ist $\frac{1}{q_k q_{k+1}}$. c_k minimiert die Fehler 1. und 2. Art in Bezug auf einen Höchstnenner $Q < q_{k+1}$.

Die vorletzte Eigenschaft in Satz 3.19 besagt nur, dass zwei aufeinanderfolgende Konvergenten Farey-benachbart sind, was auch durch

$$p_{k+1}q_k - p_kq_{k+1} = (-1)^{k+1} \tag{3.10}$$

ausgedrückt werden kann.

Die letzte Aussage des Satzes folgt aus der Analogie zum Nenneralgorithmus, wo wir gesehen hatten, dass $d_k = d(x_{q_k}, 0) = |q_k\omega - p_k|$.

Satz 3.20. *Für den Fehler 1. Art gilt die Abschätzung*

$$\frac{1}{(a_{k+1} + 2)q_k^2} < \left| \omega - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{a_{k+1}q_k^2},$$

für den Fehler 2. Art

$$\frac{1}{(a_{k+1} + 2)q_k} < |q_k\omega - p_k| < \frac{1}{a_{k+1}q_k}$$

Dieser Satz ist mit Genuss zu interpretieren. Er besagt, dass die Güte der Näherung der k -ten Konvergente für ω ganz wesentlich von dem Konvergentennenner q_k und vom *nächsten* Kettenbruchkoeffizienten a_{k+1} abhängt. Wenn letzterer sehr groß ist, besagt dies, dass die Näherung sehr gut ist, auch wenn q_k relativ klein.

BEWEIS von Satz 3.20

Wir lassen die Indizes weg und setzen

$$\frac{p}{q} := \frac{p_k}{q_k}, \quad \frac{r}{s} := \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}.$$

Per vollständiger Induktion kann man zeigen, dass die letzte Konvergente $\frac{p}{q}$ dichter an ω liegt als die vorletzte Konvergente $\frac{r}{s}$.

Mit $a := a_{k+1}$ ist (siehe (3.9))

$$p_{k+1} := ap + r, \quad q_{k+1} = aq + s.$$

Die Mediantendeutung liefert, dass

$$b(n) := \frac{np + r}{nq + q}, \quad n = 1, 2, \dots, a$$

auf der $\frac{p}{q}$ entgegengesetzten Seite von ω liegt, während $b(a+1)$ (Wechselschritt!) auf der gleichen Seite liegt, aber näher an ω als $\frac{p}{q}$. Beachten Sie, dass $b(n)$ der Mediant von $b(n-1)$ und $\frac{p}{q}$ ist, so dass zwei aufeinanderfolgende Brüche $b(n-1)$ und $b(n)$ Farey-benachbart sind.

Mit einem kleinen Einschub kann man auf Grund dieser Farey-Nachbarschaft sehen, dass

$$g(n) := b(n) - b(n-1)$$

streng monoton fällt.

Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass

$$\frac{r}{s} < \omega < \frac{p}{q}.$$

Dann haben wir also

$$\frac{r}{s} < b(a) = \frac{ap + r}{aq + s} < \omega < b(a+1) = \frac{(a+1)p + r}{(a+1)q + s} < \frac{p}{q}.$$

Es folgt

$$\left| \omega - \frac{p}{q} \right| < \left| \frac{p}{q} - b(a) \right| = \frac{1}{q(aq + s)} < \frac{1}{aq^2},$$

womit die obere Schranke in Satz 3.20 gezeigt ist.

Ferner gilt

$$\left| \omega - \frac{p}{q} \right| > \left| \frac{p}{q} - b(a+1) \right| > \frac{1}{q(s + (a+1)q)} > \frac{1}{q(q + (a+1)q)} = \frac{1}{(a+1)q^2}.$$

Dabei habe ich von der Farey-Nachbarschaft von $\frac{p}{q}$ zu $b(a+1)$ sowie von Abschätzungen von Brüchen in dem Sinne Gebrauch gemacht, dass ein Bruch kleiner wird, wenn man den Nenner vergrößert. Ferner wurde $s < q$ benutzt bzw. dass die Folge der Konvergentennenner streng monoton wächst. ■

Im Beweis wurde davon Gebrauch gemacht, dass die k -te Konvergente näher an ω liegt als ihr Vorgänger, die $(k-1)$ -te Konvergente. Man findet in dem Beweis auch den hierzu notwendigen Induktionsschluss, da recht leicht

$$|\omega - b(a)| < \left| \omega - \frac{p}{q} \right|$$

gefolgert werden kann (Man beachte, dass $b(a)$ die $(k+1)$ -te Konvergente von ω ist): Es ist

$$|\omega - b(a)| < |b(a+1) - b(a)| < \left| \omega - \frac{p}{q} \right|,$$

$$\text{da } |b(a+1) - b(a)| < \left| \frac{p}{q} - b(a+1) \right| < \left| \frac{p}{q} - \omega \right|.$$

Beispiele: 1. Ein Jahr hat $J := 365.2425$ Tage und ein synodischer Mondumlauf zählt $M := 29.53059$ Tage. Die Griechen haben so gerechnet, dass 235 Monate gerade 19 Jahre ergeben. Offensichtlich ist $\frac{19}{235}$ eine sehr gute Näherung für $\omega := \frac{M}{J}$. Das kann man mit Hilfe der Kettenbrüche begründen! Denn es handelt sich um eine Konvergente von ω und der nächste Kettenbruchkoeffizient ist mit 14 recht groß.

2. Es gibt mit $\frac{355}{113} = 3.14159292$ eine sehr gute Näherung für π . Auch das kann man mit Kettenbrüchen begründen. Der nächste Koeffizient ist 292.

3.3.9 Geometrische Konstruktion

Man nehme kariertes Papier und zeichne die Gerade $y = \omega x$ in ein Koordinatensystem, dessen Ursprung in einem „Gitterpunkt“ liegt. Ist ω irrational, so wird sie niemals einen weiteren Gitterpunkt treffen. Man kann auch sagen, dass kein „rationaler Punkt“ auf dieser Geraden liegt. Nun denke man sich die Konvergenten als Punkte $P_k := (q_k, p_k)$ eingezeichnet. Sie liegen abwechselnd unter und über der Geraden, und zwar für gerade k oberhalb. Nun gilt ja wegen der Rekursion (3.9)

$$P_{k+1} = a_{k+1}P_k + P_{k-1}.$$

a_{k+1} ist die größte natürliche Zahl, für die P_{k+1} auf der anderen Seite der Geraden liegt als P_k . Beachten Sie, dass die „vertikalen Fehler“ gerade $|q_k\omega - p_k|$, also die Fehler 2. Art sind!

3.3.10 Die Goldene Drehung im Zusammenhang mit Pflanzenwachstum

Jetzt geht es darum, warum die Natur den goldenen Divergenz-Winkel bevorzugt. Ausgangspunkt ist dabei, dass sich die entstehenden Pflanzenteile (Samen, Blütenstände, etc.) möglichst

wenig Sonnenlicht wegnehmen wollen. Wobei sie sich aber schon gegenwärtigen, dass noch andere Teile nachwachsen, also auch ihren Platz haben wollen. Die mathematische Wachstumsannahme ist, dass für jeden Samenort ein fester Drehwinkel festgelegt wird und dass das weitere Wachsen nur radial stattfindet. Sonst könnten sich die Neuankömmlinge einfach in die Mitte ihrer Vorgänger setzen. Oder nach jedem neuen Pflanzenteil würden alle bisherigen einen neuen Platz einnehmen, so dass alle Abstände gleich wären.

Wenn das radiale Wachstum nicht sehr groß ist, kommt es ausschließlich auf die Abstände zwischen benachbarten Orbitpunkten auf S^1 an, von denen es kurz vor Vollendung des $(k+1)$ -ten Wechselschrittes zwei verschiedene, nämlich d_k und d_{k-1} gibt. Wir versetzen uns wieder in die Lage des „Ursamens“ $x_0 = 0$, dessen Sonnengenuss durch seine beiden Nachbarn eingeschränkt wird. Für ihn sind nach Ansiedlung von q_k Konkurrenten (der q_k -te ist sein Nachbar geworden und bleibt es bis zum q_{k+1} -ten Samen) der Abstand d_k , der ja kleiner als d_{k-1} ist, maßgeblich. Wir interessieren uns also für die Abstände

$$d_k := d(x_{q_k}, 0), k = 1, 2, \dots,$$

wenn wir wieder ein dynamisches System zur Rotation R_ω und die Konvergentennenner q_k betrachten. Was haben diese mit Kettenbrüchen zu tun? Offensichtlich ist

$$d_k := |q_k \omega - p_k|$$

der Fehler 2. Art der k -ten Konvergente von ω , siehe Lemma 2.6.

Auch ohne Kettenbrüche wissen wir, dass d_k eine monoton fallende Nullfolge ist und dass a_{k+1} die größte natürliche Zahl ist, für die $a_{k+1} d_k \leq d_{k-1}$ gilt. Ohne Betragstriche ist die Folge

$$\delta_k := q_k \omega - p_k$$

oszillierend und erfüllt die Rekursion

$$\delta_{k+1} = a_{k+1} \delta_k + \delta_{k-1}, \quad \delta_{-1} = -1, \delta_0 = \omega.$$

(Dann folgt $\delta_1 = a_1 \omega - 1$).

Rechteckalgorithmus: Die kleinere Seitenlänge des Rechtecks R_{k+1} ist gerade d_k , die größere Seite hat die Länge d_{k-1} . Das Verhältnis der längeren zur kürzeren Seite von R_{k+1} ist also r_k . Mit Hilfe von vollständiger Induktion kann man zeigen, dass r_k gerade das y_{k+1} im k -ten Kettenbruchalgorithmus-Schritt ist.

Ein Erklärungs-Ansatz ist es, sich für das Verhältnis

$$r_k := \frac{d_{k-1}}{d_k},$$

zu interessieren, welches stets > 1 ausfällt. Unter dem Gesichtspunkt der Wachstumsinterpretation und einer „optimalen Packung“ kann man die Forderung aufstellen, dass r_k nur mäßig

groß werden darf. Da a_{k+1} die größte natürliche Zahl ist, für die $a_{k+1}d_k \leq d_{k-1}$ gilt, muss $a_{k+1} + 1 > r_k = \frac{d_{k-1}}{d_k} \geq a_{k+1}$ sein. Optimal im eben genannten Sinne ist also $a_{k+1} = 1$. Wir können also beim goldenen Drehwinkel $\omega = \varphi$ von einer optimalen Packung sprechen. Betrachten wir die vorzeichenbehafteten

$$\varrho_k := \frac{\delta_k}{\delta_{k-1}},$$

so erhalten wir sofort aus der Rekursion für δ_k , dass

$$\varrho_{k+1} = a_{k+1} + \frac{1}{\varrho_k}, \varrho_0 = -\omega.$$

Dann können wir leicht folgern, dass für $\omega = \varphi$ die Folge der ϱ_k abwechselnd φ und $-\varphi$ ist, d.h. dass $x_{q_{k+1}}$ den Bogen $(0, x_{q_{k-1}})$ im goldenen Schnitt teilt - was wir ja schon in Aufgabe Ü18 gesehen haben. Ferner gilt $r_k = \Phi$ für alle k — beim Rechteckalgorithmus sind alle Rechtecke R_k golden.

Ein zweiter Erklärungsansatz für den goldenen Divergenzwinkel ist der Folgende: Der „Ursamen“ will den Nachbarabstand d_k so groß, wie es bei q_k Konkurrenten noch möglich erscheint, haben. Als erstes erkennt er, dass die Situation für alle Orbitpunkte gleich ist. Jeder hat einen d_k -nahen Nachbarn. Daher wird er gerechterweise den Quotienten d_k/q_k (das ist gerade der Fehler 1. Art!) als relatives Maß nehmen und zwar für alle $k = 1, 2, \dots$. Beachten Sie, dass alle diese Zahlen von ω bzw. dessen Kettenbruchentwicklung abhängen. Nun kann man aus Satz 3.20 folgern, dass diese Quotienten bei der goldenen Drehung im Vergleich mit allen anderen Winkeln für alle k maximal sind:

Wegen $a_{k+1} = 1$ liefert Satz 3.20

$$\frac{1}{q_k^2} \geq \frac{d_k}{q_k} = \left| \omega - \frac{p_k}{q_k} \right| \geq \frac{1}{3q_k^2}.$$

Es gibt keine irrationale Zahl, die sich durch ihre Konvergenten schlechter approximieren lassen, als die kleine Goldene Schnittzahl φ . Man spricht von der „irrationalsten“ Zahl.

Der goldene Winkel liefert „zu jeder Zeit“ eine optimale Packung im Hinblick auf Nachbarschaft.

3.3.11 Kettenbrüche, Goldener Schnitt und Fibonacci-Zahlen

Der allereinfachste (periodische) Kettenbruch ist

$$\omega = [\bar{1}] = [1, 1, 1, \dots] = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

mit lauter Einsen als Kettenbruchkoeffizienten. Sie wissen schon aus einem Proseminarvortrag, dass dieses ω gerade die kleine Goldene-Schnitt-Zahl ist, was man sofort einsieht, wenn man

$$\omega = \frac{1}{1 + \omega}$$

aus dem Kettenbruch gewinnt und die zugehörige quadratische Gleichung

$$x^2 + x - 1 = 0,$$

dessen positive Lösung gerade die kleine Goldene-Schnitt-Zahl ist, betrachtet!

Betrachtet man die Rekursionsformel 3.9, so erhält man alte Bekannte:

$$p_{k+1} = p_k + p_{k-1}, \quad q_{k+1} = q_k + q_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

mit $p_0 = 0, q_0 = 1, p_1 = 1, q_1 = 1$. Ein Vergleich mit der Fibonacci-Rekursion

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, F_0 = 0, F_1 = 1$$

zeigt $p_k = F_k, q_k = F_{k+1}$, d.h. die Konvergenten von φ sind die Quotienten aus Fibonacci-Zahlen, also

$$\frac{p_k}{q_k} = \frac{F_k}{F_{k+1}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

von denen wir ja schon wissen, dass sie gegen φ konvergieren — eine Aussage, die wir jetzt mit völlig anderen Mitteln (Kettenbrüchen) bewiesen haben, da wir ja allgemein wissen, dass Konvergenten einer irrationalen Zahl gegen diese konvergieren.

Dass die Konvergenten der kleinen Goldene-Schnitt-Zahl die Quotienten der Fibonacci-Zahlen sind, dass also

$$\frac{p_k}{q_k} = \frac{F_k}{F_{k+1}}$$

kann man auch durch vollständige Induktion nach k , ohne Bezug auf die Rekursion (3.9) beweisen. Dass

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{1+1} = \frac{F_1}{F_2},$$

ist der Induktionsanfang. Aus der Darstellung

$$\frac{p_k}{q_k} = [1, 1, \dots, 1]$$

mit k Einsen folgt

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = \frac{1}{1 + \frac{p_k}{q_k}}$$

und unter Ausnutzung der Induktionsannahme

$$\frac{p_k}{q_k} = \frac{F_k}{F_{k+1}}$$

folgt hieraus

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = \frac{1}{1 + \frac{F_k}{F_{k+1}}} = \frac{F_{k+1}}{F_k + F_{k+1}}$$

und wegen $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ die gesuchte Aussage⁷.

Wir fassen zusammen:

Satz 3.21. *Für die endlichen Kettenbrüche mit lauter Einsen als Koeffizienten gilt*

$$[1] = \frac{1}{2}, [1, 1] = \frac{2}{3}, [1, 1, 1] = \frac{3}{5}, [1, 1, 1, 1] = \frac{5}{8}, \dots$$

allgemein für den Kettenbruch k -ter Ordnung

$$[1, 1, 1, \dots, 1] = \frac{F_k}{F_{k+1}}.$$

Klar dürfte sein, dass die Quotienten $\frac{F_k}{F_{k+1}}$ die rationalen Zahlen sind, deren Kettenbruch-Ordnung im Vergleich zu allen rationalen Zahlen mit einem Nenner $\leq F_{k+1}$ maximal ist. Bezogen auf den Euklidischen Algorithmus bedeutet dies, dass die Anzahl der Operationen, die den größten gemeinsamen Teiler zweier Zahlen liefert, für zwei aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen im Vergleich zu allen Zahlen, deren Nenner nicht größer ausfallen, maximal ist.

Der Satz 3.20 liefert jetzt sogar eine Abschätzung:

$$\frac{1}{3F_{k+1}^2} < \left| \varphi - \frac{F_k}{F_{k+1}} \right| < \frac{1}{F_{k+1}^2},$$

z.B. ist ($k = 5$)

$$\frac{1}{192} < \left| \varphi - \frac{5}{8} \right| < \frac{1}{64}.$$

Wenn wir wieder das dynamische System mit Rotationen betrachten, so bedeuten die Kettenbruchkoeffizienten Eins gerade, dass jeder Nennersschritt ein Wechselschritt ist.

Stellen Sie sich einmal vor, Sie wohnen auf S^1 am Ort $x = 0$. Jeder Iterationsschritt

$$x_{n+1} = R_\omega(x_n)$$

⁷Wo liegt der Induktionsschlüssel?

führt zu einem neuen Bewohner auf S^1 . Sie sind an Ihren im Laufe der Iteration auftauchenden nächsten (linken und rechten) Nachbarn interessiert. Ein Iterationsschritt dauere 1 Tag. Denken wir uns einmal den kontinuierlichen Vorgang, dass ein Hubschrauber mit konstanter Geschwindigkeit ω gegen den Uhrzeigersinn um S^1 kreist und jeden Tag einen neuen Kreisbürger abwirft (siehe auch die „Saatmaschine“). Sie registrieren insbesondere den Tag, an dem wieder ein neuer Nachbar bei Ihnen auftaucht. Sie wissen, dass diese neuen Nachbarn Ihnen immer weiter auf die Pelle rücken.

Was Sie dann registrieren, ist, dass im Abstand von q_k Tagen ein neuer Nachbar erscheint, dass der Hubschrauber Ihr Haus zwischen zwei Abwürfen p_k mal (fast) überflogen hat und dass a_{k+1} -mal der neue Nachbar auf der gleichen Seite von Ihnen auftaucht. Wenn dann das erste Mal der neue Nachbar die Seite wechselt, können Sie statt q_k den neuen Tages-Rhythmus q_{k+1} ansetzen und mit p_{k+1} die Anzahl der Hubschrauberpassagen zählen, bevor der nächste Nachbar auftaucht.

Das Verhältnis der Nachbar-Abstände

$$r_k := \frac{d_k}{d_{k-1}}$$

gibt an, um welchen Faktor sich der Abstand zu Ihrem Nachbarn verkleinert hat.

Für die kleine Goldene-Schnitt-Zahl $\omega := \varphi$ liegt eine besondere Situation vor: Nach jeweils F_k Tagen taucht ein neuer Nachbar auf, wobei der Hubschrauber den Kreis (fast) F_{k-1} -mal umrundet hat, immer abwechselnd ein rechter und ein linker Nachbar. Mehr noch: ϱ_k ist stets konstant gleich der kleinen Goldene-Schnitt-Zahl! D.h., der Kreisbogen von $x_0 = 0$ zum letzten Nachbarn wird durch einen neuen Nachbarn auf der gleichen Seite im Goldenen Schnitt geteilt!

Es gibt aber noch weitere Drehwinkel, die ebenso zu einer optimalen Packung führen, jedenfalls nach einer Einschwingphase. Man kann φ und ω **verwandt** nennen, wenn ω nur endlich viele Kettenbruchkoeffizienten besitzt, die $\neq 1$ sind. Solche mit φ verwandten Drehwinkel kommen auch für eine *asymptotisch* optimale Packung in Frage.

3.3.12 Spiralbildung bei Sonnenblumen

Bisher ist keine Begründung dafür gegeben worden, dass die Anzahl der rechts- bzw. linksläufigen Spiralen bei Sonnenblumen aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen sind. Das soll hier in sehr knapper Form nachgeholt werden.

Zunächst nehme ich an, dass das Wachstum der Blüten und späteren Samen von innen nach außen erfolgt und zwar so, dass (in Polarkoordinaten) ihre Winkel unverändert bleiben und durch die Dynamik $x_{k+1} = R_\omega(x_k), k = 0, 1, 2, \dots$ mit einem *Divergenzwinkel* ω gegeben sind, und dass die Abstände R_k des k -ten Samenplatzes zum Zentrum alleine von dem diskreten Zeitpunkt N abhängen, z.B. sei

$$R_k := r \cdot \sqrt{N - k}, k = 0, 1, 2, \dots, N$$

mit einem $r > 0$.

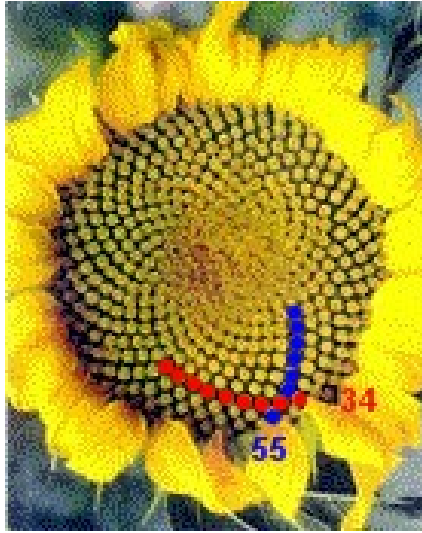


Abbildung 3.1: Spiralbildung bei der Sonnenblume

In Abb. 3.2 werden $N = 145$ Samenplätze mit dem Divergenzwinkel φ der kleinen Goldenen Schnittzahl auf diese Weise erzeugt. Sie enthält auch eine Nummerierung der Samenpunkte. Schaut man nur auf die Nummern (sie sind z.T. recht weit von den Punkten entfernt), so erkennt man 21 rechtsläufige und 34 linksläufige Spiralen. Der Grund ist einfach: Spiralen entstehen im Kopf, indem man benachbarte Punkte im Geiste verbindet. Diese Nachbarn haben nun Nummern, die sich um die beiden Fibonacci-Zahlen $F_8 = 21$ und $F_9 = 34$ unterscheiden. Das liegt daran, dass, wenn man die äußersten Punkte (etwa bis zur Nummer 34) auf eine Kreislinie projiziert, gerade $x_{k+1} = R_\omega(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots, 34$ erhält, wobei Nachbarschaft erhalten bleibt, wenn das radiale Wachstum langsam genug verläuft. Und hier wissen wir ja, dass Nachbar-Nummern sich nur um Fibonacci-Zahlen unterscheiden (man schaue nur die Nachbarn von $x_0 = 0$ an!). Projiziert wird hier nur bis zum Samen Nr.34, um die Spiralen-Nachbarschaft auf der Kreislinie zu erhalten. Je langsamer man das radiale Wachstum modelliert, desto höher sind die ins Spiel kommende Fibonacci-Zahlen!

3.3.13 Appetitliches über Kettenbrüche

Wie schön wäre es, wenn man Kettenbrüche einfach addieren und multiplizieren könnte! Dann hätten wir heute vielleicht kein Dezimalsystem.

Wir wissen, dass periodische Dezimalbrüche rationale Zahlen darstellen. Etwas Analoges kann für Kettenbrüche nicht gelten, da rationale Zahlen gerade den *endlichen* Kettenbrüchen entsprechen. Aber es gibt natürlich periodische Kettenbrüche, die wir analog wie bei den Dezimalbrüchen durch

$$[a_1, a_2, \dots, \overline{a_r, \dots, a_{r+p}}] = [a_1, a_2, \dots, a_r, a_{r+1}, \dots, a_{r+p}, a_r, a_{r+1}, \dots, a_{r+p}, \dots]$$

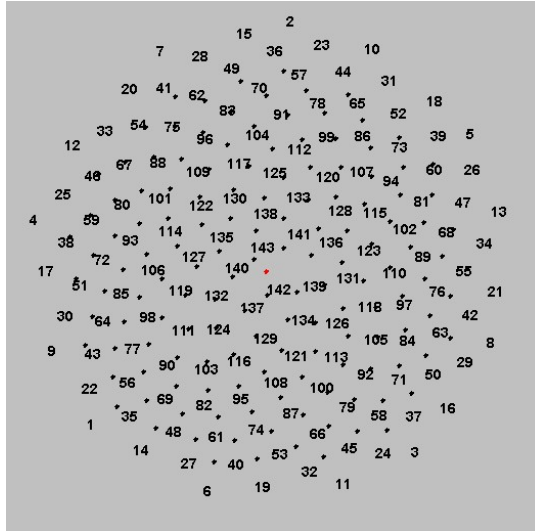


Abbildung 3.2: Spiralfbildung bei der Sonnenblume

bezeichnen und die in naheliegender Weise die *Periode* p besitzen.

Einen periodischen Kettenbruch der Periode 1 kennen Sie schon, nämlich $\varphi = [\overline{1}]$, die kleine Goldene-Schnitt-Zahl. Hier ist eine Bemerkung angebracht: Wir haben uns wegen der Rotationen auf Winkel $\omega \in (0, 1)$ beschränkt. Hätten wir beliebige positive Zahlen $x > 0$ zugelassen, hätten wir einen weiteren Kettenbruchkoeffizienten a_0 einführen müssen:

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_k + \dots}}}}$$

Für die große Goldene-Schnitt-Zahl Φ ist $a_0 = 1$, da $\Phi = \varphi + 1$, d.h., wir haben auch für diese eine wunderbare Kettenbruchdarstellung

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

Welche Zahl ist nun

$$x = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots + \frac{1}{2 + \dots}}}}?$$

Mit demselben Trick wie bei $[1, 1, 1, \dots]$ sehen wir, dass

$$\omega = \frac{1}{2 + \omega},$$

also $\omega^2 + 2\omega = 1$ bzw. $\omega = -1 + \sqrt{2}$ und

$$\sqrt{2} = 1 + [2, 2, 2, \dots].$$

Allgemein gilt

Satz 3.22. *Die periodischen Kettenbrüche sind gerade die positiven Lösungen quadratischer Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten.*

Beispiele:

- $\sqrt{5} = 2 + [\overline{4}]$
- $\sqrt{3} = 1 + [\overline{1, 2}]$
- $\sqrt{7} = 2 + [\overline{1, 1, 1, 4}]$
- $\sqrt{17} = 4 + [\overline{8}]$

3.4 Literatur

[Der Goldene Schnitt](#) (Mathematik-Portal Deutschland)

[Goldener Schnitt](#) (Wikipedia)

[Fibonacci Numbers and the Golden Section](#) (Surrey) (hervorragend!)

[Fibonacci Zahlen](#) (Michael Becker 2004): Vor allem zahlentheoretische Betrachtungen.

A. BEUTELSPACHER, B. PETRI: **Der Goldene Schnitt**, BI, 1989

O. PERRON: Die Lehre von den Kettenbrüchen, Teubner (1956)

A. KHINTCHINE: Kettenbrüche, Teubner (1958)