Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2016/17**

Hörsaalübungsaufgaben und Lösungen zu Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Aufgabe 1:

a) Man zeige, dass folgende Aussage eine Tautologie ist

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)\,.$$

b) Man beweise:
Für reelle Zahlen a, b mit $0 < a < b$ gilt die Ungleichung

$$\sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{b-a}\,,$$

(i) indirekt und

(ii) direkt.

Aufgabe 2:

Man stelle die folgenden Mengen durch Aufzählung ihrer Elemente dar

a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 9 < 0\}$,

b) $B = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \sqrt{4x+20} \le 6\right\}$,

c) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid -3 \le \ln x < 3\}\,$,

d) Man bilde die Mengen $A \cup B,\ A \cap C,\ C \setminus B,\ (C \setminus B) \cap A$.

Aufgabe 3:

Man beweise durch vollständige Induktion

a) für $q \neq 1$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$,

b) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\displaystyle\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \geq \frac{1}{n+1}$,

c) $a_n := 11^{n+1} + 12^{2n-1}$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 133 teilbar.

Aufgabe 4:

a) Für die Binomialkoeffizienten mit $n, m \in \mathbb{N}$ und $m \leq n$ weise man folgende Beziehungen nach:

$$\binom{n}{m} \cdot \frac{n+1}{m+1} = \binom{n+1}{m+1} .$$

b) Man bestimme für die Zahlen 96135 und 84854 die Primfaktorzerlegung, den ggT und das kgV.

c) Man wandle die rationale Zahl r mit der periodischen Zifferndarstelllung $r = 4.\overline{321}$ um in einen Bruch.

d) Man beweise indirekt, dass $\sqrt{14}$ irrational ist.

Aufgabe 5:

Für folgende Funktionen f berechne man alle $x \in \mathbb{R}$ für die $f(x) \geq 0$ gilt und zeichne die zugehörigen Funktionsgraphen

a) $f(x) = 1 - 2||x-2| - 1|$,

b) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$.

Aufgabe 6:

a) Für die Funktion f mit

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 13x$$

zeichne man den Funktionsgraphen und berechne alle Nullstellen $x \in \mathbb{C}$.

b) Man berechne die folgenden Ausdrücke und gebe sie in kartesischer Darstellung an

(i) $z_1 = 3 - 4i - (5 + 6i)$,

(ii) $z_2 = 3i^7 - 2i^5 + 6i^4 + 5i^2 + 4$,

(iii) $z_3 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$,

(iv) $z_4 = (3 - 4i)(5 + 6i)$,

(v) $z_5 = \frac{3 - 4i}{5 + 6i}$.

Aufgabe 7:

a) Mit Hilfe der Eulerschen Formel und unter Verwendung von $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ bestätige man die Gültigkeit der Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \cos 3x &= 4\cos^3 x - 3\cos x \, , \\ \sin 3x &= 3\sin x - 4\sin^3 x \, . \end{aligned}$$

b) Gegeben seien die komplexen Zahlen

$$z_1 = 1 + i \, , \quad z_2 = -1 + i \, , \quad z_3 = i \, .$$

(i) Man berechne

$$\bar{z}_1 + z_2 \, , \quad \mathrm{Re}\,(\bar{z}_2 + 3z_3) \, , \quad \mathrm{Im}\,(2z_1 + z_2) \, , \quad |z_1 + z_3| \, .$$

(ii) Man bestimme die Polarkoordinatendarstellung von

$$z_1 \, , \quad z_2 \, , \quad z_3 \, , \quad \bar{z}_1^6 \, , \quad z_2^{12} \, , \quad \frac{\bar{z}_1^6 z_3}{z_2^{12}} \, .$$

Aufgabe 8:

a) Für die Funktion

$$f :]-\infty, c] \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad y = f(x) := x^2 + 8x + 15$$

bestimme man die größte Zahl c, so dass f eine Umkehrfunktion f^{-1} besitzt. Man berechne die Umkehrfunktion, gebe deren Definitions- und Wertebereich an und zeichne den Funktionsgraphen von f^{-1}.

b) Man entscheide, welche der folgenden Funktionen injektiv, surjektiv und bijektiv sind und zeichne die zugehörigen Funktionsgraphen:

(i) $f_1 : [-5, 5] \to [-2, 2]$, $f_1(x) = 1 - |2 - |x||$,

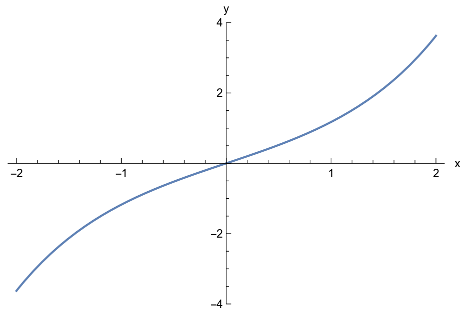
(ii) $f_2 : [0, 1] \to [0, 2]$, $f_2(x) = x^4$,

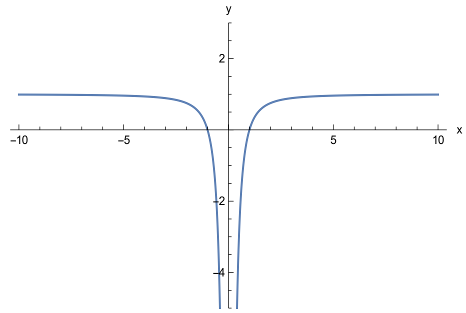
(iii) $f_3 : [0, \pi/2] \to [0, 1/2]$, $f_3(x) = \sin x \cos x$,

(iv) $f_4 : \mathbb{R} \to]0, \infty[$, $f_4(x) = e^x$.

Aufgabe 9:

Zu den Abbildungsvorschriften $f(x)$ und $g(x)$ seien die folgenden Funktionsgraphen gegeben:





$f(x) = ?$ $\qquad$ $g(x) = ?.$

a) Man begründe, welche der Abbildungsvorschriften

$$f_1(x) = x + x^3 \,, \quad f_2(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \,, \quad f_3(x) = \sinh x \,, \quad f_4(x) = \ln(|x|)$$

mit $f(x)$ und welche mit $g(x)$ übereinstimmt.

b) Man untersuche, ob es sich bei f und g um gerade, ungerade oder beschränkte Funktionen handelt.

c) Anhand der Funktionsgraphen von f und g gebe man die Bereiche an, in denen die Funktion monoton wächst oder fällt und konkav oder konvex (von unten) ist.

Aufgabe 10:

a) Man vereinfache die folgende Abbildungsvorschrift

$$f(x) = \ln \frac{x^2 + 4x + 4}{x} - \ln(x + 2) + \ln(x) \,.$$

b) Für die unecht gebrochen rationale Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 3x - 31}{x^2 + 6x + 11} \,.$$

spalte man den polynomialen Anteil durch Polynomdivision ab.

c) Für das Polynom

$$p_3(x) = x^3 - 3x^2 - 33x + 35$$

bestimme man die Linearfaktorzerlegung unter Verwendung der Methode der Polynomdivision.

Aufgabe 11:

a) Unter Verwendung der Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen, zeige man, dass für $t = \tan\frac{x}{2}$ gilt
$$\cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1}\,.$$

b) Mit Hilfe der Definitionen von sinh und cosh weise man die Gültigkeit des folgenden Additionstheorems nach
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1\,.$$

c) Die Funktion $y = \cosh(x)$ besitzt für $x \in [0, \infty[$ eine Umkehrfunktion. Diese wird mit $\operatorname{arcosh}(y)$ bezeichnet. Man zeige, dass gilt
$$\operatorname{arcosh}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2-1}).$$

Aufgabe 12:

Man untersuche die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls die Grenzwerte

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{3-n+2n^2}{6n^2+1}\,, & b_n &= \left(\frac{3n^2+1}{2n^2-n-7}\right)^3\,,\\
c_n &= \sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}\,, & d_n &= \frac{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{4n^2+3}}{n}\,,\\
e_n &= \left(1-\frac{2}{3n}\right)^{17n}\,, & f_n &= \frac{2^{n+1}+3^n}{3^{n+1}+2^n}\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 13:

Man untersuche die folgenden rekursiv definierten Folgen auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert:

a) $a_1 = 0\,,\quad a_{n+1} = 1 - \frac{a_n}{3}\,,$

b) $b_1 = \frac{1}{2},\ b_{n+1} = \frac{b_n^2+3}{4}\,,$

c) $c_1 = 1,\ c_{n+1} = 2c_n + 1\,,$

d) $d_1 = 3\,,\quad d_{n+1} = \sqrt{3d_n - 2}\,.$

Aufgabe 14:

a) Man bestimme für folgende Mengen die Menge aller Häufungspunkte M' und aller inneren Punkte M^0, und kläre, ob die Menge abgeschlossen oder offen ist.

$$\begin{aligned} M_1 &= (]-3,5] \cap]2,8]) \cup \left\{ a_n \in \mathbb{R} \mid a_n = \frac{1}{n} \ , \ n \in \mathbb{N} \right\} , \\ M_2 &= \{0\} \ \cup \ [3,4] \cup \left\{ a_n \in \mathbb{R} \mid a_n = 1 + \frac{1}{2n} \ , \ n \in \mathbb{N} \right\} , \\ M_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ \middle| \ 0 < y < |x| < 1 \right\} . \end{aligned}$$

b) Man berechne die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren

(i) $\displaystyle\lim_{x \to \pi/2} \cos x \tan x \ ,$

(ii) $\displaystyle\lim_{x \to 1+} \frac{x+1}{\sqrt{x-1}} \ ,$

(iii) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} (2 - \cosh x + \sinh x) \ .$

Aufgabe 15:

Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Abbildungsvorschrift

$$f(x) = x^4 + \frac{113}{44}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - \frac{113}{22}x + 1$$

berechne man mit Hilfe des Intervallhalbierungsverfahrens Näherungen $\tilde{x}$ für alle Nullstellen x^* bis auf einen absoluten Fehler von $|\tilde{x} - x^*| \leq 0.001$.

Aufgabe 16:

a) Für die Funktionen mit den Abbildungsvorschriften

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2+1 & , \quad x \neq 0 \\ 2 & , \quad x_0 = 0 \end{cases} \quad , \quad f_2(x) = \begin{cases} 3 & , \quad x \leq 1 = x_0 \\ e^x & , \quad 1 < x \end{cases} \quad ,$$

$$f_3(x) = \frac{x^2 - 2x - 15}{x - 5} \ , \ x_0 = 5 \quad , \quad f_4(x) = \begin{cases} 2x/\pi & , \quad x \leq \pi/2 = x_0 \\ \sin x & , \quad \pi/2 < x \end{cases}$$

zeichne man die Funktionsgraphen und berechne in x_0 links- und/oder rechtsseitige Grenzwerte und überprüfe damit, ob Stetigkeit oder stetige Ergänzbarkeit in x_0 vorliegt oder sich eine Unstetigkeit in x_0 beheben lässt.

b) Für die Funktion g mit

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - a & , \quad x < 1 \\ \ln x & , \quad 1 \leq x \end{cases}$$

bestimme man, falls dies möglich ist, $a \in \mathbb{R}$, so dass f in $x_0 = 1$ stetig wird.

Aufgabe 17:

a) Man berechne die für alle $x \in \mathbb{R}$ stetige Funktion, für die gilt

$$\begin{array}{rcll} f(0) & = & 0 & , \\ f'(x) & = & -2 & \text{für} \quad -\infty < x < -1 \, , \\ f'(x) & = & 2x & \text{für} \quad -1 < x < 2 \, , \\ f'(x) & = & 1 & \text{für} \quad 2 < x < \infty \end{array}$$

und zeichne die Funktion. Ist f auch differenzierbar?

b) Für die Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} ax + b \, , & x < 1 \\ \ln x \, , & 1 \leq x \end{cases}$$

bestimme man $a, b \in \mathbb{R}$, sodass f in $x_0 = 1$ stetig differenzierbar wird und zeichne f.

c) Man berechne die Tangentengleichung zu $f(x) = \cos x$ im Punkt $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ und fertige eine Zeichnung an.

Aufgabe 18:

a) Man berechne die erste Ableitung der folgenden Funktionen

$$\text{i) } f(x) = \frac{x + \sin x \cos x}{2} \, , \qquad \text{ii) } g(x) = (2x+1)^{\sin x} \, .$$

b) Man berechne die ersten beiden Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$\text{i) } h(x) = \frac{x+2}{x^3+8} \, , \qquad \text{ii) } k(x) = \ln(x^2 - 1) \, .$$

c) Man berechne die ersten drei Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$\text{i) } u(x) = 2(1-3x)^2 + 4(5x-2) - 7 \, , \qquad \text{ii) } v(x) = \sqrt[3]{(5x+1)^2} \, .$$

Aufgabe 19:

a) Gegeben sie die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x^3 - x - \frac{4}{5} + \cos x \,. \end{aligned}$$

(i) Man zeige mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass die Funktion f mindestens drei Nullstellen besitzt.

(ii) Man zeige mit Hilfe des Satzes von Rolle, dass f höchstens drei und damit dann genau zwei Nullstellen besitzt.

(iii) Man berechne die drei Nullstellen x^* mit Hilfe des Bisektionsverfahrens aus Aufgabe 15 bis auf einen absoluten Fehler von $|\tilde{x} - x^*| \leq 10^{-10}$.

b) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \leq 0 \,, \\ x^2 & \text{für} \quad 0 < x \,. \end{cases}$$

(i) Man berechne $f'(x)$ und $f''(x)$.

(ii) Ist der Mittelwertsatz

$$g'(x_0) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} \quad \text{mit} \quad x_0 \in]a, b[$$

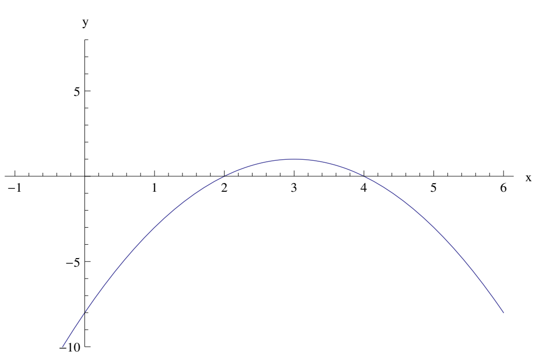
für $a = -1$ und $b = 1$ auf $f(x)$ und $f'(x)$ anwendbar?
Man bestimme gegebenenfalls die Zwischenstelle(n) x_0.

Aufgabe 20:

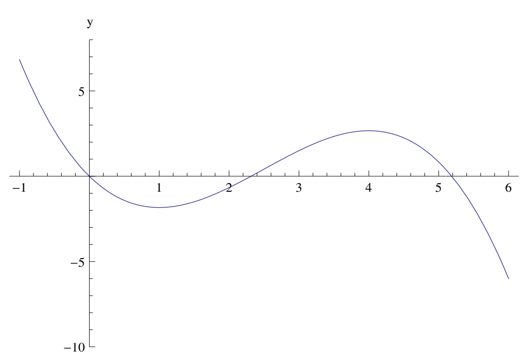
a) Man berechne die folgenden Grenzwerte

$$\text{(i)} \lim_{x \to 0} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1}{x^2} \,, \quad \text{(ii)} \lim_{x \to 0} \frac{3}{x} - \frac{6}{e^{2x} - 1} \,.$$

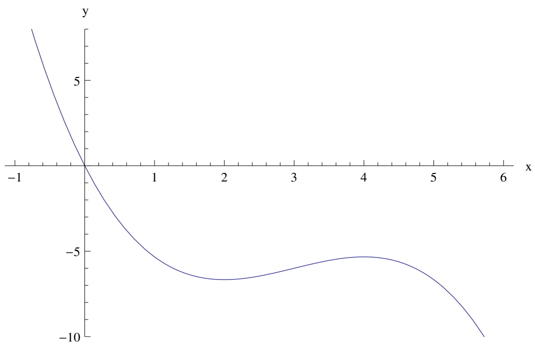
b) Nur die Ableitung $g'(x) = -x^2 + 6x - 8$ ist von der reellwertigen Funktion g bekannt. Man gebe die Monotoniebereiche von g an und klassifiziere alle Extremwerte. Anschließend begründe man, welcher der unten angegebenen Funktionsgraphen g_i mit dem von g übereinstimmt.



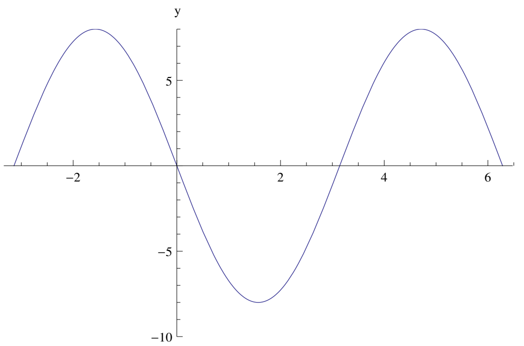
Funktion g_1



Funktion g_2



Funktion g_3



Funktion g_4

Aufgabe 21:

a) Für das Polynom $p_2(x) = 5x^2 - 16x + 6$ berechne man das Taylor-Polynom $T_2(x)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 3$ unter Verwendung

   (i) des Horner-Schemas und

   (ii) der Ableitungsregeln für die Koeffizienten.

b) Man berechne das Taylor-Polynom vom Grad 3 für die durch

$$f(x) = e^{(x-\pi/2)} \sin x$$

gegebene Funktion zum Entwicklungspunkt $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ und schätze den maximalen Approximationsfehler $|f(x) - T_3(x)|$ für $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ mit Hilfe der Restgliedformel von Lagrange nach oben ab.

Aufgabe 22:

a) Für die durch $f(x) = (x-1)^2\sqrt{x}$ gegebene Funktion gebe man im maximalen Definitionsbereich das Monotonieverhalten an, bestimme und klassifiziere alle Extremwerte und zeichne den Funktionsgraphen von f.

b) Man bestimme für die durch

$$g(x) = x^4 - 2x^3 + 2x$$

gegebene Funktion im Intervall $[-4, 4]$ alle Wendepunkte und die Bereiche in denen g konvex bzw. konkav ist und zeichne den Funktionsgraphen von g.

Aufgabe 23:

Gegeben sei die durch $\Phi(x) = e^{-x^2}$ definierte Funktion.

a) Man zeige, dass Φ genau einen Fixpunkt x^* besitzt.

b) Man gebe ein Intervall D an, in dem die Fixpunktiteration

$$x_{k+1} = \Phi(x_k)\ , \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

für jeden Startwert $x_0 \in D$ auf Grund des Fixpunktsatzes gegen x^* konvergiert.

Wieviele Iterationsschritte n werden nach der a priori-Abschätzung für eine Genauigkeit von $|x_n - x^*| < 10^{-3}$ höchstens benötigt?

c) Man berechne den Fixpunkt mit einem absoluten Fehler von $|x_n - x^*| < 10^{-3}$.

Aufgabe 24:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x(2 - x)\ ,$$

sowie die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die sich aus dem Newton-Verfahren zur Nullstellenberechnung von f mittels Startwert $x_0 \le 0$ ergibt.

a) Man zeige, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine Nullstelle x^* konvergiert und berechne diese.

b) Man zeige, dass die Folge (lokal) quadratisch konvergiert, d.h. es gibt eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit

$$|x_{n+1} - x^*| \le c|x_n - x^*|^2\ .$$

Lösung 1:

a)

A	B	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

b) Voraussetzung Aussage A: Gegeben seien $a, b > 0$ mit $a < b$.

Behauptung Aussage B:

$\forall\, a, b$, mit A, gilt $\sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{b-a}$.

(i) indirekter Beweis:

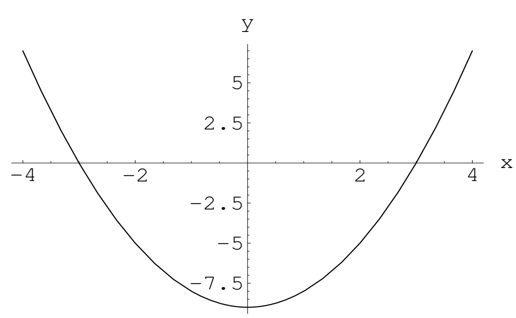
$$
\begin{aligned}
\neg B:&\quad \exists\, a,b \text{ mit A} : \sqrt{b} - \sqrt{a} \geq \sqrt{b-a}\\
\Rightarrow&\quad \exists\, a,b \text{ mit A} : b + a - 2\sqrt{ab} \geq b - a\\
\Rightarrow&\quad \exists\, a,b \text{ mit A} : a \geq \sqrt{ab}\\
\Rightarrow&\quad \exists\, a,b \text{ mit A} : a^2 \geq ab\\
\Rightarrow&\quad \exists\, a,b \text{ mit A} : a \geq b \ : \neg \text{A}
\end{aligned}
$$

(ii) direkter Beweis:

$$
\begin{aligned}
A:&\quad 0 < a < b\\
\Rightarrow&\quad \sqrt{a} < \sqrt{b}\\
\Rightarrow&\quad \sqrt{a}\sqrt{a} < \sqrt{a}\sqrt{b}\\
\Rightarrow&\quad 2a < 2\sqrt{ab}\\
\Rightarrow&\quad b + a - 2\sqrt{ab} < b - a\\
\Rightarrow&\quad (\underbrace{\sqrt{b} - \sqrt{a}}_{>0})^2 < \underbrace{b-a}_{>0}\\
\Rightarrow&\quad \sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{b-a} \quad : B.
\end{aligned}
$$

Lösung 2:

a)



$f(x) = x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$

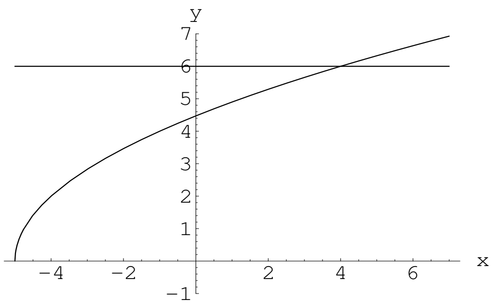
$x^2 - 9 = (x+3)(x-3) = 0$

$\Rightarrow$ Nullstellen $x_1 = -3, x_2 = 3$

$\Rightarrow$ $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

b)

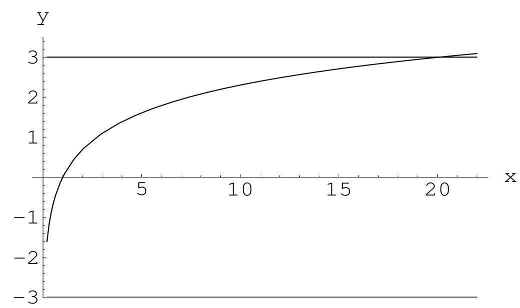
$4x + 20 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \geq -5$ und
$\sqrt{4x+20} \leq 6 \;\Rightarrow\; 4x + 20 \leq 36$
$\Rightarrow\; x \leq 4 \;\Rightarrow$
$B = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$



$f(x) = \sqrt{4x+20}$

c)

Da der ln streng monoton wächst, erhält man
$\ln 20 \approx 2.9958 < 3 < \ln 21 \approx 3.045 \;\Rightarrow$
$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots 19, 20\}$.



$f(x) = \ln x$

d) $A \cup B = B\,,\quad A \cap C \;=\; \{1, 2\}\,,\quad C \setminus B = \{5, 6, \cdots 19, 20\}\,,\quad (C \setminus B) \cap A = \emptyset$

Lösung 3:

a) Beweis über vollständige Induktion:

$$\begin{aligned}
n = 0: \quad \sum_{k=0}^{0} q^k &= q^0 = 1 = \frac{1-q}{1-q}\,,\\
n \to n+1: \quad \sum_{k=0}^{n+1} q^k &= \left(\sum_{k=0}^{n} q^k\right) + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1}\\
&= \frac{1-q^{n+1}+(1-q)q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}\,,
\end{aligned}$$

b) Beweis über vollständige Induktion:

$$n = 1: \quad \frac{1}{2} \;\geq\; \frac{1}{1+1}$$

$$\begin{aligned}
n \to n+1: \quad & \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2(n+1)-1}{2(n+1)}\\
\geq\;& \frac{n+2}{n+2}\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}\\
=\;& \frac{1}{n+2}\cdot\frac{2n^2+5n+2}{2n^2+4n+2}\\
>\;& \frac{1}{n+2}
\end{aligned}$$

c) Mit $a_n := 11^{n+1} + 12^{2n-1}$ gilt $11^{n+1} = a_n - 12^{2n-1}$.

Beweis über vollständige Induktion:

$$\begin{aligned} n=1: \quad a_1 &= 11^2 + 12 = 133 \quad \text{ist durch 133 teilbar,} \\ n \to n+1: \quad a_{n+1} &= 11^{n+2} + 12^{2n+1} = 11 \cdot 11^{n+1} + 12^{2n+1} \\ &= 11(a_n - 12^{2n-1}) + 12^2 \cdot 12^{2n-1} \\ &= 11a_n + 12^{2n-1}(12^2 - 11) \\ &= 11a_n + 133 \cdot 12^{2n-1} \quad \text{ist durch 133 teilbar.} \end{aligned}$$

Lösung 4:

a)
$$\begin{aligned} \binom{n}{m} \cdot \frac{n+1}{m+1} &= \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{n+1}{m+1} \\ &= \frac{(n+1)!}{(m+1)!(n+1-(m+1))!} = \binom{n+1}{m+1} \end{aligned}$$

b) Primfaktorzerlegung

$96135 = 3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 29, \quad 84854 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 29$

$\text{ggT}(96135, 84854) = 29$,

$\text{kgV}(96135, 84854) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 29 = 281291010$.

c) $1000r - r = 4321.\overline{321} - 4.\overline{321} = 4317 \;\Rightarrow\; r = \dfrac{4317}{999} = \dfrac{1439}{333}$

d) Behauptung: B: $\sqrt{14}$ ist irrational.

$\neg B$: $\sqrt{14}$ ist rational

$\Rightarrow$ $\exists\, m, n \in \mathbb{N}$ teilerfremd (man beachte: $\sqrt{14} > 0$): $\sqrt{14} = \dfrac{m}{n}$

$\Rightarrow$ $2 \cdot 7 = 14 = \dfrac{m^2}{n^2}$ (quadrieren)

$\Rightarrow$ $2 \cdot 7 \cdot n^2 = m^2$

$\Rightarrow$ m^2 ist gerade und damit auch m, also $m = 2k$

$\Rightarrow$ $2 \cdot 7 \cdot n^2 = m^2 = (2k)^2 \;\Rightarrow\; 7 \cdot n^2 = 2k^2$

$\Rightarrow$ n^2 ist gerade und damit auch n

Widerspruch zur Teilerfremdheit von n, m

$\Rightarrow$ $\neg B$ ist falsch

$\Rightarrow$ B ist richtig

Lösung 5:

a) Fallunterscheidungen für die in $f(x) = 1 - 2||x-2|-1|$ auftretenden Beträge:

(i) $x - 2 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \geq 2:$
$f(x) = 1 - 2|x-2-1| = 1 - 2|x-3|$

i. $x - 3 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \geq 3:$
$f(x) = 1 - 2(x-3) = 7 - 2x \geq 0 \;\Rightarrow\; x \leq 3.5 \;\Rightarrow\; x \in [3, 3.5]$

ii. $x - 3 < 0 \;\Leftrightarrow\; x < 3:$
$f(x) = 1 + 2(x-3) = 2x - 5 \geq 0 \;\Rightarrow\; x \geq 2.5 \;\Rightarrow\; x \in [2.5, 3[$

(ii) $x - 2 < 0 \;\Leftrightarrow\; x < 2:$
$f(x) = 1 - 2|-(x-2)-1| = 1 - 2|1-x|$

i. $1 - x \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \leq 1:$
$f(x) = 1 - 2(1-x) = 2x - 1 \geq 0 \;\Rightarrow\; x \geq 0.5 \;\Rightarrow\; x \in [0.5, 1]$

ii. $1 - x < 0 \;\Leftrightarrow\; x > 1:$
$f(x) = 1 + 2(1-x) = 3 - 2x \geq 0 \;\Rightarrow\; x \leq 1.5 \;\Rightarrow\; x \in]1, 1.5]$

Die Lösungsmenge lautet $\;\mathbb{L} = [0.5, 1.5] \cup [2.5, 3.5]$.

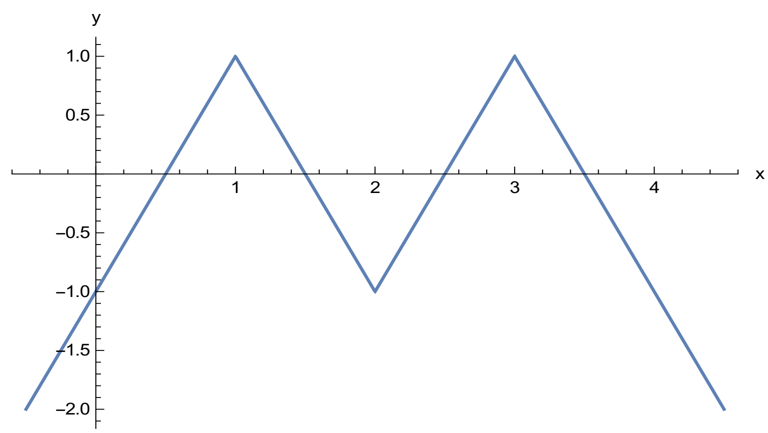


Bild 5 a) $\quad f(x) = 1 - 2||x-2|-1|$

b) Berechnung der Nullstellen für die biquadratische Funktion $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ über die p, q-Formel für $z^2 + pz + q = 0$ mit $z := x^2$:

$$x_{1,2,3,4}^2 = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4} = \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2} \;\Rightarrow\; x_{1,4}^2 = 4 \;\vee\; x_{2,3}^2 = 1\,.$$

Man erhält die Nullstellen: $x_1 = -2\,,\; x_2 = -1\,,\; x_3 = 1\,,\; x_4 = 2$.

Zwischen den Nullstellen besitzt

$$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4 = (x+2)(x+1)(x-1)(x-2)$$

einheitliches positives oder negatives Vorzeichen. Dieses lässt sich bestimmen durch das Vorzeichenverhalten der vier Linearfaktoren

	$(x+2)$	$(x+1)$	$(x-1)$	$(x-2)$	$f(x)$
$x<-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$-2<x<-1$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$
$-1<x<1$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
$1<x<2$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$
$2<x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

Die Lösungsmenge lautet: $\text{Ł} =]-\infty, -2] \cup [-1, 1] \cup [2, \infty[\,.$

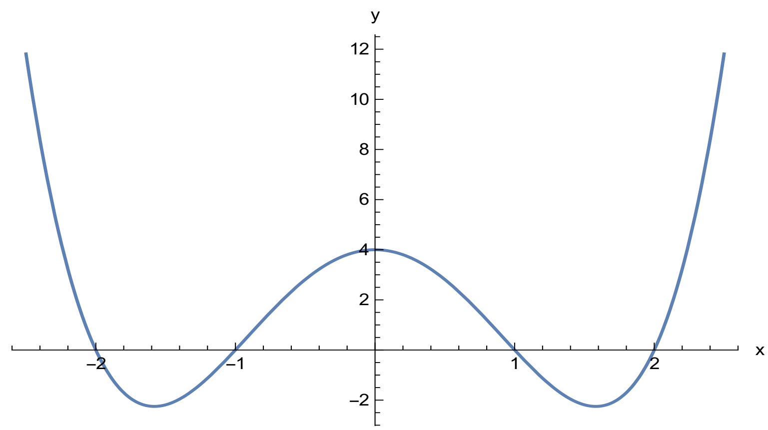


Bild 5 b) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

Lösung 6:

a) Ausklammern ergibt: $f(x) = x^3 - 4x^2 + 13x = x(x^2 - 4x + 13)$.

Eine Nullstelle lautet $x_1 = 0$.

Die übrigen erhält man durch quadratische Ergänzung

$0 = x^2 - 4x + 13 = (x-2)^2 + 9$

$\Rightarrow\ (x-2)^2 = -9\ \Rightarrow\ x - 2 = \pm 3i\ \Rightarrow\ x_2 = 2 + 3i\,,\ x_3 = 2 - 3i$

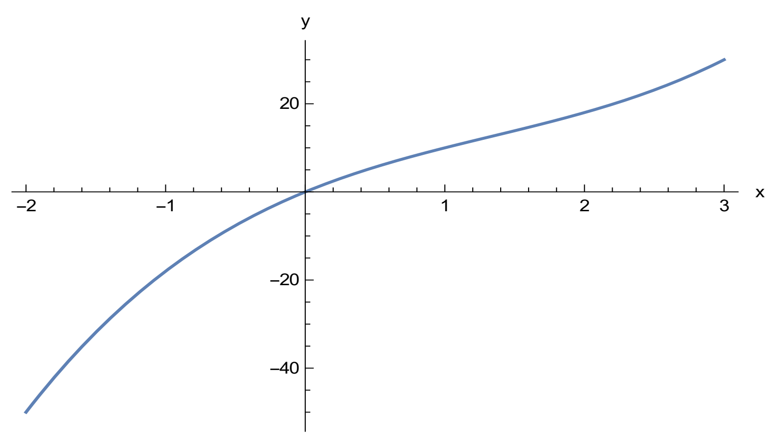


Bild 6 $f(x) = x^3 - 4x^2 + 13x$

b) (i) $z_1 = 3 - 4i - (5 + 6i) = -2 - 10i$,

(ii) $z_2 = 3i^7 - 2i^5 + 6i^4 + 5i^2 + 4 = -3i - 2i + 6 - 5 + 4 = 5 - 5i$,

(iii) $z_3 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

(iv) $z_4 = (3 - 4i)(5 + 6i) = 15 + 18i - 20i + 24 = 39 - 2i$,

(v) $z_5 = \frac{3 - 4i}{5 + 6i} = \frac{(3 - 4i)(5 - 6i)}{(5 + 6i)(5 - 6i)} = \frac{15 - 18i - 20i - 24}{61} = -\frac{9}{61} - i\frac{38}{61}$.

Lösung 7:

a) Mit der Eulerschen Formel $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ erhält man

$$\begin{aligned}
\cos 3x + i\sin 3x &= e^{i3x} = \left(e^{ix}\right)^3 = (\cos x + i\sin x)^3 \\
&= \cos^3 x + 3i\cos^2 x\sin x - 3\cos x\sin^2 x - i\sin^3 x \\
&= \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x + i(3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x) .
\end{aligned}$$

Mit einem Koeffizientenvergleich und $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\cos 3x &= \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x \\
&= \cos^3 x - 3\cos x(1 - \cos^2 x) \\
&= 4\cos^3 x - 3\cos x ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin 3x &= 3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x \\
&= 3(1 - \sin^2 x)\sin x - \sin^3 x \\
&= 3\sin x - 4\sin^3 x .
\end{aligned}$$

b) (i) $\bar{z}_1 + z_2 = 1 - i - 1 + i = 0$,

$\mathrm{Re}\,(\bar{z}_2 + 3z_3) = \mathrm{Re}\,(-1 - i + 3i) = \mathrm{Re}\,(-1 + 2i) = -1$,

$\mathrm{Im}\,(2z_1 + z_2) = \mathrm{Im}\,(2 + 2i - 1 + i) = \mathrm{Im}\,(1 + 3i) = 3$,

$|z_1 + z_3| = |1 + i + i| = |1 + 2i| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

(ii) Polarkoordinatendarstellung: $z = re^{i\varphi}$ mit $r > 0$ und $-\pi < \varphi \le \pi$

$z_1 = 1 + i :\quad r = |z_1| = \sqrt{2} ,\quad \varphi = \arctan\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4} \quad\Rightarrow\quad z_1 = \sqrt{2}e^{\pi i/4}$

$z_2 = -1 + i :\ r = |z_2| = \sqrt{2} ,\ \varphi = \pi + \arctan\frac{1}{-1} = \pi - \frac{\pi}{4} \ \Rightarrow\ z_2 = \sqrt{2}e^{3\pi i/4}$

$z_3 = i :\quad r = |z_3| = 1 ,\quad \varphi = \frac{\pi}{2} \quad\Rightarrow\quad z_3 = e^{\pi i/2}$

$$\bar{z}_1^6 = \left(\sqrt{2}e^{-\pi i/4}\right)^6 = 2^3 e^{-6\pi i/4} = 2^3 e^{-3\pi i/2} = 2^3 e^{\pi i/2}$$

$$z_2^{12} = \left(\sqrt{2}e^{3\pi i/4}\right)^{12} = 2^6 e^{9\pi i} = 2^6 e^{\pi i}$$

$$\frac{\bar{z}_1^6 z_3}{z_2^{12}} = \frac{2^3 e^{\pi i/2} e^{\pi i/2}}{2^6 e^{\pi i}} = \frac{2^3 e^{\pi i/2+\pi i/2}}{2^6 e^{\pi i}} = \frac{e^{\pi i}}{2^3 e^{\pi i}} = \frac{1}{8}\,.$$

Lösung 8:

a) Mit quadratischer Ergänzung erhält man die Scheitelpunktform von f

$$f(x) = x^2 + 8x + 15 = (x+4)^2 - 1$$

mit dem Scheitelpunkt $S = (x_s, f(x_s)) = (-4, -1)$.

Damit ist $]-\infty, c] =]-\infty, x_s] =]-\infty, -4]$ das größte Intervall in dem f invertierbar ist.

Berechnung der Umkehrfunktion

$$y = (x+4)^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad x = -4 \pm \sqrt{y+1} \le -4 \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(y) = -4 - \sqrt{y+1}\,.$$

Definitionsbereich $D_{f^{-1}} = [-1, \infty[$, Wertebereich $W_{f^{-1}} =]-\infty, -4]$.

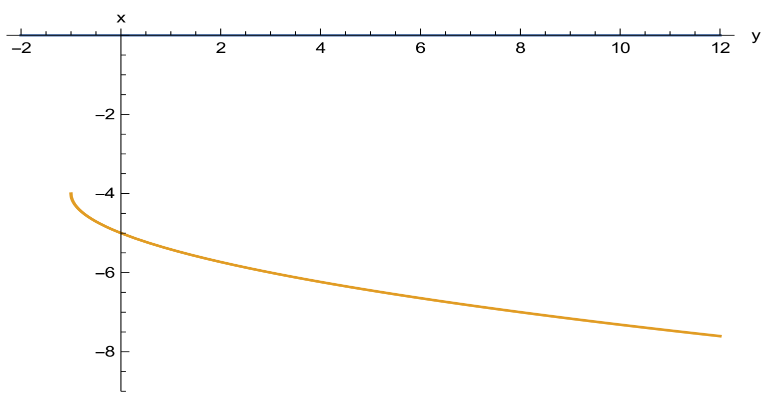


Bild 8.1 $f^{-1}(y) = -4 - \sqrt{y+1}$

b) (i) f_1 ist weder injektiv noch surjektiv

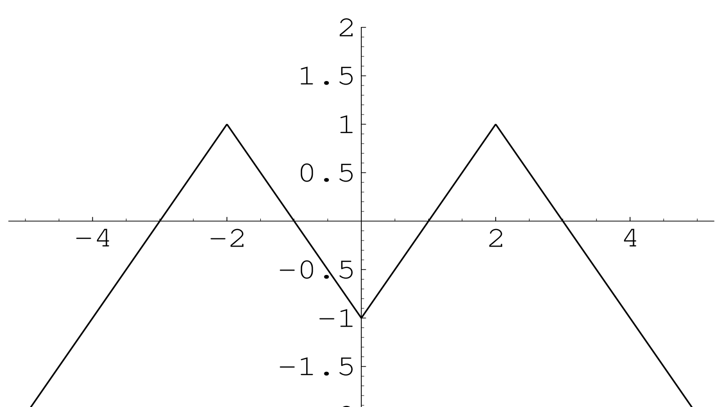


Bild 8.2 $f_1(x) = 1 - |2 - |x||$

(ii) f_2 ist injektiv aber nicht surjektiv

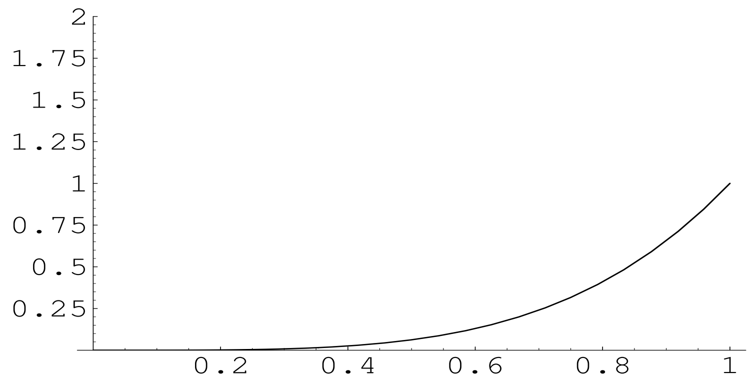


Bild 8.3 $f_2(x) = x^4$

(iii) f_3 ist surjektiv aber nicht injektiv

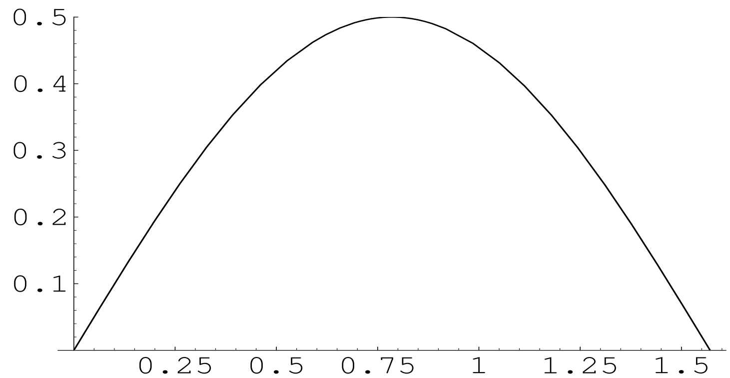


Bild 8.4 $f_3(x) = \sin x \cos x = \dfrac{1}{2} \sin 2x$

(iv) f_4 ist bijektiv

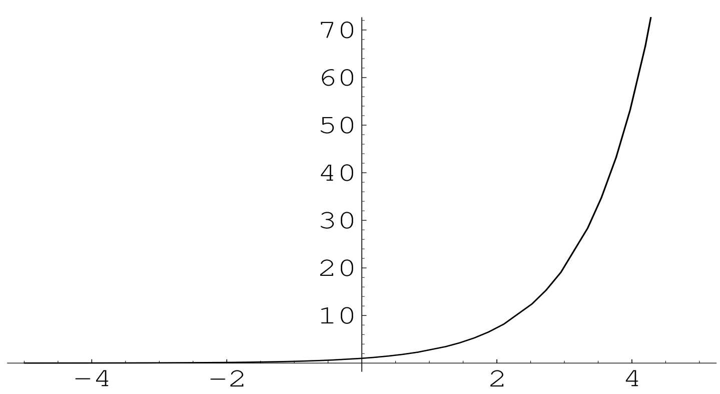
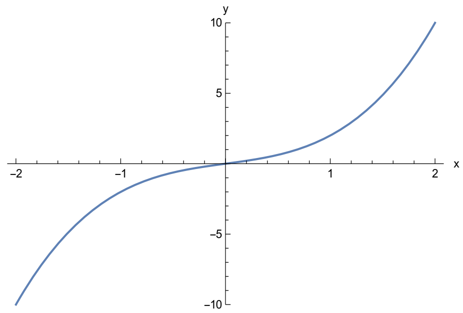
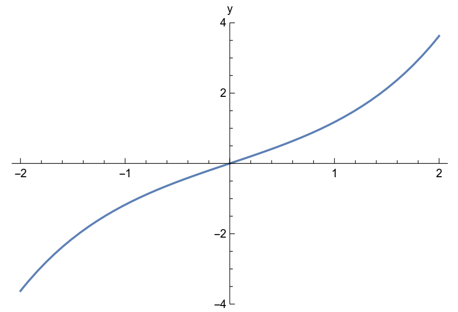


Bild 8.5 $f_4(x) = e^x$

Lösung 9:

a) Aus dem Funktionsgraph von $f(x)$ folgt, dass f ungerade ist.



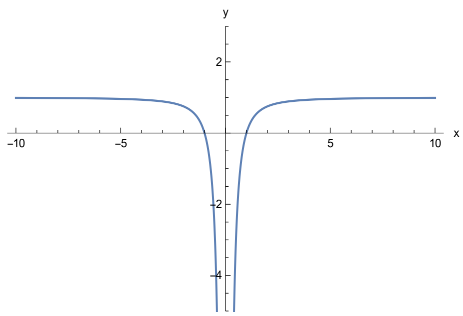


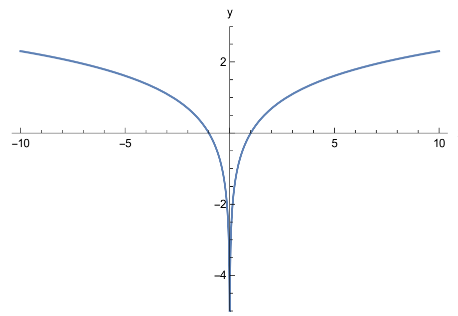
$f_1(x) = x + x^3$ $\qquad$ $f(x) = f_3(x) = \sinh x.$

Damit kommen nur die ungeraden Funktionen f_1 und f_3 in Frage.

Es gilt $f_1(2) = 10 > f(2)$. Damit muss $f(x) = f_3(x) = \sinh x$ gelten.

Aus dem Funktionsgraph von $g(x)$ folgt, dass g gerade ist.





$g(x) = f_2(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$ $\qquad$ $f_4(x) = \ln(|x|)$

Damit kommen nur die geraden Funktionen f_2 und f_4 in Frage.

Es gilt $f_4(5) > 1 > g(5)$. Damit muss $g(x) = f_2(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$ gelten.

b) f ist unbeschränkt.

f ist im Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$ ungerade,

denn dort gilt

$$f(-x) = \sinh(-x) = \frac{1}{2}\left(e^{-x} - e^{-(-x)}\right) = -\frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) = -f(x).$$

g ist im Definitionsbereich $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ nach oben beschränkt:

$$g(x) = 1 - \frac{1}{x^2} < 1.$$

g ist in D gerade, denn es gilt $g(-x) = 1 - \dfrac{1}{(-x)^2} = 1 - \dfrac{1}{x^2} = g(x)$.

c) Für alle $x \in \mathbb{R}$ wächst f streng monoton.

In $]-\infty, 0]$ ist f streng konkav von unten und in $[0,\infty[$ streng konvex von unten.

Im Intervall $]-\infty,0[$ fällt g streng monoton und ist streng konkav von unten.
Im Intervall $]0,\infty[$ wächst g streng monoton und ist streng konkav von unten.

Lösung 10:

a)
$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\frac{x^2+4x+4}{x} - \ln(x+2) + \ln(x) \\ &= \ln(x^2+4x+4) - \ln(x) - \ln(x+2) + \ln(x) \\ &= \ln(x+2)^2 - \ln(x+2) \\ &= 2\ln(x+2) - \ln(x+2) = \ln(x+2)\,. \end{aligned}$$

b)
$$(x^3+3x^2-3x-31) : (x^2+6x+11) = x - 3 + \frac{4x+2}{x^2+6x+11}$$
$$\begin{array}{llll} -(x^3 & +6x^2 & +11x) & \\ \hline & -3x^2 & -14x & -31 \\ & -(-3x^2 & -18x & -33) \\ \hline & & 4x & +2 \end{array}$$

c) Unter Verwendung des Vietaschen Wurzelsatz, testen wir die Teiler der Konstanten 35
$$\pm 1,\ \pm 5,\ \pm 7,\ \pm 35$$
darauf hin, ob es Nullstellen sind.

$x_1 = 1$ stellt sich als Nullstelle von p_3 heraus:
$$(x^3-3x^2-33x+35) : (x-1) = x^2 - 2x - 35$$
$$\begin{array}{llll} -(x^3 & -x^2) & & \\ \hline & -2x^2 & -33x & +35 \\ & -(-2x^2 & +2x) & \\ \hline & & -35x & +35 \\ & & -(-35x & +35) \\ \hline & & & 0 \end{array}$$

Für $p_2(x) = x^2 - 2x - 35$ stellt sich $x_2 = 7$ als Nullstelle heraus:
$$(x^2-2x-35) : (x-7) = x + 5$$
$$\begin{array}{lll} -(x^2 & -7x) & \\ \hline & 5x & -35 \\ & -(5x & -35) \\ \hline & & 0 \end{array}$$

Die Linearfaktorzerlegung lautet damit insgesamt

$$p_3(x) = x^3 - 3x^2 - 33x + 35 = (x+5)(x-1)(x-7)\,.$$

Lösung 11:

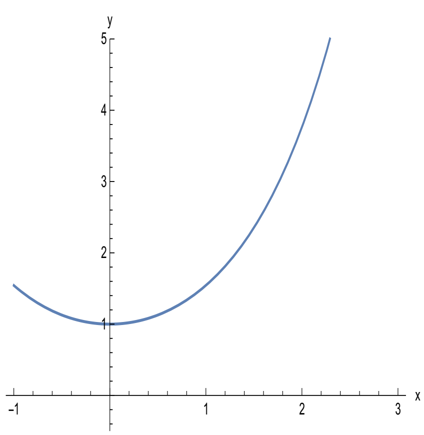
a)

$$\begin{aligned}
\frac{1-t^2}{t^2+1} &= \frac{1-\tan^2(x/2)}{\tan^2(x/2)+1} = \frac{1-\frac{\sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)}}{\frac{\sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)}+1} \\
&= \frac{\left(1-\frac{\sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)}\right)\cos^2(x/2)}{\sin^2(x/2)+\cos^2(x/2)} = \frac{\cos^2(x/2)-\sin^2(x/2)}{\sin^2(x/2)+\cos^2(x/2)} \\
&= \cos^2(x/2)-\sin^2(x/2) = \cos(x/2)\cos(x/2)-\sin(x/2)\sin(x/2) = \cos x
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\cosh^2 x - \sinh^2 x &= \frac{1}{2^2}\left(e^x+e^{-x}\right)^2 - \frac{1}{2^2}\left(e^x-e^{-x}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\left((e^x)^2 + 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2 - ((e^x)^2 - 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2)\right) \\
&= \frac{4e^x e^{-x}}{4} = 1
\end{aligned}$$

c) Für $x \in [0,\infty[$ folgt $y = \cosh(x) \in [1,\infty[$.



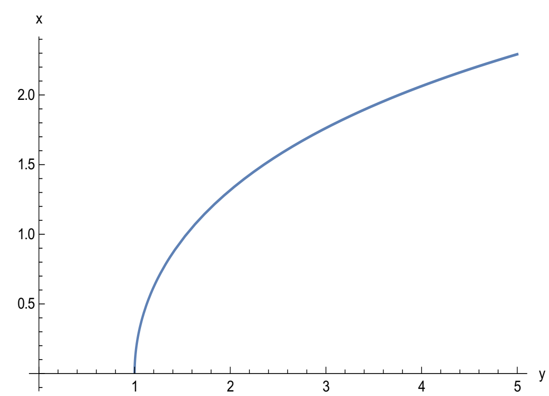


Bild 11 $f(x) = \cosh(x)$ $f^{-1}(y) = \operatorname{arcosh}(y)$

Die Umkehrfunktion wird berechnet durch Auflösen von

$$y = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \geq 1$$

nach x. Dafür setzen wir zunächst $z = e^x$ und lösen dann nach z auf:

$y = \frac{1}{2}(z + 1/z) \quad \Rightarrow \quad 2zy = z^2 + 1$
$\Rightarrow \quad z^2 - 2yz + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = y \pm \sqrt{y^2 - 1}.$
Für $x \in [0, \infty[$ kommt die 'Minusvariante' bei der Umkehrung nicht in Frage, denn

$$0 < e^x = z = y - \sqrt{y^2 - 1} = \frac{1}{y + \sqrt{y^2 - 1}} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad x \in \,]-\infty, 0].$$

Also erhält man

$$e^x = y + \sqrt{y^2 - 1} \quad \Rightarrow \quad x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right).$$

Lösung 12:

a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{3 - n + 2n^2}{6n^2 + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{3/n^2 - 1/n + 2}{6 + 1/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3/n^2 - 1/n + 2}{6 + 1/n^2}$$
$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(3/n^2 - 1/n + 2)}{\lim\limits_{n\to\infty}(6 + 1/n^2)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3/n^2 - \lim\limits_{n\to\infty} 1/n + \lim\limits_{n\to\infty} 2}{\lim\limits_{n\to\infty} 6 + \lim\limits_{n\to\infty} 1/n^2} = \frac{0 - 0 + 2}{6 + 0} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

b) $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2 + 1}{2n^2 - n - 7}\right)^3 = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{3 + 1/n^2}{2 - 1/n - 7/n^2}\right)^3$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3 + 1/n^2}{2 - 1/n - 7/n^2}\right)^3 = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{3 + 1/n^2}{2 - 1/n - 7/n^2}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$$

c) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - 2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 2n - (n^2 - 2n)}{\sqrt{n^2 + 2n} + \sqrt{n^2 - 2n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} \cdot \frac{4}{\sqrt{1 + 2/n} + \sqrt{1 - 2/n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{\sqrt{1 + 2/n} + \sqrt{1 - 2/n}} = \frac{4}{2} = 2$$

d) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{4n^2 + 3}}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + 2/n^2} - \sqrt{4 + 3/n^2} = -1$$

e) $$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{3n}\right)^{17n} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{-2/3}{n}\right)^n\right)^{17}$$
$$= \left(\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-2/3}{n}\right)^n\right)^{17} = \left(e^{-2/3}\right)^{17} = e^{-34/3}$$

f) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} + 3^n}{3^{n+1} + 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{3^n} \cdot \frac{2(2/3)^n + 1}{3 + (2/3)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(2/3)^n + 1}{3 + (2/3)^n} = \frac{2 \cdot 0 + 1}{3 + 0} = \frac{1}{3}$$

Lösung 13:

a) Die ersten Folgenglieder lauten

$$a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = \frac{2}{3} = 0.666..., a_4 = \frac{7}{9} = 0.777..., a_5 = \frac{20}{27} = 0.740..., a_6 = \frac{61}{81} = 0.753...$$

Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, so sei $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ der Grenzwert.

Aus der Rekursion erhält man:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{a_n}{3}\right) = 1 - \frac{a}{3} \Rightarrow a = \frac{3}{4}\,.$$

Zum Nachweis der Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $a = \frac{3}{4}$ wird auf die Definition der Konvergenz gegen a zurückgegriffen

$$\begin{aligned} \left|a_{n+1} - \frac{3}{4}\right| &= \left|1 - \frac{a_n}{3} - \frac{3}{4}\right| = \left|-\frac{a_n}{3} + \frac{1}{4}\right| = \left|-\frac{1}{3}\left(a_n - \frac{3}{4}\right)\right| = \frac{1}{3}\left|a_n - \frac{3}{4}\right| \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\left|a_{n-1} - \frac{3}{4}\right| = \cdots = \left(\frac{1}{3}\right)^n \left|a_1 - \frac{3}{4}\right| = \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \frac{3}{4} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,. \end{aligned}$$

b) Falls $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, so sei $b := \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ der Grenzwert.

Aus der Rekursion erhält man

$$b = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n^2 + 3}{4} = \frac{b^2 + 3}{4}\,,$$

$$\Rightarrow \quad 0 = b^2 - 4b + 3 = (b-1)(b-3) \quad \Rightarrow \quad b = 1 \lor b = 3\,.$$

Es gilt $b_{n+1} = \frac{b_n^2 + 3}{4} \geq 0$. Die ersten Folgenglieder lauten

$$b_1 = \frac{1}{2},\ b_2 = \frac{13}{16} = 0.8125,\ b_3 = \frac{937}{1024} = 0.9150...,\ b_4 = \frac{4023697}{4194304} = 0.9593...$$

Man zeigt durch vollständige Induktion die Beschränktheit der Folge nach oben, hier $b_n \leq 1$:

Induktionsanfang: $b_1 = \frac{1}{2} \leq 1$

Induktionsschritt: $b_{n+1} = \frac{b_n^2 + 3}{4} \leq \frac{1+3}{4} = 1$

Man zeigt durch vollständige Induktion, dass die Folge monoton wächst, d.h. $b_n \leq b_{n+1}$:

Induktionsanfang: $b_1 = \frac{1}{2} \leq \frac{13}{16} = b_2$

Induktionsschritt:

$0 \le b_n \le b_{n+1} \Rightarrow b_n^2 \le b_{n+1}^2 \Rightarrow b_{n+1} = \dfrac{b_n^2+3}{4} \le \dfrac{b_{n+1}^2+3}{4} = b_{n+2}$

Also wächst b_n monoton und ist beschränkt nach oben durch 1, konvergiert also nach dem Monotoniekriterium und zwar gegen $b = 1$.

c) Wenn c_n gegen c konvergiert, so erhält man aus der Rekursion

$$c = 2c + 1 \quad \Rightarrow \quad c = -1\,.$$

Aus $c_1 = 1$ und $c_{n+1} = 2c_n + 1$ folgt jedoch durch Induktion $c_n \ge 0$.

Damit kann c_n nicht konvergieren.

d) Falls $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit $d := \lim\limits_{n\to\infty} d_n$, so ergibt die Rekursion:

$d = \sqrt{3d-2} \Rightarrow d^2 = 3d - 2 \Rightarrow (d-1)(d-2) = 0 \Rightarrow d = 1 \vee d = 2.$

$(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert (gegen $d = 2$), denn es gilt $d_n \ge 2$ und $d_{n-1} \ge d_n$, mit vollständiger Induktion:

$d_1 = 3 \ge 2$ und $d_{n+1} = \sqrt{3d_n - 2} \ge \sqrt{3\cdot 2 - 2} = 2$

$d_2 = \sqrt{3^2-2} = \sqrt{7} \le 3 = d_1$ und $d_{n+1} = \sqrt{3d_n - 2} \le \sqrt{3d_{n-1}-2} = d_n$.

Lösung 14:

a) $]-3,5] \cap]2,8] \;=]2,5] \Rightarrow M_1 \;=]2,5] \cup \left\{ a_n \in \mathbb{R} \mid a_n = \dfrac{1}{n}\,,\; n \in \mathbb{N} \right\}$

$\Rightarrow \quad M_1' = \{0\} \cup [2,5]$ und $M_1^0 =]2,5[\,,\quad M_1$ ist weder offen noch abgeschlossen

$M_2 = \{0\} \cup [3,4] \cup \left\{ a_n \in \mathbb{R} \mid a_n = 1 + \dfrac{1}{2n}\,,\; n \in \mathbb{N} \right\}$

$\Rightarrow \quad M_2' = \{1\} \cup [3,4]$ und $M_2^0 =]3,4[\,,\quad M_2$ ist weder offen noch abgeschlossen

$M_3' = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le y \le |x| \le 1 \right\}, \quad M_3^0 = M_3\,, \quad M_3$ ist offen.

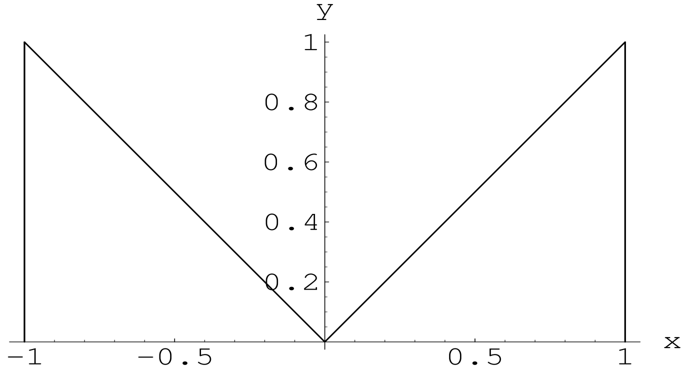


Bild 14 a) Menge M_3

b) (i) $\lim\limits_{x \to \pi/2} \cos x \tan x = \lim\limits_{x \to \pi/2} \cos x \cdot \dfrac{\sin x}{\cos x} = \lim\limits_{x \to \pi/2} \sin x = 1$

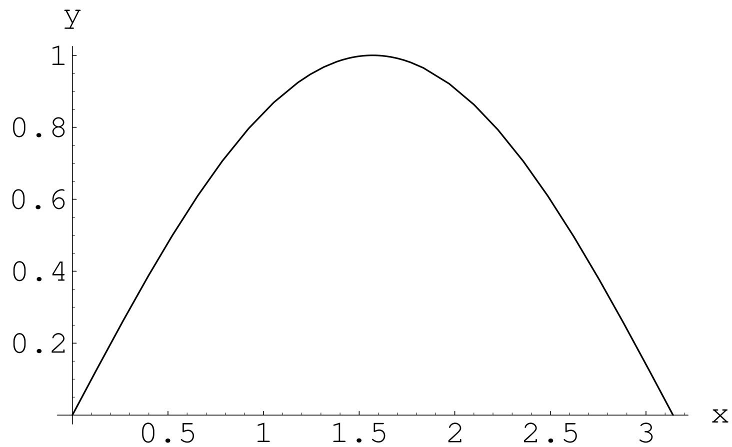


Bild 14 b) (i) $f(x) = \cos x \tan x = \sin x$

(ii) Der folgende Grenzwert existiert nur uneigentlich:

$$\lim_{x \to 1+} \frac{x+1}{\sqrt{x-1}} = \infty$$

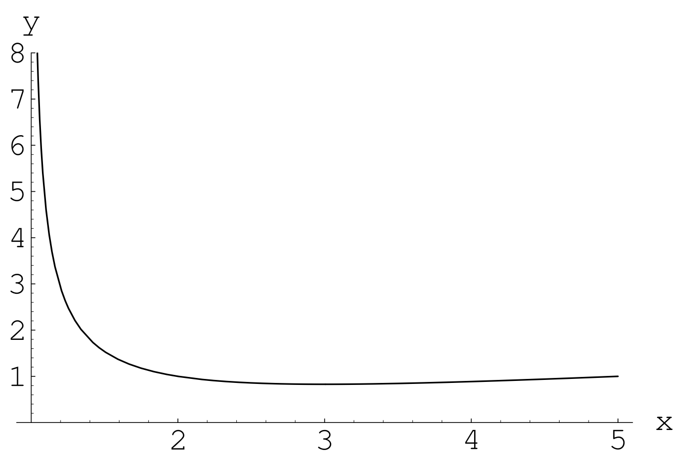


Bild 14 b) (ii) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x-1}}$

(iii) Variante 1:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to \infty} (2 - \cosh x + \sinh x) &= \lim_{x \to \infty} \left(2 - \frac{(\cosh x - \sinh x)(\cosh x + \sinh x)}{\cosh x + \sinh x} \right) \\
&= \lim_{x \to \infty} \left(2 - \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh x + \sinh x} \right) \\
&= \lim_{x \to \infty} \left(2 - \frac{1}{\cosh x + \sinh x} \right) = 2
\end{aligned}$$

Variante 2:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(2-\cosh x+\sinh x) &= \lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})+\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\right)\\ &= \lim_{x\to\infty}(2-e^{-x})=2\end{aligned}$$

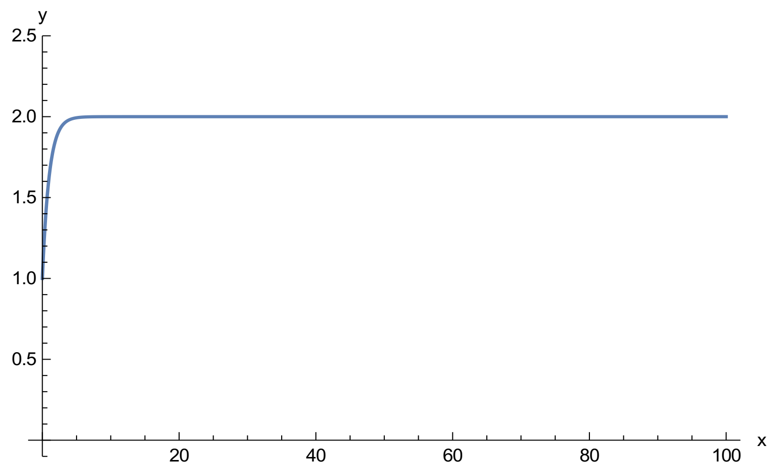


Bild 14 b) (iii) $f(x)=2-\cosh x+\sinh x$

Lösung 15:

Da f stetig ist, ergeben sich nach dem Zwischenwertsatz Nullstellen in folgenden Intervallen:

$$f(-3)\cdot f(-2)=(5.568181...)\cdot(-3.272727...)=-18.223140...<0 \quad\Rightarrow\quad x_1^*\in[-3,-2]$$
$$f(-2)\cdot f(-1)=(-3.272727...)\cdot(2.068181...)=-6.768595...<0 \quad\Rightarrow\quad x_2^*\in[-2,-1]$$
$$f(0)\cdot f(1)=1\cdot(-3.068181...)=-3.068181...<0 \quad\Rightarrow\quad x_3^*\in[0,1]$$
$$f(1)\cdot f(2)=(-3.068181...)\cdot(17.272727...)=-52.995867...<0 \quad\Rightarrow\quad x_4^*\in[1,2]$$

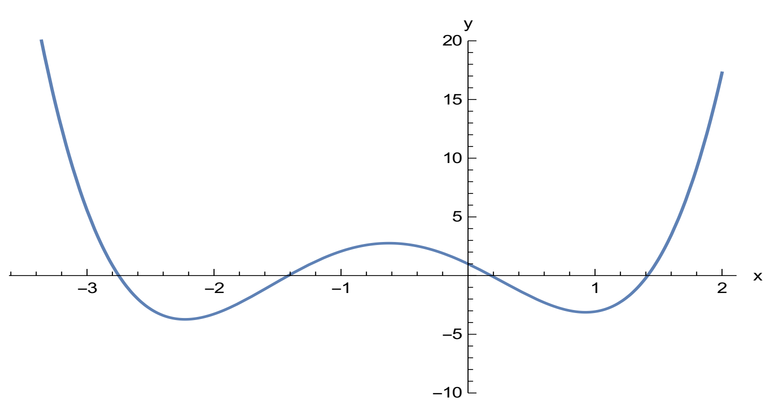


Bild 15 $f(x)=x^4+\dfrac{113}{44}x^3-\dfrac{5}{2}x^2-\dfrac{113}{22}x+1=(x^2-2)(x+11/4)(x-2/11)$

Nach Konstruktion lauten die Nullstellen:

$$x_1^* = -\frac{11}{4} = -2.75,\ x_2^* = -\sqrt{2} = -1.41421...,\ x_3^* = \frac{2}{11} = 0.181818....,\ x_4^* = \sqrt{2} = 1.41421...$$

Diese sind von der Aufgabenstellung her nicht bekannt und werden nun mit dem Intervallhalbierungsverfahren berechnet.

Ein Matlab-Programm zur Nullstellenberechnung mit Bisektion:

```
function x = bisektion(a,b,eps,funkt)
%-------------------------------------------------------------
% Berechnet eine Nullstelle mit Hilfe des Bisektionsverfahrens
%
% Input:    a<b   mit  funkt(a)<0  und  funkt(b)>0 (oder umgekehrt)
%           |b-a|<eps   Genauigkeit
%           funkt Funktion deren Nullstelle gesucht ist
%                 muss als inline Funktion definiert sein,
%                 z.B.: funkt=inline('(x^2-2)*(x-2/11)*(x+11/4)','x')
%
% Output:   x     Nullstellennäherung
%
% Kai Rothe, November 2016.
%-------------------------------------------------------------
  format long
  if(funkt(a)*funkt(b)>=0)
    [a b funkt(a) funkt(b)]
  else
    while(abs(b-a)>=eps)
      x = (a+b)/2;
      [a x b abs(b-a); funkt(a) funkt(x) funkt(b) eps]
      if(funkt(x)==0)
        break
      end
      if(funkt(a)*funkt(x)<0)
        b=x;
      else
        a=x;
      end
    end
  end
```

```
>> funkt=inline('(x^2-2)*(x-2/11)*(x+11/4)','x')
>> bisektion(-3.0,-2.0,0.001,funkt)
```

```
ans =
  -3.000000000000000  -2.500000000000000  -2.000000000000000   1.000000000000000
   5.568181818181818  -2.849431818181818  -3.272727272727272   0.001000000000000

ans =
  -3.000000000000000  -2.750000000000000  -2.500000000000000   0.500000000000000
   5.568181818181818                   0  -2.849431818181818   0.001000000000000

ans =   -2.750000000000000

>> funkt=inline('(x^2-2)*(x-2/11)*(x+11/4)','x')
>> bisektion(-2.0,-1.0,0.001,funkt)

ans =
  -2.000000000000000  -1.500000000000000  -1.000000000000000   1.000000000000000
  -3.272727272727272  -0.525568181818182   2.068181818181818   0.001000000000000

ans =
  -1.500000000000000  -1.250000000000000  -1.000000000000000   0.500000000000000
  -0.525568181818182   0.939630681818182   2.068181818181818   0.001000000000000

ans =

  -1.500000000000000  -1.375000000000000  -1.250000000000000   0.250000000000000
  -0.525568181818182   0.234130859375000   0.939630681818182   0.001000000000000

ans =
  -1.500000000000000  -1.437500000000000  -1.375000000000000   0.125000000000000
  -0.525568181818182  -0.141136863014915   0.234130859375000   0.001000000000000

ans =
  -1.437500000000000  -1.406250000000000  -1.375000000000000   0.062500000000000
  -0.141136863014915   0.047930890863592   0.234130859375000   0.001000000000000

ans =
  -1.437500000000000  -1.421875000000000  -1.406250000000000   0.031250000000000
  -0.141136863014915  -0.046279674226587   0.047930890863592   0.001000000000000

ans =
  -1.421875000000000  -1.414062500000000  -1.406250000000000   0.015625000000000
  -0.046279674226587   0.000910887325352   0.047930890863592   0.001000000000000

ans =
  -1.421875000000000  -1.417968750000000  -1.414062500000000   0.007812500000000
  -0.046279674226587  -0.022663626587018   0.000910887325352   0.001000000000000
```

```
ans =
  -1.417968750000000  -1.416015625000000  -1.414062500000000   0.003906250000000
  -0.022663626587018  -0.010871108585641   0.000910887325352   0.001000000000000

ans =
  -1.416015625000000  -1.415039062500000  -1.414062500000000   0.001953125000000
  -0.010871108585641  -0.004978786721784   0.000910887325352   0.001000000000000

ans = -1.415039062500000

>> funkt=inline('(x^2-2)*(x-2/11)*(x+11/4)','x')
>> bisektion(0.0,1.0,0.001,funkt)

ans =
                   0   0.500000000000000   1.000000000000000   1.000000000000000
   1.000000000000000  -1.809659090909091  -3.068181818181818   0.001000000000000

ans =
                   0   0.250000000000000   0.500000000000000   0.500000000000000
   1.000000000000000  -0.396306818181818  -1.809659090909091   0.001000000000000

ans =
                   0   0.125000000000000   0.250000000000000   0.250000000000000
   1.000000000000000   0.324152166193182  -0.396306818181818   0.001000000000000

ans =
   0.125000000000000   0.187500000000000   0.250000000000000   0.125000000000000
   0.324152166193182  -0.032793912020597  -0.396306818181818   0.001000000000000

ans =
   0.125000000000000   0.156250000000000   0.187500000000000   0.062500000000000
   0.324152166193182   0.146800908175382  -0.032793912020597   0.001000000000000

ans =
   0.156250000000000   0.171875000000000   0.187500000000000   0.031250000000000
   0.146800908175382   0.057247221469879  -0.032793912020597   0.001000000000000

ans =
   0.171875000000000   0.179687500000000   0.187500000000000   0.015625000000000
   0.057247221469879   0.012282917106693  -0.032793912020597   0.001000000000000

ans =
   0.179687500000000   0.183593750000000   0.187500000000000   0.007812500000000
   0.012282917106693  -0.010242020309141  -0.032793912020597   0.001000000000000

ans =
   0.179687500000000   0.181640625000000   0.183593750000000   0.003906250000000
```

```
   0.012282917106693   0.001023891459971  -0.010242020309141   0.001000000000000

ans =
   0.181640625000000   0.182617187500000   0.183593750000000   0.001953125000000
   0.001023891459971  -0.004608212867424  -0.010242020309141   0.001000000000000

ans =  0.182617187500000

>> funkt=inline('(x^2-2)*(x-2/11)*(x+11/4)','x')
>> bisektion(1.0,2.0,0.001,funkt)

ans =
   1.000000000000000   1.500000000000000   2.000000000000000   1.000000000000000
  -3.068181818181818   1.400568181818182  17.272727272727273   0.001000000000000

ans =
   1.000000000000000   1.250000000000000   1.500000000000000   0.500000000000000
  -3.068181818181818  -1.869318181818182   1.400568181818182   0.001000000000000

ans =
   1.250000000000000   1.375000000000000   1.500000000000000   0.250000000000000
  -1.869318181818182  -0.538330078125000   1.400568181818182   0.001000000000000

ans =
   1.375000000000000   1.437500000000000   1.500000000000000   0.125000000000000
  -0.538330078125000   0.349175193093040   1.400568181818182   0.001000000000000

ans =
   1.375000000000000   1.406250000000000   1.437500000000000   0.062500000000000
  -0.538330078125000  -0.114304715936834   0.349175193093040   0.001000000000000

ans =
   1.406250000000000   1.421875000000000   1.437500000000000   0.031250000000000
  -0.114304715936834   0.112409477884119   0.349175193093040   0.001000000000000

ans =
   1.406250000000000   1.414062500000000   1.421875000000000   0.015625000000000
  -0.114304715936834  -0.002192260528153   0.112409477884119   0.001000000000000

ans =
   1.414062500000000   1.417968750000000   1.421875000000000   0.007812500000000
  -0.002192260528153   0.054795976961032   0.112409477884119   0.001000000000000

ans =
   1.414062500000000   1.416015625000000   1.417968750000000   0.003906250000000
  -0.002192260528153   0.026223884423168   0.054795976961032   0.001000000000000
```

```
ans =
   1.414062500000000   1.415039062500000   1.416015625000000   0.001953125000000
  -0.002192260528153   0.011996341497086   0.026223884423168   0.001000000000000

ans =  1.415039062500000
```

Lösung 16:

a) (i)

$$\lim_{x\nearrow 0} f_1(x) = \lim_{x\nearrow 0}(x^2+1) = 0^2+1 = 1 \neq f_1(0) = 2$$

$$\lim_{x\searrow 0} f_1(x) = \lim_{x\searrow 0}(x^2+1) = 0^2+1 = 1 \neq f_1(0) = 2$$

f_1 ist unstetig in $x_0 = 0$.
Die Unstetigkeit in $x_0 = 0$ lässt sich durch Wahl von $f_1(0) = 1$ beheben.

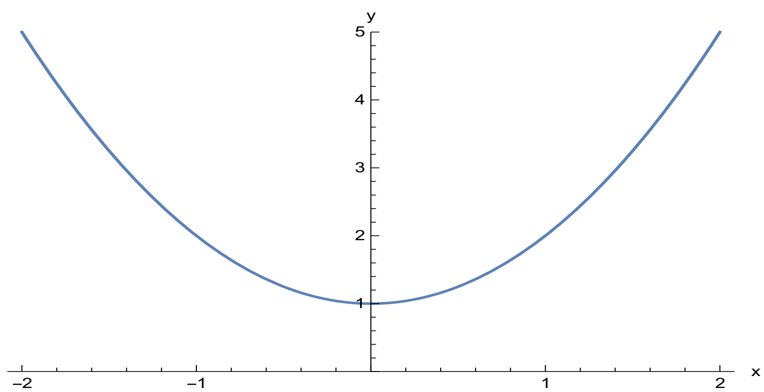


Bild 16 a) (i) $f_1(x)$

(ii)

$$\lim_{x\nearrow 1} f_2(x) = \lim_{x\nearrow 1} 3 = 3 = f_2(1)$$

$$\lim_{x\searrow 1} f_2(x) = \lim_{x\searrow 1} e^x = e^1 = e \neq f_2(1) = 3$$

f_2 besitzt in $x_0 = 1$ eine Sprungstelle, ist dort also unstetig.

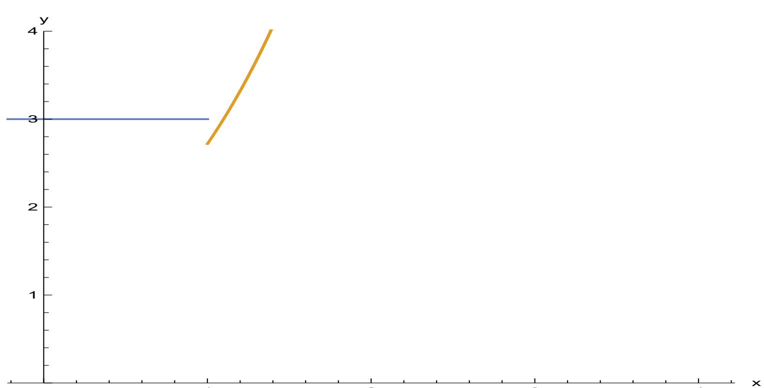


Bild 16 a) (ii) $f_2(x)$

(iii) f_3 besitzt in $x_0 = 5$ eine Definitionslücke.
Durch Linearfaktorzerlegung des Zählers erhält man

$$f_3(x) = \frac{x^2 - 2x - 15}{x - 5} = \frac{(x+3)(x-5)}{x-5}\,.$$

$$\lim_{x\to 5-} f_3(x) = \lim_{x\to 5-} \frac{(x+3)(x-5)}{x-5} = \lim_{x\to 5-} x + 3 = 5 + 3 = 8$$

$$\lim_{x\to 5+} f_3(x) = \lim_{x\to 5+} \frac{(x+3)(x-5)}{x-5} = \lim_{x\to 5+} x + 3 = 5 + 3 = 8$$

Mit der Wahl von $f_3(5) = 8$ lässt sich f_3 in $x_0 = 5$ stetig ergänzen.

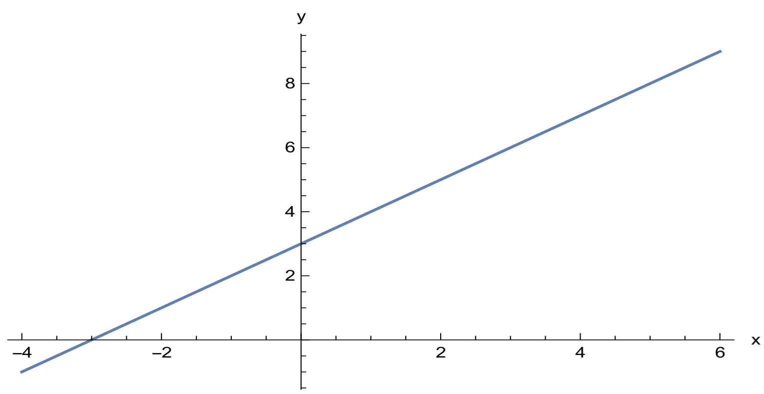


Bild 16 a) (iii) $f_3(x)$

(iv)

$$\lim_{x\to \pi/2-} f_4(x) = \lim_{x\to \pi/2-} 2x/\pi = 1 = f_4\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\lim_{x\to \pi/2+} f_4(x) = \lim_{x\to \pi/2+} \sin x = \sin(\pi/2) = 1$$

f_4 ist stetig in $x_0 = \pi/2$.

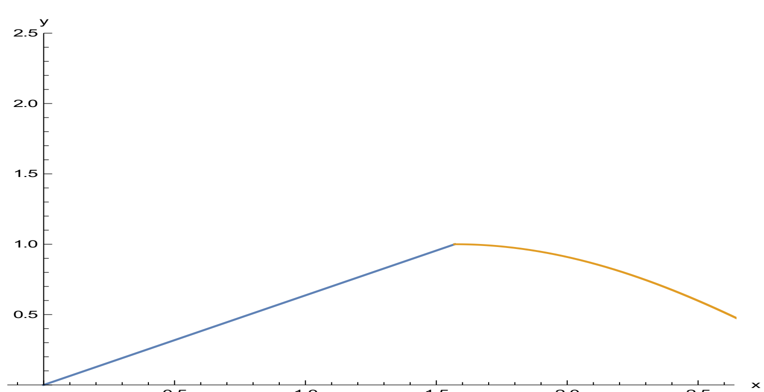


Bild 16 a) (iv) $f_4(x)$

b) Für die Stetigkeit von g in $x_0 = 1$ muss

$$\lim_{x\nearrow 1} g(x) = \lim_{x\nearrow 1}(x^2 - a) = 1^2 - a \stackrel{!}{=} g(1) = \ln 1 = 0$$

gelten. Man erhält damit $a = 1$.

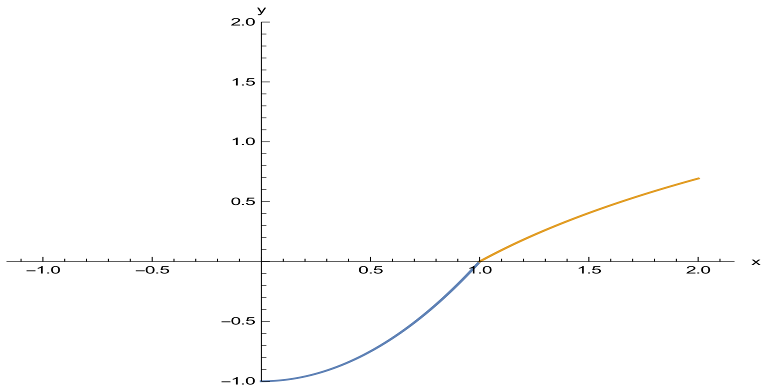


Bild 16 b) $g(x)$ mit $a = 1$

Lösung 17:

a) Aus den gegebenen Werten für die Ableitung der Funktion folgt:

$$\begin{array}{rcccl} f(0) & = & 0 & , & \\ f(x) & = & -2x + a & \text{für} & -\infty < x < -1\,, \\ f(x) & = & x^2 + b & \text{für} & -1 < x < 2\,, \\ f(x) & = & x + c & \text{für} & 2 < x < \infty \end{array}$$

mit Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$. Diese ist stetig für $x \neq -1$ und $x \neq 2$.

Mit $0 = f(0) = 0^2 + b$ erhält man $b = 0$.

Die Stetigkeitsforderung im Punkt $x = -1$ ergibt:

$$2 + a = \lim_{x\to -1-} f(x) \stackrel{!}{=} \lim_{x\to -1+} f(x) = (-1)^2 + b = 1 \;\Rightarrow\; a = -1\,.$$

Die Stetigkeitsforderung im Punkt $x = 2$ ergibt:

$$4 = 2^2 + b = \lim_{x\to 2-} f(x) \stackrel{!}{=} \lim_{x\to 2+} f(x) = 2 + c \;\Rightarrow\; c = 2\,.$$

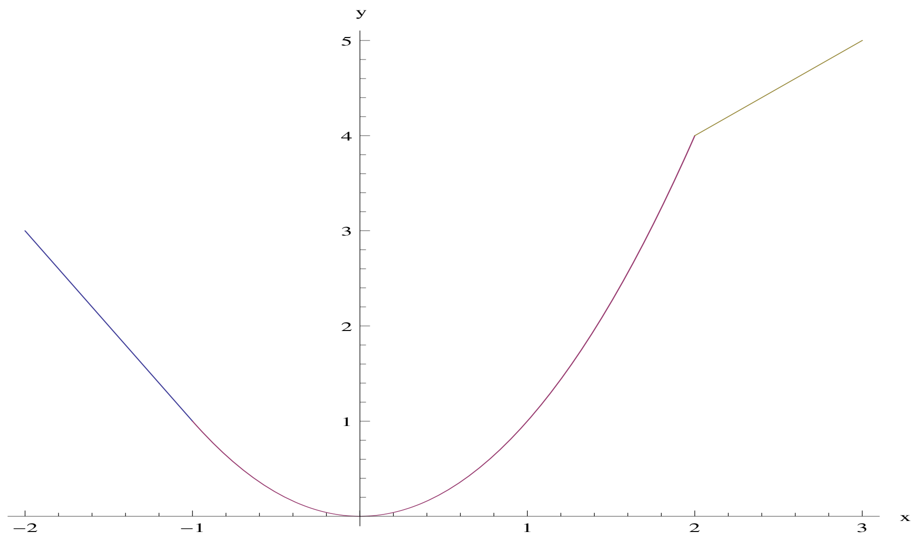


Bild 17 a) $f(x)$ mit $a = -1$, $b = 0$ und $c = 2$

Die nun stetige Funktion f ist im Punkt $x = -1$ auch differenzierbar, denn es gilt

$$\lim_{x\to -1-} f'(x) = -2 = \lim_{x\to -1+} f'(x)\,.$$

Im Punkt $x = 2$ ist f nicht differenzierbar, denn es gilt

$$\lim_{x\to 2-} f'(x) = 4 \neq 1 = \lim_{x\to 2+} f'(x)\,.$$

b) Stetigkeitsforderung im Punkt $x_0 = 1$

$$a + b = \lim_{x\to 1-} ax + b \overset{!}{=} f(1) = \ln 1 = 0 \;\Rightarrow\; b = -a,$$

Differenzierbarkeitsforderung im Punkt $x_0 = 1$

$$a = \lim_{x\to 1-} (ax+b)' = \lim_{x\to 1-} f'(x) \overset{!}{=} \lim_{x\to 1+} f'(x) = \lim_{x\to 1+} \frac{1}{x} = 1 \;\Rightarrow\; a = 1 \;\Rightarrow\; b = -1\,.$$

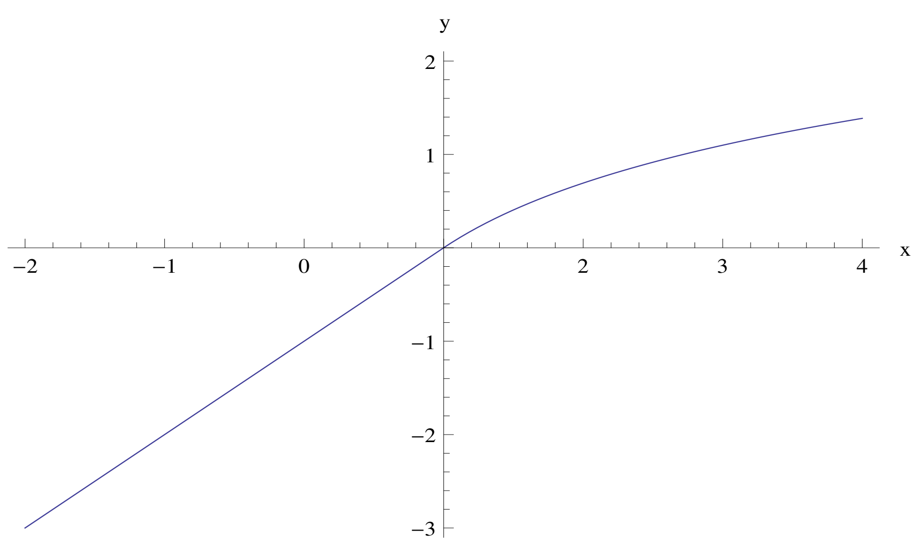


Bild 17 b) $f(x)$ mit $a = 1$ und $b = -1$

c) $f(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\sin x$

$$\Rightarrow \quad T(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\cdot\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

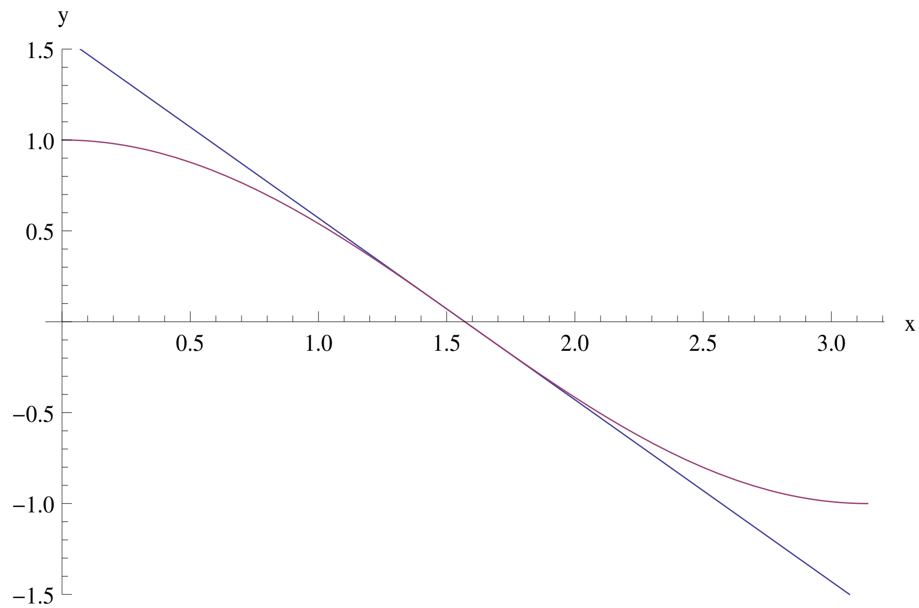


Bild 17 c) $f(x) = \cos x$ mit Tangente $T(x) = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ in $x_0 = \frac{\pi}{2}$

Lösung 18:

a) (i)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x + \sin x \cos x}{2}\right)' \\ &= \frac{1 + \cos^2 x - \sin^2 x}{2} = \frac{\cos^2 x + \cos^2 x}{2} = \cos^2 x \end{aligned}$$

(ii) Logaritmisches Differenzieren von $g(x) = (2x+1)^{\sin x}$ ergibt

$$\begin{aligned} g'(x) &= g(x)(\ln g(x))' = (2x+1)^{\sin x}\left(\ln(2x+1)^{\sin x}\right)' \\ &= (2x+1)^{\sin x}\left(\sin(x)\ln(2x+1)\right)' \\ &= (2x+1)^{\sin x}\left(\cos(x)\ln(2x+1) + \frac{2\sin x}{2x+1}\right). \end{aligned}$$

Alternativ ohne die Formel für das logaritmische Differenzieren:

$$\begin{aligned}
g(x) &= (2x+1)^{\sin x} = e^{\ln(2x+1)^{\sin x}} = e^{\sin(x)\ln(2x+1)} \\
g'(x) &= \left(e^{\sin(x)\ln(2x+1)}\right)' = e^{\sin(x)\ln(2x+1)}\left(\sin(x)\ln(2x+1)\right)' \\
&= (2x+1)^{\sin x}\left(\cos(x)\ln(2x+1) + \frac{2\sin x}{2x+1}\right)
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\text{i) } h(x) &= \frac{x+2}{x^3+8} = \frac{1}{x^2-2x+4} \\
h'(x) &= \left(\frac{1}{x^2-2x+4}\right)' = -\frac{2x-2}{(x^2-2x+4)^2} \\
h''(x) &= -\left(\frac{2x-2}{(x^2-2x+4)^2}\right)' \\
&= -\frac{2(x^2-2x+4)^2-(2x-2)2(2x-2)(x^2-2x+4)}{(x^2-2x+4)^4} \\
&= -\frac{2(x^2-2x+4)-2(2x-2)^2}{(x^2-2x+4)^3} = \frac{6x^2-12x}{(x^2-2x+4)^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ii) } k(x) &= \ln(x^2-1) = \ln((x+1)(x-1)) = \ln(x+1)+\ln(x-1) \\
k'(x) &= (\ln(x^2-1))' = \frac{2x}{x^2-1} \\
k''(x) &= \left(\frac{2x}{x^2-1}\right)' = \frac{2(x^2-1)-2x\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = -\frac{2x^2+2}{(x^2-1)^2}
\end{aligned}$$

Alternative Rechnung:

$$\begin{aligned}
k'(x) &= (\ln(x+1)+\ln(x-1))' = \frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1} = \frac{2x}{x^2-1} \\
k''(x) &= \left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)' = -\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x-1)^2} = -\frac{2x^2+2}{(x^2-1)^2}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\text{i) } u'(x) &= (2(1-3x)^2+4(5x-2)-7)' = -12(1-3x)+20 \\
u''(x) &= (-12(1-3x)+20)' = 36 \\
u'''(x) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ii) } v'(x) &= \left(\sqrt[3]{(5x+1)^2}\right)' = \left((5x+1)^{2/3}\right)' = \frac{10}{3}(5x+1)^{-1/3} \\
v''(x) &= -\frac{50}{9}(5x+1)^{-4/3} \\
v'''(x) &= \frac{1000}{27}(5x+1)^{-7/3}
\end{aligned}$$

Lösung 19:

a) (i) Durch Einsetzen einiger Funktionswerte erhält man:

$$f(-1) = -0.259698\ldots\,, \quad f(0) = 0.2\,, \quad f(1) = -0.259698\ldots\,, \quad f(2) = 4.78385\ldots$$

Da f stetig ist, besitzt f nach dem Zwischenwertsatz in jedem der drei Intervalle $]-1,0[$, $]0,1[$ und $]1,2[$ mindestens eine Nullstelle.

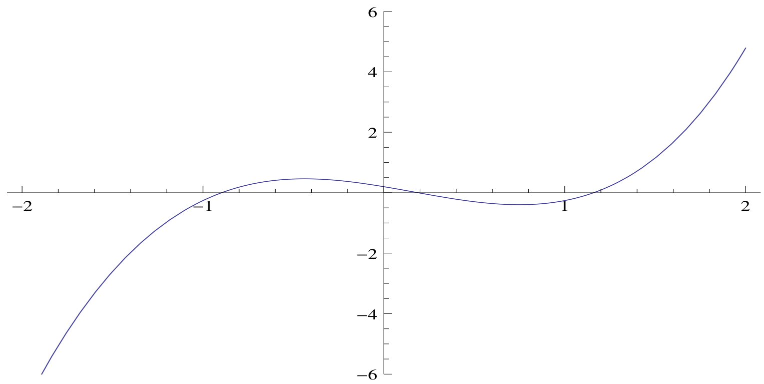


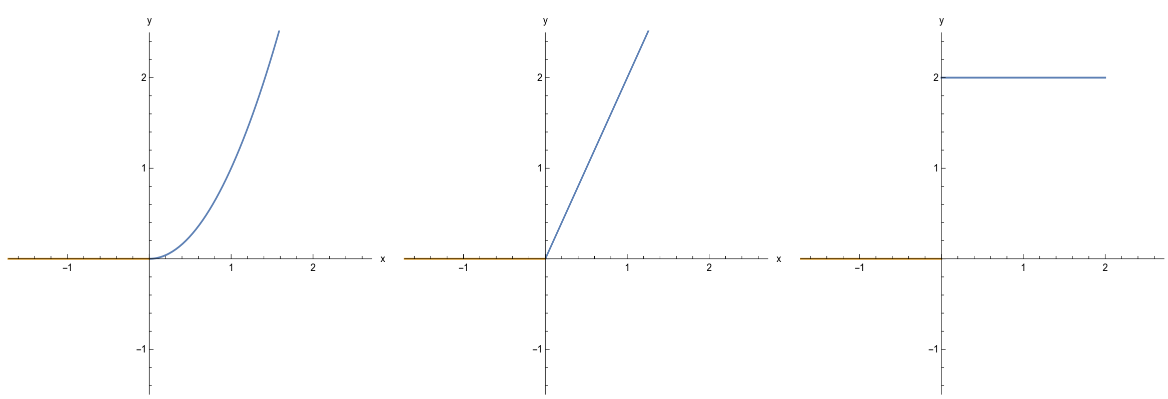
Bild 19 a) $\quad f(x) = x^3 - x - \dfrac{4}{5} + \cos x$

(ii) f ist beliebig oft differenzierbar.
Angenommen f besäße mehr als drei Nullstellen, dann hätte nach dem Satz von Rolle $f'(x) = 3x^2 - 1 - \sin x$ mehr als zwei Nullstellen, $f''(x) = 6x - \cos x$ mehr als eine Nullstelle und $f'''(x) = 6 + \sin x$ mindestens eine Nullstelle. Dies ist jedoch falsch. Also besitzt f höchstens drei Nullstellen.

(iii)

```
>> funkt=inline('x^3-x-4/5+cos(x)','x')
>> bisektion(-1.0,0.0,10^(-10),funkt)
   ans = -0.896645831351634
>> bisektion(0.0,1.0,10^(-10),funkt)
   ans = 0.188948064169381
>> bisektion(1.0,2.0,10^(-10),funkt)
   ans = 1.159888881898951
```

b) (i)



$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \le 0\,, \\ x^2 & \text{für} \quad 0 < x \end{cases}$ $\qquad f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \le 0\,, \\ 2x & \text{für} \quad 0 < x \end{cases}$ $\qquad f''(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0\,, \\ 2 & \text{für} \quad 0 < x \end{cases}$

Bild 19 b)

(ii) Da f stetig und differenzierbar in $\mathbb{R}$ ist, sind die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes erfüllt.
Es kann hier nur eine Zwischenstelle $x_0 \in]-1,1[$ berechnet werden:

$$f'(x_0) = \frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)} = \frac{1^2-0}{1-(-1)} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_0 = \frac{1}{4} \in]-1,1[\,.$$

Die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes für f' sind nicht erfüllt, da f'' für $x=0$ nicht definiert ist und diese Definitionslücke im zu untersuchenden Intervall $]-1,1[$ liegt.
Tatsächlich lässt sich auch kein x_0 angeben, für das

$$f''(x_0) = \frac{f'(1)-f'(-1)}{1-(-1)} = \frac{2-0}{2} = 1$$

gilt.

Lösung 20:

a) Mit Hilfe der Regel von l'Hospital ergibt sich

(i)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+1}{x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{2x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

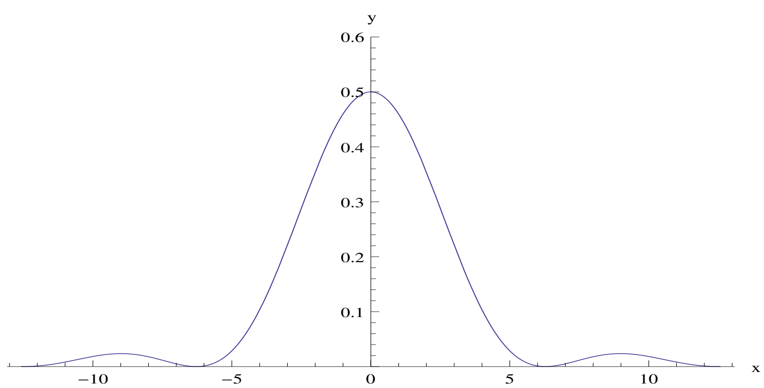


Bild 20 a) (i) $f(x) = \dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+1}{x^2}$

(ii)
$$\lim_{x\to 0} \frac{3}{x} - \frac{6}{e^{2x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{3e^{2x}-3-6x}{x(e^{2x}-1)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{6e^{2x}-6}{e^{2x}+2xe^{2x}-1}$$
$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{12e^{2x}}{4e^{2x}+4xe^{2x}} = \lim_{x\to 0} \frac{12}{4+4x} = 3\,.$$

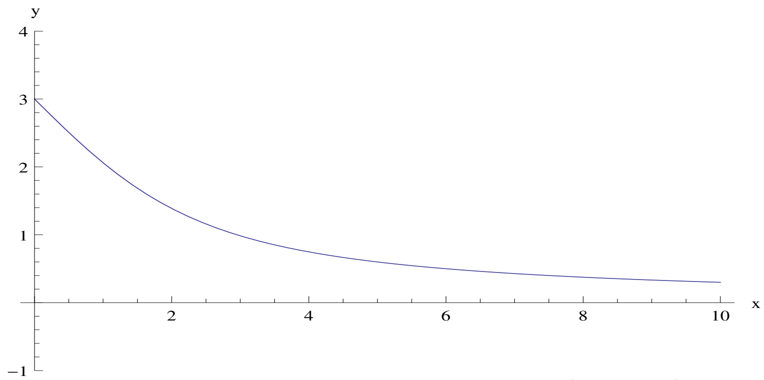


Bild 20 a) (ii) $\quad f(x) = \dfrac{3}{x} - \dfrac{6}{e^{2x}-1}$

b) Die Nullstellen von $g'(x) = -x^2+6x-8$ lauten $x_1 = 2\,,\, x_2 = 4$. Die Monotoniebereiche von g ergeben sich aus dem Vorzeichenverhalten von g':

$$g'(x) = -(x-2)(x-4) \begin{cases} < 0 & , \quad x \in \,]-\infty, 2[\quad \Rightarrow \quad g \text{ streng monoton fallend} \\ = 0 & , \quad x = 2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2 \text{ streng lokales Minimum} \\ > 0 & , \quad x \in \,]2, 4[\quad \Rightarrow \quad g \text{ streng monoton wachsend} \\ = 0 & , \quad x = 4 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 4 \text{ streng lokales Maximum} \\ < 0 & , \quad x \in \,]4, \infty[\quad \Rightarrow \quad g \text{ streng monoton fallend} \end{cases}$$

Nur beim Funktionsgraphen von $g_3(x) = -x^3/3 + 3x^2 - 8x$ stimmt das Monotonieverhalten mit dem von g überein.

Die Abbildungsvorschriften zu den anderen Funktionsgraphen lauten

$g_1(x) = -x^2 + 6x - 8,$
$g_2(x) = -x^3/3 + 5x^2/2 - 4x,$
$g_4(x) = -8\sin x\,.$

Lösung 21:

a) (i) Das Taylor-Polynom $T_2(x)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 3$ entspricht der Umordnung des Polynoms

$$p_2(x) = 5x^2 - 16x + 6 = c_2(x-3)^2 + c_1(x-3) + c_0 = T_2(x)$$

nach Potenzen von $x - x_0$. Die Koeffizienten $c_i,\ i = 0,1,2$ ergeben sich aus dem wiederholt angewendeten Horner-Schema.

	5	-16	6
$+$	$\downarrow$	$\downarrow 15$	-3
$3*$	$5 \nearrow$	$-1 \nearrow$	$3 = c_0$
$+$	$\downarrow$	$\downarrow 15$	
$3*$	$5 \nearrow$	$14 = c_1$	
$+$	$\downarrow$		
	$5 = c_2$		

Man erhält $p_2(x) = T_2(x) = 5(x-3)^2 + 14(x-3) + 3$

(ii) Mit den Ableitungen von p_2

$$p_2'(x) = 10x - 16\,, \quad p_2''(x) = 10$$

erhält man

$$\begin{aligned} p_2(x) = T_2(x) &= \frac{p_2''(3)}{2!}(x-3)^2 + \frac{p_2'(3)}{1!}(x-3) + p_2(3) \\ &= \frac{10}{2}(x-3)^2 + \frac{14}{1}(x-3) + 3 \\ &= 5(x-3)^2 + 14(x-3) + 3 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{(x-\pi/2)}\sin x &, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1 \\ f'(x) &= e^{(x-\pi/2)}(\sin x + \cos x) &, \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1 \\ f''(x) &= 2e^{(x-\pi/2)}\cos x &, \quad f''\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0 \\ f'''(x) &= 2e^{(x-\pi/2)}(\cos x - \sin x) &, \quad f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} T_3(x) &= \frac{f'''(\pi/2)}{3!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{f''(\pi/2)}{2!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{f'(\pi/2)}{1!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{3}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3 + \left(x-\frac{\pi}{2}\right) + 1 \end{aligned}$$

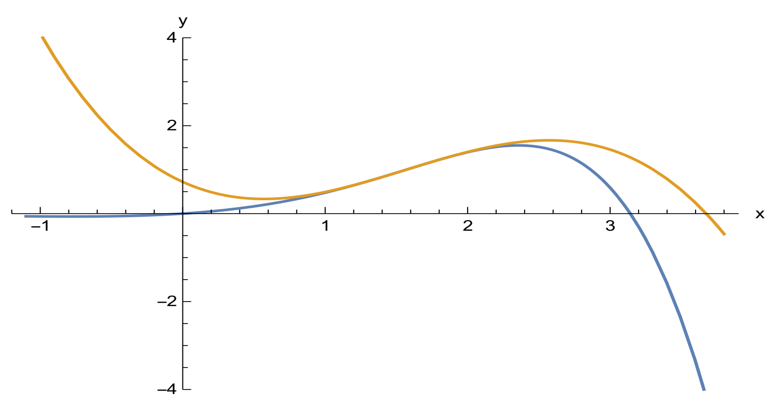


Bild 21 : $f(x) = e^{(x-\pi/2)}\sin x$ und $T_3(x)$

Für die Fehlerabschätzung wird die vierte Ableitung von f benötigt.

$$f^{(iv)}(x) = -4e^{(x-\pi/2)}\sin x$$

Mit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ gilt für die Zwischenstelle ξ in der Fehlerformel von Lagrange

$$0 \le x < \xi < \frac{\pi}{2} = x_0\,.$$

Fehlerabschätzung mit Hilfe des Restgliedes von Lagrange

$$\begin{aligned} |f(x) - T_3(x)| &= |R_3(x)| = \frac{1}{4!}\left|f^{(iv)}(\xi)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4\right| = \frac{1}{4!}\left|-4e^{(\xi-\pi/2)}\sin\xi\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4\right| \\ &= \frac{e^{(\xi-\pi/2)}}{6}|\sin\xi|\cdot\left|x-\frac{\pi}{2}\right|^4 \le \frac{e^0}{6}\cdot 1\cdot\left|\frac{\pi}{2}\right|^4 = \frac{\pi^4}{96} = 1.0146.... \end{aligned}$$

Der maximale Fehler für $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ wird in $x = 0$ angenommen (vgl. Funktionsgraphen) und beträgt

$$|f(0) - T_3(0)| = \left|-\frac{1}{3}\left(0-\frac{\pi}{2}\right)^3 + \left(0-\frac{\pi}{2}\right) + 1\right| = 0.72113...$$

Lösung 22:

a) Die Funktion $f(x) = (x-1)^2\sqrt{x} \ge 0$ ist nur für $x \ge x_1 = 0$ definiert.

Das Monotonieverhalten erhält man aus der Ableitung

$$f'(x) = 2(x-1)\sqrt{x} + \frac{(x-1)^2}{2\sqrt{x}} = \frac{4x(x-1)+(x-1)^2}{2\sqrt{x}} = \frac{(x-1)(5x-1)}{2\sqrt{x}} \quad \Rightarrow$$

$$f'(x)\begin{cases} >0 & , \quad 0 < x < 1/5 \quad \text{streng monoton wachsend} \\ =0 & , \quad x_2 = 1/5 \\ <0 & , \quad 1/5 < x < 1 \quad \text{streng monoton fallend} \\ =0 & , \quad x_3 = 1 \\ >0 & , \quad 1 < x \quad \text{streng monoton wachsend}\,. \end{cases}$$

Damit besitzt f in $x_1 = 0$ und $x_3 = 1$ mit $f(x_{1,3}) = 0$ jeweils ein globales Minimum und in $x_2 = 1/5$ ein lokales Maximum.

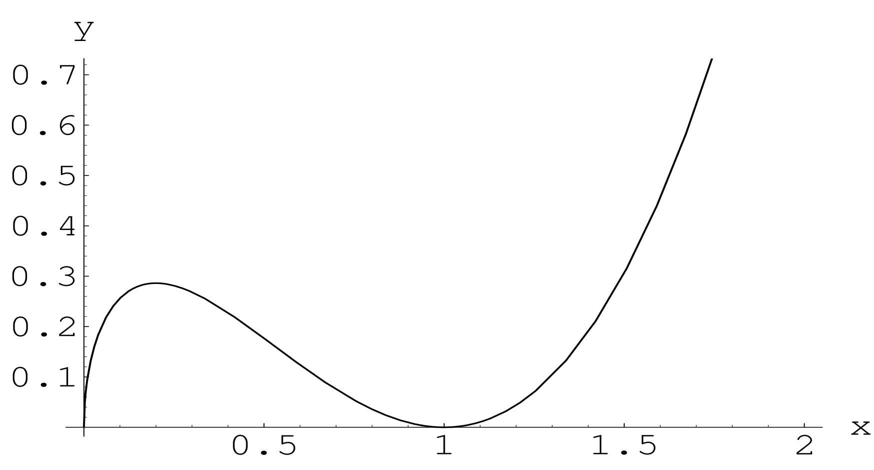


Bild 22 a) $\quad f(x) = (x-1)^2\sqrt{x}$

b) $g(x) = x^4 - 2x^3 + 2x\,,$

$g'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2\,,$

$g''(x) = 12x^2 - 12x$,

$g'''(x) = 24x - 12$

Berechnung der Wendepunktkandidaten:

$$g''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0\,, \quad x_2 = 1$$

Hinreichende Bedingung für die Wendepunktkandidaten, d.h. es gilt $g''(x) = 0$

$$g'''(0) = -12 < 0\,, \quad g'''(1) = 12 > 0.$$

Damit sind $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ Wendepunkte.

Das Krümmungsverhalten ergibt sich aus dem Vorzeichenverhalten von $g''(x)$.

$$g''(x) = 12x(x-1) \begin{cases} > \ 0 & , x < 0 & \text{konvex} \\ = \ 0 & , x_1 = 0 & \text{Wendepunkt} \\ < \ 0 & , 0 < x < 1 & \text{konkav} \\ = \ 0 & , x_1 = 1 & \text{Wendepunkt} \\ > \ 0 & , 1 < x \leq 4 & \text{konvex} \end{cases}$$

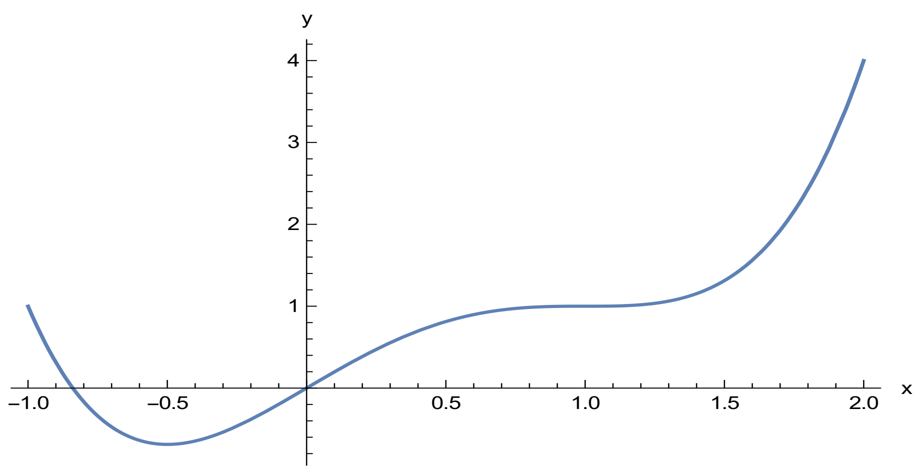


Bild 22 b) $\quad g(x) = x^4 - 2x^3 + 2x$

Lösung 23:

a) Für einen Fixpunkt muss $x = \Phi(x) = e^{-x^2} > 0$ gelten. Damit ist das Fixpunktproblem äquivalent zum Nullstellenproblem in g:

$$x = e^{-x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \ln x = -x^2 \quad \Leftrightarrow \quad g(x) := x^2 + \ln x = 0\,.$$

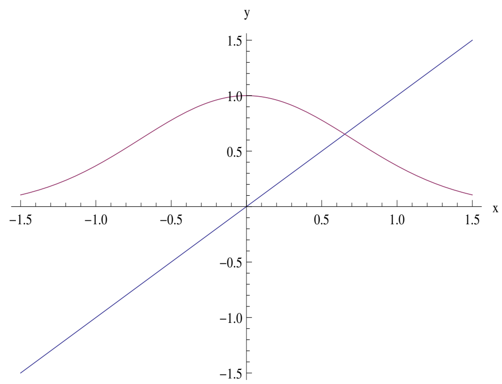


Bild 23 a) (i) $\Phi(x) = e^{-x^2}$

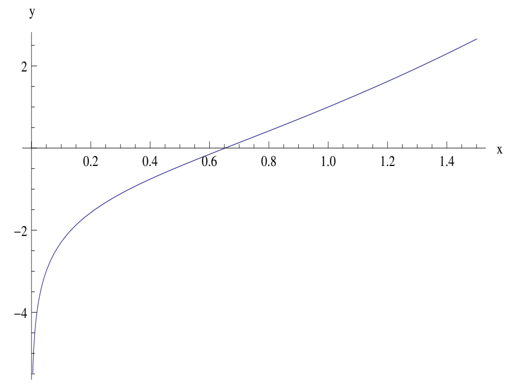


Bild 23 a) (ii) $g(x) = x^2 + \ln x$

Da $g'(x) = 2x + 1/x = \dfrac{2x^2+1}{x} > 0$ keine Nullstelle besitzt, hat g nach dem Satz von Rolle höchstens eine Nullstelle.

Wegen $-1.114 = g(0.3) < 0 < g(1) = 1$ besitzt g nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle $x^* \in [0.3, 1]$.

b) Für das Intervall $D = [0.3, 1]$ werden die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes überprüft:

(i) D ist ein abgeschlossens Intervall.

(ii) Da $\Phi'(x) = -2xe^{-x^2} < 0$ gilt, fällt Φ monoton. Es gilt also

$$\Phi(D) = [\Phi(1), \Phi(0.3)] = [0.367879, 0.913931] \subset [0.3, 1] = D.$$

(iii) Φ ist stetig differenzierbar. Eine Kontraktionskonstante in D erhält man durch

$$L = \max_{0.3 \le x \le 1} |\Phi'(x)| = \max_{0.3 \le x \le 1} 2xe^{-x^2}.$$

Die einfache Abschätzung

$$L = \max_{0.3 \le x \le 1} 2xe^{-x^2} \le 2 \cdot 1 \cdot e^{-0.3^2} = 1.82786...$$

ist zu grob und führt hier nicht zum Erfolg. Also berechnen wir das Maximum von $2xe^{-x^2}$.

Das Maximum von $-\Phi'(x) = 2xe^{-x^2}$ für $x > 0$ lautet $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, denn

$$-\Phi''(x) = (2 - 4x^2)e^{-x^2} = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707106$$

$$-\Phi'''(x) = (8x^3 - 12x)e^{-x^2} \;\Rightarrow\; -\Phi'''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -3.43106 < 0\,.$$

$$\Rightarrow\; L = -\Phi'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{2}{e}} = 0.857764 < 1,$$

d.h. Φ ist kontrahierend auf D.

Damit sind die Vorraussetzungen des Fixpunktsatzes erfüllt. Es gibt also genau einen Fixpunkt $x^* \in D$, das Fixpunktverfahren konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in D$ gegen x^* und es gelten die a priori- und a posteriori-Fehlerabschätzung.

Die Anzahl der Iterationsschritte, die zur näherungsweisen Berechnung des Fixpunktes mit $|x_n - x^*| < 10^{-3}$ höchstens erforderlich sein wird, kann aus der a priori-Fehlerabschätzung ermittelt werden. Für den Startwert $x_0 = 1$ erhält man $n = 55$ Iterationsschritte:

$$|x_n - x^*| < \frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0| < 10^{-3}$$

$$\Rightarrow \quad n > \frac{\ln\left(\frac{1-L}{1000|x_1-x_0|}\right)}{\ln L} = \frac{\ln\left(\frac{1-0.857764}{1000|0.367879-1|}\right)}{\ln 0.857764} = 54.7452\,.$$

Bemerkung:
Für das kleinere Intervall $\tilde{D} = [0.6, 0.7]$ hätte sich das Überprüfen der Voraussetzungen des Fixpunktsatzes vereinfacht:

(i) $\tilde{D}$ ist abgeschlossen.

(ii) Da $\Phi'(x) = -2xe^{-x^2} < 0$ gilt, fällt Φ monoton. Es gilt also

$$\Phi(\tilde{D}) = [\Phi(0.7), \Phi(0.6)] = [0.612626, 0.697677] \subset [0.6, 0.7] = \tilde{D}.$$

(iii) Φ ist stetig differenzierbar. Eine Kontraktionskonstante in $\tilde{D}$ erhält man durch

$$\max_{0.6\le x\le 0.7} |\Phi'(x)| = \max_{0.6\le x\le 0.7} 2xe^{-x^2} \le 2\cdot 0.7e^{-0.6^2} = 0.97675 =: L,$$

d.h. Φ ist kontrahierend auf $\tilde{D}$.

c) Ein Matlab-Programm zur Fixpunktberechnung mit a posteriori-Fehlerabschätzung als Abbruchkriterium:

```
>> funkt=inline('exp(-x^2)','x')
>> fixpunkt(1,0.001,funkt,0.857764)
k   x_k
0   1.000000000000000
1   0.367879441171442
2   0.873423018493117
3   0.466327188849762
4   0.804558944245307
5   0.523449303524930
6   0.760332703781490
7   0.560959919675917
8   0.730025341190366
9   0.586878773758940
10  0.708626496085312

11  0.605227105163029
12  0.693294886383425
```

```
13  0.618376490253921
14  0.682229284267378
15  0.627860798004814
16  0.674213008484768
17  0.634725167534274
18  0.668394949561601
19  0.639702657272359
20  0.664168438177241

21  0.643315687894463
22  0.661096754239330
23  0.645939832252161
24  0.658863915784303
25  0.647846392382618
26  0.657240711315025
27  0.649231870485364
28  0.656060662064603
29  0.650238804316043
30  0.655202780546884

31  0.650970675152818
32  0.654579116633342
33  0.651502646714191
34  0.654125729751525
35  0.651889330263142
36  0.653796133295116
37  0.652170411475896
38  0.653556530399603
39  0.652374732911592
40  0.653382350384373

41  0.652523258118945
42  0.653255730461682
43  0.652631224682351
44  0.653163684693425
45  0.652709708553056
46  0.653096772671291
47  0.652766760830746
48  0.653048131569901
49  0.652808233939293
50  0.653012772417529

51  0.652838382107290
52  0.652987068477312
```

Die gewählte Kontraktionskonstante $L = 0.857764...$ konnte wegen

$\Phi'(0.652987068477312) = 0.852619...$ also nicht wesentlich verbessert werden.

```
function x = fixpunkt(x0,eps,funkt,L)
%---------------------------------------------------------------
% Berechnet einen Fixpunkt mit Hilfe des Fixpunktverfahrens
%
% Input:    x0    Startwert
%           eps   Genauigkeit
%           funkt Verfahrensfunktion
%                 muss als inline Funktion definiert sein,
%                 z.B.: funkt=inline('exp(-x^2)','x')
%           L     Lipschitzkonstante,
%                 falls unbekannt L>1 setzen
%
% interne
% Variable: n     zählt die Iterationsschritte
%           x     nächste Iterierte
%
% Output:   x     Fixpunktnäherung
%
% Kai Rothe, März-2013.
%---------------------------------------------------------------
  n=0;
  [n x0]
  x = funkt(x0);
  if(0<L & L<1)
    while(L*abs(x-x0)/(1-L)>eps)
      x0 = x;
      n=n+1;
      [n x0]
      x  =  funkt(x0);
    end
  else
    while(abs(x-x0)>eps)
      x0 = x;
      n=n+1
      x  =  funkt(x0)
    end
  end
```

Lösung 24:
Die Funktion $f(x) = x(2-x)$ besitzt genau die Nullstellen $x^* = 0$ und $x^{**} = 2$.

Die durch f gegebene Newton-Folge lautet:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n(2-x_n)}{2(1-x_n)} = -\frac{x_n^2}{2(1-x_n)} .$$

a)

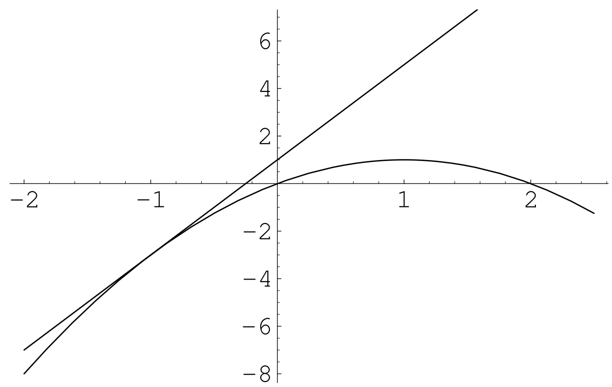


Bild 24: $f(x) = x(2-x)$ mit Tangente für $x_0 < 0$

Da $x_0 \leq 0$ vorausgesetzt ist, liegt aufgrund der Anschauung die Vermutung nahe, dass die Newton-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend gegen die Nullstelle $x^* = 0$ konvergiert.

Die Newton-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach oben beschränkt durch Null.

Beweis über Induktion:

$n = 0: \quad x_0 \leq 0$

$$n \to n+1: \quad x_{n+1} = -\frac{x_n^2}{2(1-x_n)} \leq 0 \quad \text{wegen} \quad x_n \leq 0$$

Die Newton-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wächst monoton.

Beweis direkt: für $x_n \leq 0$ gilt

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n(2-x_n)}{2(1-x_n)} \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} - x_n = -\frac{x_n(2-x_n)}{2(1-x_n)} \geq 0$$

Damit konvergiert die Newton-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine Nullstelle.

Wegen $x_n \leq 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^* = 0\,.$$

b) Mit $x^* = 0$ ergibt sich

$$|x_{n+1} - x^*| = |x_{n+1}| = \left|-\frac{x_n^2}{2(1-x_n)}\right| = \frac{|x_n - x^*|^2}{|2(1-x_n)|} \leq \frac{1}{2}|x_n - x^*|^2$$

Für den Startwert $x_0 = -1$ erhält man:

$$\begin{array}{lcl} x_0 &=& -1 \\ x_1 &=& -0.25 \\ x_2 &=& -0.025 \\ x_3 &=& -0.0003048... \\ x_4 &=& -0.00000004646... \\ x_5 &=& -0.000000000000001079... \end{array}$$