Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2014/15**

Übungsaufgaben zu
Analysis I
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Aufgabe A:

a) Man multipliziere aus: $(2a-5b)(b+a)-(4b+3a)(a-b)$.

b) Man klammere aus: $7a^2bx+21xy^3+7a^2bz^2+21y^3z^2$.

c) Man addiere die folgenden Brüche:

$$\text{(i) } \frac{a}{b}+\frac{b}{a}\,, \quad \text{(ii) } \frac{x}{x-3}+\frac{3}{2x}\,, \quad \text{(iii) } \frac{4x}{x-2}-\frac{2}{x^2-4}.$$

d) Durch Potenzrechengesetze vereinfache man die Terme:

$$\text{(i) } \sqrt{25y^4z^8}+\sqrt{144(yz^2)^4}\,, \quad \text{(ii) } \sqrt{25y^4z^8+144(yz^2)^4}.$$

e) Mit Hilfe der binomischen Formeln fasse man folgende Terme zusammen:

$$\text{(i) } x^2-6xy+9y^2\,, \quad \text{(ii) } 4a^4-12a^2b^2+9b^4\,, \quad \text{(iii) } 147a^2b-75b^3.$$

Aufgabe B:

Was stimmt an folgenden Rechnungen nicht:

a) Für ein festes $y \in \mathbb{R}$ werde $x \in \mathbb{R}$ durch $3x = 5y$ berechnet

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad 10y - 6x &= 15y - 9x \\
\Rightarrow \quad 20y - 12x &= 30y - 18x \\
\Rightarrow \quad 20y + 10xy - 30y^2 - 12x + 18xy - 6x^2 &= 30y + 10xy - 30y^2 - 18x + 18xy - 6x^2 \\
\Rightarrow \quad 10y(2 + x - 3y) - 12x + 18xy - 6x^2 &= 10y(3 + x - 3y) - 18x + 18xy - 6x^2 \\
\Rightarrow \quad 10y(2 + x - 3y) - 6x(2 + x - 3y) &= 10y(3 + x - 3y) - 6x(3 + x - 3y) \\
\Rightarrow \quad (10y - 6x)(2 + x - 3y) &= (10y - 6x)(3 + x - 3y) \\
\Rightarrow \quad 2 + x - 3y &= 3 + x - 3y \\
\Rightarrow \quad 2 &= 3
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
x &= -2 \\
\Rightarrow \quad 2x^2 &= -4x \\
\Rightarrow \quad 2x^2 + 4x + 2 &= 2 \\
\Rightarrow \quad 2(x^2 + 2x + 1) &= 2 \\
\Rightarrow \quad (x + 1)^2 &= 1 \\
\Rightarrow \quad x + 1 &= 1 \\
\Rightarrow \quad x &= 0\,.
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
0 &< \log 2 \\
\Rightarrow \quad \log 2 &< \log 2 + \log 2 = \log 4 \\
\Rightarrow \quad \log\left(4 \cdot \frac{1}{2}\right) &< \log\left(8 \cdot \frac{1}{2}\right) \\
\Rightarrow \quad \log 4 + \log\left(\frac{1}{2}\right) &< \log 8 + \log\left(\frac{1}{2}\right) \\
\Rightarrow \quad \log(4) \cdot \log\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\log\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 &< \log(8) \cdot \log\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\log\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 \\
\Rightarrow \quad \log(4)\,(\log 1 - \log 2) &< \log(8)\,(\log 1 - \log 2) \\
\Rightarrow \quad -\log(2) \cdot \log(4) &< -\log(2)\log(8) \\
\Rightarrow \quad \log(2)\,(\log(8) - \log(4)) &< 0 \\
\Rightarrow \quad (\log 2)^2 &< 0
\end{aligned}$$

Aufgabe C:

a) Man schreibe um in eine Summe bzw. ein Produkt:

(i) $1 - 4 + 7 - 10 + 13 \mp \cdots + 31 \; = \sum_{k=0}^{?} \cdots$

(ii) $\frac{2}{5} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{8}{15} \cdot \frac{16}{20} \cdot \cdots \cdot \frac{131072}{85} \; = \prod_{n=1}^{?} \cdots$

b) Man beweise direkt:

(i) $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ für $q \neq 1$,

(ii) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Aufgabe D:

a) Man gebe alle reellen Zahlen x an, für die $|3x + 4| - 3 < 2x + 3$ gilt.

b) Man berechne alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$, für die gilt

(i) $x + 1 = \sqrt{(x-1)^2}$,

(ii) $\sqrt{(x+1)^2} = x - 1$.

Aufgabe 1:

a) Man gebe für folgende Aussage die Wahrheitswerttafel an:

(i) $A \Rightarrow \neg B$,

(ii) $(B \Leftrightarrow C) \vee B$

b) Man zeige, dass folgende Aussage eine Tautologie ist:

$$((A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C)) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow A)) .$$

Aufgabe 2:

a) Man beweise: für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

(i) indirekt,

(ii) direkt.

b) Man beweise indirekt, dass $\log_2 6$ irrational ist.

Aufgabe 3:

Man stelle die folgenden Mengen durch Aufzählung ihrer Elemente dar

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^3 - 3x^2 - x + 3 \geq 0\}$,

b) $B = \left\{x \in \mathbb{R} \setminus \{3\} \;\middle|\; \frac{1}{(x-3)^2} + 7 = 2x\right\}$,

c) $C = \left\{x \in \mathbb{Z} \;\middle|\; \frac{1}{27} \leq 3^x < 243\right\}$.

d) Man bilde die Mengen $A \setminus C$, $B \setminus C$, $B \cup C$, $A \cap C$.

Aufgabe 4:

Gegeben seien die Mengen

a) $A = [-1, 0] \times [-1, 1]$,

b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; |x| + |y| \leq 1\}$,

c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Man stelle folgende Mengen graphisch dar: A, B, C, $A \cup C$, $A \cap C$, $C \setminus B$.

Aufgabe 5:

a) Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$ für die gilt: $x^2 \leq |3 - 2|x||$.

b) Man entscheide, welche der folgenden Funktionen injektiv, surjektiv und bijektiv sind und zeichne die zugehörigen Funktionsgraphen:

(i) $f_1 : [-4, 4] \to [0, 5]\,, \quad f_1(x) = |3 - 2|x||,$

(ii) $f_2 : [1, \infty[\to [0, \infty[\,, \quad f_2(x) = \ln x,$

(iii) $f_3 : [-\pi/4, \pi/4] \to [-1, 1]\,, \quad f_3(x) = \cos^2 x - \sin^2 x,$

(iv) $f_4 :]-1, 1[\to [-1, 1]\,, \quad f_4(x) = x^3.$

c) Eine Funktion heißt *gerade*, wenn $f(x) = f(-x)$ gilt, bzw. *ungerade*, wenn $f(-x) = -f(x)$ gilt. Welche der folgenden Funktionen sind gerade bzw. ungerade (man zeichne die Funktionsgraphen):

(i) $f_5(x) = \cos x + 2^x + 2^{-x}\,,$

(ii) $f_6(x) = (x - 2)^3 + 4\,.$

Aufgabe 6:

Man beweise für alle $n \in \mathbb{N}$ durch vollständige Induktion

a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,,$

b) $\displaystyle\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}\,,$

c) $a_n := (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$ ist durch 9 teilbar.

Aufgabe 7:

a) Zur Berechnung von

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k^2}{k^2 - 1}$$

finde man eine Formel (notfalls durch Probieren) und beweise diese (ggf. durch vollständige Induktion).

b) Für die Binomialkoeffizienten mit $n, m, k \in \mathbb{N}$ und $k \leq m \leq n$ weise man folgende Beziehungen nach:

$$\binom{n}{m} \cdot \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{m-k}\,.$$

Aufgabe 8:

a) Man bestimme für die Zahlen 119301 und 43010 den ggT und das kgV

(i) unter Verwendung des Euklidischen Algorithmus,

(ii) mit Hilfe der Primfaktorzerlegung.

b) Man überprüfe, ob folgende Mengen nach unten bzw. oben beschränkt sind und bestimme gegebenenfalls Infimum und Supremum

(i) $M_1 = [0, 20[\cap [10, \infty[$,

(ii) $M_2 = [1, 7[\cup \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{n^2}{3n+1}\ ,\ n \in \mathbb{N} \right\}$.

Aufgabe 9:

Man untersuche die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert:

$$a_n = \sqrt{4n^2 + 11n} - \sqrt{4n^2 - 3}\,, \qquad b_n = \sqrt[3]{\frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 2}{8n^3 + 4n^2 + 2}}\,,$$

$$c_n = \frac{n^2 + 3}{n - 1} - \frac{n^3 + 2}{n^2 + 4n}\,, \qquad d_n = \left(\frac{4n + 5}{4n}\right)^{3n}\,,$$

$$e_n = \frac{(-1)^n + 15 \cdot 7^{n-1}}{10 \cdot 4^{n+2} - 3 \cdot 7^{n+1}}\,, \qquad f_n = \frac{n + i^n}{3n} \quad (\in \mathbb{C})\,.$$

Aufgabe 10:

Man untersuche die folgenden rekursiv definierten Folgen auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert:

a) $a_1 = 1\,, \quad a_{n+1} = \dfrac{5 - 3a_n}{4}$,

b) $b_1 = 3,\ b_{n+1} = \dfrac{b_n^2 + 8}{6}$,

c) $c_1 = 2,\ c_{n+1} = \dfrac{13}{6 - c_n}$,

d) $d_1 = 2,\ d_{n+1} = \sqrt{6 + d_n}$.

Aufgabe 11:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 - x - 6$, sowie die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die sich aus dem Newton-Verfahren zur Nullstellenberechnung von f mittels Startwert $x_0 \geq 3$ ergibt.

a) Man zeige, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine Nullstelle x^* konvergiert und berechne diese.

b) Man zeige, dass die Folge (lokal) quadratisch konvergiert, d.h. es gibt eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit

$$|x_{n+1} - x^*| \leq c|x_n - x^*|^2 \,.$$

Aufgabe 12:

Man zeige, dass die rekursiv definierte Folge

$$x_0 = a\,, \quad x_1 = b\,, \quad x_n = 9x_{n-1} - 20x_{n-2} \quad \text{für } n \geq 2$$

folgende explizite Darstellung für $n \in \mathbb{N}$ besitzt:

$$x_n = (5a - b)4^n + (b - 4a)5^n \,.$$

Hinweis: Für den Beweis eignet sich die vollständige Induktion.

Aufgabe 13:

Man untersuche die angegebenen Folgen auf Konvergenz

a) $$\boldsymbol{x}_n = \left(\frac{3n}{3^n},\ \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right),\ \frac{(-1)^n(n+1)}{n^2+1} \right)^T, \quad n \in \mathbb{N},$$

b) $$\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x_n \cos y_n}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{3y_n \cos x_n}{4} \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Hinweis: Eine geeignete Norm erleichtert das Leben.

Aufgabe 14:

a) Man stelle die reelle Zahl $x = 2.71\overline{82}$ unter Verwendung der Summenformel der geometrischen Reihe als Bruch dar.

b) Man zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 + 3 \cdot (-1)^n}{n+1}$$

alterniert und dass für $b_n := \dfrac{2 + 3 \cdot (-1)^n}{n+1}$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Warum ist das Leibniz-Kriterium nicht anwendbar?

Aufgabe 15:

Gegeben sei die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+3}}$.

a) Man zeige, dass die Reihe konvergiert.

b) Wie groß ist der Fehler maximal, wenn man anstelle des Grenzwertes S der Reihe die Partialsumme S_0 verwendet?

c) Ab welchem Index k unterscheiden sich die Partialsummen

$$S_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+3}}$$

vom Grenzwert S der Reihe um weniger als 0.01?

d) Wie lauten die ersten zwei Nachkommastellen des Grenzwertes S?

Aufgabe 16:

Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{4n+5}\right)^n$,

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^k}{k2^k}$,

c) $\displaystyle\frac{4}{6}+\frac{8}{11}+\frac{12}{16}+\frac{16}{21}+\frac{20}{26}+\cdots$,

d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$.

Aufgabe 17:

a) Gegeben seien die folgenden Mengen:

$$D_1 = \,]7,10[\;, \quad D_2 = [-4,4]\cup\left\{\frac{9n}{1-2n}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\},$$
$$D_3 = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0\le y\le 1-x^2\right\}.$$

Für jede Menge gebe man die Menge ihrer Häufungspunkte D' bzw. inneren Punkte D^0 an, und kläre, ob die Menge abgeschlossen oder offen ist?

b) Man berechne die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\ln|x|-e^x$,

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to -1+}\frac{x^2-1}{\sqrt{x+1}}$.

Aufgabe 18:

a) Man zeichne die durch

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

gegebene Funktion und überprüfe, ob sie in $x_0 = 0$ stetig ergänzt werden kann.

b) Man zeichne die durch

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 3 & \text{für} \quad x < -1 \\ 2 & \text{für} \quad x \geq -1 \end{cases}$$

gegebene Funktion und untersuche mit Hilfe des ε-δ-Kriteriums, ob sie in $x_0 = -1$ stetig ist.

Aufgabe 19:

a) Man bestimme eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften $f(2) = 5$ und

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad -\infty < x < -1\,, \\ -1 & \text{für} \quad -1 < x < 1\,, \\ 2x & \text{für} \quad 1 < x < \infty \end{cases}$$

und zeichne die Funktion. Ist f auch differenzierbar?

b) Für die Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} \sin x\,, & x < \pi \\ ax + b\,, & \pi \leq x \end{cases}$$

bestimme man $a, b \in \mathbb{R}$, sodass f in $x_0 = \pi$ stetig differenzierbar wird und zeichne f.

c) Man berechne die Tangentengleichung zu $f(x) = \ln x$ im Punkt $x_0 = 1$ und fertige eine Zeichnung an.

Aufgabe 20:

a) Man berechne die erste Ableitung der folgenden Funktionen

$$\text{i) } f(x) = (5x^2)^x \,, \qquad \text{ii) } g(x) = x - \sinh x \cosh x \,.$$

b) Man berechne die ersten beiden Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$\text{i) } h(x) = \frac{x^2}{x^4+1} \,, \qquad \text{ii) } k(x) = \ln(\cos x) \,.$$

c) Man berechne die ersten drei Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$\text{i) } u(x) = 7(x-1)(x^2+x+1) \,, \qquad \text{ii) } v(x) = \sqrt{2-3x} \,.$$

Aufgabe 21:

Gegeben sie die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x^3 - x - \frac{4}{5} + \cos x \,. \end{aligned}$$

Man zeige mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass die Funktion mindestens drei Nullstellen besitzt und mit Hilfe des Satzes von Rolle, dass sie höchstens drei und damit dann genau drei Nullstellen besitzt.

Aufgabe 22:

Man berechne das Taylor-Polynom vom Grad 3 für die durch

$$f(x) = e^{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$$

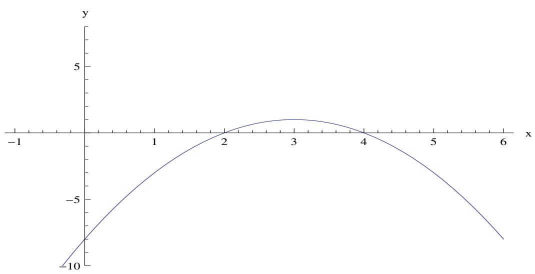
gegebene Funktion zum Entwicklungspunkt $x_0 = -\dfrac{\pi}{6}$ und schätze den Approximationsfehler $\left| f(0) - T_3\left(0; -\dfrac{\pi}{6}\right) \right|$ mit Hilfe der Restgliedformel von Lagrange nach oben ab.

Aufgabe 23:

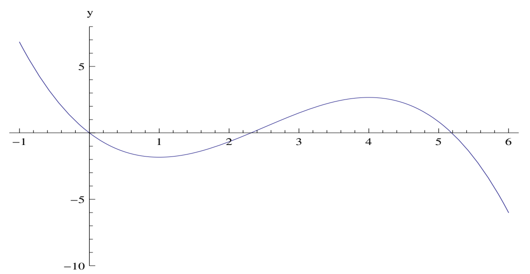
a) Man berechne die folgenden Grenzwerte

$$\text{(i)} \lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+1}{x^2}\,, \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to 0} \frac{3}{x} - \frac{6}{e^{2x}-1}\,.$$

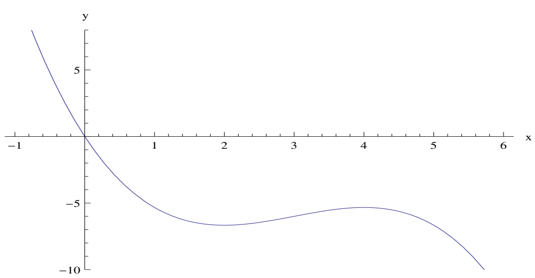
b) Nur die Ableitung $g'(x) = -x^2 + 6x - 8$ ist von der reellwertigen Funktion g bekannt. Man gebe die Monotoniebereiche von g an und klassifiziere alle Extremwerte. Anschließend begründe man, welcher der unten angegebenen Funktionsgraphen g_i mit dem von g übereinstimmt.



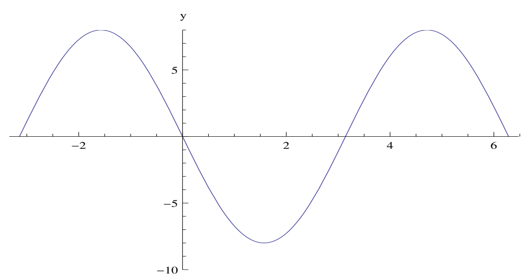
Funktion g_1



Funktion g_2



Funktion g_3



Funktion g_4

Aufgabe 24:

Gegeben sei die durch

$$f(x) = \ln\left|x + \frac{1}{x}\right|$$

definierte reellwertige Funktion.

Man diskutiere die Funktion f. Dazu bestimme man im Einzelnen: Definitionsbereich, Symmetrie, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, Verhalten im Unendlichen, Nullstellen, Monotonieverhalten, Extrema, Konvexität und Wendepunkte. Abschließend skizziere man den Graphen von f.