Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2008**
Dr. K. Rothe

Anleitungsaufgaben zu komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Aufgabe 1:
Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 := \dfrac{5 - i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} - 1$ und $z_2 := -1 + i$.

a) Man ermittle Real- und Imaginärteil von z_1 und die Polardarstellungen von z_1 und z_2.

b) Man bestimme z_2^{12} .

c) Man gebe alle Lösungen der Gleichung $(w - z_2)^4 = -64$ in kartesischen Koordinaten an.

Aufgabe 2:
Man skizziere die folgenden Punktmengen in der komplexen Zahlenebene:

a) $\{z \in \mathbb{C} : |4z + 3 + 2i| = 1\}$,

b) $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \mathrm{Re}(z) , 0 \leq \mathrm{Im}(z)\}$,

c) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}((2 + i)z) = 1\}$,

d) $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \arg(z) \leq \pi/2 , 1 \leq |z| \leq 2\}$.

Aufgabe 3:
Man untersuche die Folge

$$z_0 = 1 + i , \quad z_{n+1} = \frac{i}{2}(2 - i + z_n)$$

auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert.

Aufgabe 4:

a) Man bestimme das Bild von

$$K := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \Re(z)\ ,\ 0 \leq \Im(z)\ ,\ \Re(z)^2 + \Im(z)^2 \leq 1\}$$

unter der durch $f(z) = ((1+i)z)^2$ definierten Abbildung.

b) Man berechne:

(i) $\exp(1 + i\pi)$, (ii) $\exp(2 + i\pi/2)$, (iii) $\exp(1 + i\pi) \cdot \exp(2 + i\pi/2)$

sowie $\exp(3 + i3\pi/2)$ und überprüfe an diesem Beispiel die Gültigkeit der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion in $\mathbb{C}$,

Aufgabe 5:

a) Man bestimme das Bild von

$$R := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \Re(z) \leq \ln 4\ ,\ 0 \leq \Im(z) < \pi\}$$

unter der durch $f(z) := \sqrt{e^z}$ definierten Abbildung, wobei $\sqrt{w}$ der Hauptwert der Wurzelfunktion ist.

b) Man berechne

$$\begin{array}{rl} \text{(i)} & \ln(-3i)\ , \\ \text{(ii)} & \ln(-1-i)\ , \\ \text{(iii)} & \ln(-3i) + \ln(-1-i) \\ \text{(iv)} & \ln(-3i(-1-i)) \end{array}$$

und diskutiere allgemein für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ die Beziehung

$$\ln(z_1 z_2) = \ln(z_1) + \ln(z_2)\ ,$$

wobei $\ln z$ der Hauptwert des Logarithmus ist.

Aufgabe 6:

a) Die cosh-Funktion wird im Komplexen definiert durch

$$\cosh z = \frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right) .$$

Man berechne Real- und Imaginärteil von $\cosh z$ und bestimme alle Lösungen von $\cosh z = 0$.

b) Gegeben seien die Punkte

$$z_1 = 0,\ z_2 = -2i,\ z_3 = 1 - i$$

und

$$w_1 = 0,\ w_2 = 1,\ w_3 = -1 .$$

(i) Man berechne die Möbius-Transformation T, für die mit $j = 1, 2, 3$ gilt:

$$w_j = T(z_j) .$$

(ii) Liegen $z_0 = -1 - i$ und z_1, z_2, z_3 auf einem (verallgemeinerten) Kreis?

(iii) Liegen $w_0 = T(z_0)$ und w_1, w_2, w_3 auf einem (verallgemeinerten) Kreis?

Aufgabe 7:
Für die Inversion $w = f(z) := \dfrac{1}{z}$ mit $z \neq 0$ bestimme man das Bild

a) der Geraden $\Re(z) = 2$,

b) des Strahls $\Re(z) > 0 \wedge \Im(z) = 0$,

c) des Kreises $|z| = 3$,

d) des Kreises $|z - 2i| = 2$ und

e) des Kreises $|z - 2i| = 1$.

Aufgabe 8:
Gegeben sei die Abbildung $T :\ \mathbb{C}^* \ \to\ \mathbb{C}^*$ mit

$$T(z) = \frac{z+2}{z-2} .$$

a) Handelt es sich bei T um eine Möbius-Transformation?

b) Man berechne die Umkehrabbildung.

c) Man bestimme das Bild der reellen Achse.

d) Man bestimme das Bild des Kreises $|z| = 2$.

e) Man bestimme das Bild der imaginären Achse.

f) Wohin wird der Halbkreis H abgebildet?

$$H := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 2 \, , \, \Im(z) \geq 0\}$$

Aufgabe 9:

a) Man überprüfe, welche der folgenden Funktionen holomorph in $\mathbb{C}$ sind:

(i) $f(z) = ze^z$,

(ii) $f(z) = \sin(\mathrm{Re}\ z)$,

(iii) $f(z) = z^2 + 2\bar{z} + 1$,

(iv) $f(z) = |z|^2 + 2$.

b) Man zeige, dass

$$u(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 2x^2 - 2y^2 + 1$$

harmonisch ist und konstruiere eine zu u konjugiert harmonische Funktion $v(x, y)$, d.h. eine Funktion v, für die die Funktion $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ mit $z = x + iy$ holomorph wird.

Aufgabe 10:

a) Es sei $z = re^{i\varphi}$ und $f(z) = u(r, \varphi)+iv(r, \varphi)$. Man zeige, dass die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen in Polarkoordinaten die Gestalt

$$ru_r = v_\varphi \, , \quad rv_r = -u_\varphi$$

besitzen.

b) Man zeige unter Verwendung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

(i) in kartesischen Koordinaten und

(ii) in Polarkoordinaten,

dass $f(z) = e^z$ holomorph ist.

Aufgabe 11:
Gegeben sei die durch $w = f(z) := z^2$ definierte konforme Abbildung .

a) In welche Kurven der w-Ebene gehen die Geraden der z-Ebene $c_1(t) = t + i$ und $c_2(t) = 1 + it$ mit $t \in \mathbb{R}$ unter f über?

b) Man überprüfe die Erhaltung der Winkel und der lokalen Längenverhältnisse im Schnittpunkt der Bildkurven aus a).

Aufgabe 12:

a) Man skizziere die Gerade $G = \{z \in \mathbb{C} \mid \ z = -1 + it\ ,\ t \in \mathbb{R}\}$ und den Kreis $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-2| = \sqrt{5}\}$ und berechne die beiden Punkte z_1 und z_2, die symmetrisch zu G und K liegen.

b) Man bestimme alle konformen Funktionen

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

mit $T(z_1) = 0$ und $T(z_2) = \infty$.

c) Man skizziere das Bild von G und K unter T, wenn noch $T(-1) = -1$ gilt.

Aufgabe 13:
Gegeben sei die rechts der Geraden $G = \{z \in \mathbb{C} \mid \ z = -1 + it\ ,\ t \in \mathbb{R}\}$ liegende Halbebene E ohne die Kreisscheibe $K = \{z \in \mathbb{C} \mid \ |z-2| \leq \sqrt{5}\}$ (vgl. Aufgabe 12).

Man berechne eine in E harmonische Funktion, die auf dem Rand von K den Wert 1 und auf G den Wert 0 annimmt.

Hinweis: Man transformiere das Problem, wie in Aufgabe 12 angegeben, löse das konform verpflanzte Problem in Polarkoordinaten und transformiere zurück.

Aufgabe 14:
Man berechne

a) $\displaystyle\int_0^\pi e^{2+3it}\,dt,$

b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{4it+3}\,dt,$

c) $\displaystyle\int_{c_{1,2}} 4z + 5\bar{z}\, dz,$

dabei ist c_1 der geradlinige Weg von $z_1 = -i$ nach $z_2 = i$ und c_2 der in mathematisch positivem Sinn durchlaufene Ursprungshalbreis der auch z_1 und z_2 verbindet,

d) $\displaystyle\oint_{c} 6\bar{z} - 5\, dz$

für den im mathematisch positiven Sinn durchlaufene Rand c des Quadrates mit den Eckpunkten $\pm 1 \pm i$.

Aufgabe 15:
Man berechne direkt und mit Hilfe einer Stammfunktion

a) $\displaystyle\int_{c} 2z - 3\, dz$ entlang des geradlinigen Weges von $-1 - i$ nach $-i$,

b) $\displaystyle\int_{c} ze^{z}\, dz$ für $c(t) = i\pi t$ mit $-1 \le t \le 0,$

c) $\displaystyle\int_{-i}^{1} \frac{z+1}{z}\, dz$ für $c(\varphi) = e^{i\varphi}$ (positiv orientiert).

Aufgabe 16:

a) Man berechne die Taylorreihe von $f(z) = \displaystyle\int_1^z \frac{d\xi}{5 - 3\xi}$ zum Entwicklungspunkt $z_0 = 1$ und bestimme den Konvergenzradius.

b) Man bestimme die Konvergenzradien der Taylor-Reihen folgender Funktionen zu den angegebenen Entwicklungspunkten z_0, ohne die Reihen selbst zu berechnen:

(i) $f(z) = \dfrac{5z}{z^2 - 2z + 2}\,, \quad z_0 = -1$ und $z_0 = -1 - i$,

(ii) $f(z) = \dfrac{1}{\cosh z}\,, \quad z_0 = \dfrac{7i}{2}$,

(iii) $f(z) = \ln(3z + 5)\,, \quad z_0 = 0$ und $z_0 = i$.

Aufgabe 17:
Man berechne ggf. mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel die folgenden Kurvenintegrale (alle auftretenden Kurven seien positiv orientiert):

a) $\displaystyle\oint_c \frac{1}{z+2}\,dz, \quad c: \; |z+1-i| \;=\; 1,$

b) $\displaystyle\oint_{c_{1,2}} \frac{z^2+3}{z+1}\,dz, \quad c_1: \; |z+i| \;=\; 1.3, \quad c_2: \; |z+i| \;=\; 1.5,$

c) $\displaystyle\oint_{c_{1,2}} \frac{\cos z}{z^2-\pi^2}\,dz, \quad c_1: \; |z+2| \;=\; 2, \quad c_2: \; |z-1.5| \;=\; 2,$

d) $\displaystyle\oint_c \frac{z^2+3z-1}{z^2+z-2}\,dz, \quad c: \; |z-i| \;=\; 3,$

e) $\displaystyle\oint_c \frac{\ln z}{(z-1-i)^5}\,dz, \quad c: \; |z-1-2i| \;=\; 2.$

Aufgabe 18:
Gegeben sei die durch

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^3}$$

definierte Funktion f. Berechnet werden soll die Taylor-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad (*)$$

mit Konvergenzradius r. Dazu berechne man die Koeffizienten a_n auf verschiedene Weise:

a) $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

b) Unter Verwendung der Summenformel der geometrischen Reihe.

c) Über eine Rekursionsformel, die entsteht, wenn man nach Multiplikation von $(*)$ mit dem Nenner von f einen Koeffizientenvergleich durchführt (Cauchy-Produkt).

Man bestätige, dass die in a) - c) ermittelten Koeffizienten identisch sind, ggf. durch einen Induktionsbeweis.

Aufgabe 19:
Man gebe alle Potenzreihenentwicklungen der Funktion

$$f(z) = \frac{2z}{z^2 - 1}$$

zum Entwicklungspunkt

$$\text{a)} \quad z_0 = 2 \quad \text{und} \quad \text{b)} \quad z_0 = -1$$

mit Konvergenzbereich an.

Aufgabe 20:
Man bestimme die Laurententwicklung der folgenden Funktionen und gebe jeweils den Koeffizienten a_{-1} der Reihe an:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad f(z) &= \frac{\exp(z-2)}{z-2} \quad \text{im Punkt} \quad z_0 = 2, \\ \text{b)} \quad f(z) &= z^2 \cosh\left(\frac{1}{z+1}\right) \quad \text{im Punkt} \quad z_0 = -1\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 21:
Für die folgenden Funktionen

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad f(z) &= \frac{z^2 + z - 2}{z^3 - 2z^2}, & \text{b)} \quad f(z) &= \frac{1 + z - \exp(z)}{z^4}, \\ \text{c)} \quad f(z) &= \cosh\frac{1}{z} - \sinh\frac{1}{z}, & \text{d)} \quad f(z) &= \frac{z - \pi}{\sin z}\,. \end{aligned}$$

bestimme man:

Lage und Art der (endlichen) Singularitäten, die zugehörigen Residuen und die ersten vier (nichtverschwindenden) Summanden der Laurentreihe um $z = 0$, die für große z konvergiert.

Aufgabe 22:
Gegeben sei die Funktion

$$f(z) = \frac{z^3 - 3z^2 - 7z + 3}{z^4 - 4z^3 + 5z^2 - 4z + 4}\,.$$

a) Man bestimme mit Hilfe der Laurent-Reihe die Partialbruchzerlegung von f.

b) Man berechne mit Hilfe des Residuensatzes das Integral

$$\oint\limits_{c_{1,2}} f(z)\, dz$$

für die Kreise $c_k : \ |z - 1.5| = k \ , \ k = 1, 2 \quad .$

Aufgabe 23:
Man berechne mit Hilfe des Residuenkalküls die Integrale

a) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 4x + 6}\, dx,$

b) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4 + 324}\, dx$ und

c) $\displaystyle\int\limits_{-2}^{\infty} \frac{x - 1}{(x^2 + 3x - 4)\sqrt{x + 2}}\, dx \ .$

Aufgabe 24:
Mittels Residuenkalkül berechne man die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\sin \varphi}{4 + \cos \varphi}\, d\varphi \ ,$

b) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi} \frac{d\varphi}{2 + \cos^2 \varphi} \ .$

Hinweis: Mit $z = e^{i\varphi}$ substituiere man

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \text{ bzw. } \sin \varphi = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right).$$