

Hörsaalübungsaufgaben zu Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Aufgabe 1:

a) Man bestimme den Typ der folgenden partiellen Differentialgleichungen:

(i) $u_x + u^2 u_y = 3x + 4y - 6u + 5,$

(ii) $u_{xy} + y^2 u_y^2 = e^u + x^2 + y^2,$

(iii) $u_{xx}^2 + x^2 u_{yy} = 1 + 2x + 3y + 4u + 5u_x + 6u_y,$

(iv) $\ln(u_x + u_y) + u_x + u_y = 1,$

(v) $\begin{pmatrix} x u_x \\ x v_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_y \\ -u_y \end{pmatrix}.$

b) Man zeige, dass folgende Funktionen harmonisch sind:

(i) $u_1(x, y) = x^3 - 3xy^2$

(ii) $u_2(x, y) = 3x^2y - y^3$

(iii) $u_3(x, y) = \operatorname{Im}(e^z + z) + 6\operatorname{Re}(z)$ mit $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 2:

Man löse folgende Differentialgleichungen

a) $u_{yy} - 4xu_y + 3x^2u = -8x + 3x^3 + 6x^2y,$

b) $u_{xy} = 2x \cos y + e^x + 3y^2,$

c) $x(x+1)u_{xy} = (2x+1)u_y.$

Aufgabe 3:

Man berechne mit Hilfe von Exponentialansätzen reelle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

$$\text{a) } u(t, x) = e^{x+\alpha t} \quad \text{für} \quad u_{tt} = 9u_{xx} ,$$

$$\text{b) } u(x, y, z) = e^{\alpha x + \beta y + \gamma z} \quad \text{für} \quad u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - 2u_z + u = 0 .$$

Aufgabe 4:

Man löse die Anfangswertaufgabe

$$2v_t + 5v_x = 12tx + 15t^2 , \quad v(0, x) = \cos(2x)$$

und zeichne die Lösung.

Hinweis: Durch eine geeignete lineare Transformation

$$\begin{aligned} r &= at + bx \\ s &= ct + dx \end{aligned}$$

mit $ad - bc \neq 0$ transformiere man die Differentialgleichung auf eine gewöhnliche Differentialgleichung.

Aufgabe 5:

Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\text{a) } (2x - y)u_x + yu_y = 0 ,$$

$$\text{b) } 4xu_x - 12xyu_y - x^2z^2u_z = 0 .$$

Aufgabe 6:

Man löse die Anfangswertaufgabe

$$xu_x + (x + 2y)u_y = 3u - 2x \quad \text{mit} \quad u(2x, 2x) = 2x + 8x^2$$

unter Verwendung der Charakteristikenmethode.

Aufgabe 7:

Gegeben sei die partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$xu_x + 2xu_y = y.$$

- a) Man berechne die allgemeine Lösung.
- b) Man bestimme mit dem Ergebnis aus a) die Lösung, die der Anfangsbedingung $u(1, y) = y$ genügt.
- c) Man führe die Probe für die berechnete Lösung aus b) durch.
- d) Man bestimme mit dem Ergebnis aus a) die Lösung, die der Anfangsbedingung $u(x, 2x) = 3x$ genügt.

Aufgabe 8:

Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem für die Burgers-Gleichung

$$u_t + uu_x = 0 \quad \text{für } (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \quad \text{mit } u(x, 0) = u_0(x).$$

- a) Man berechne die allgemeine Lösung mit Hilfe der Charakteristikenmethode.
- b) Man löse die Aufgabe für die Anfangsdaten
 - (i) $u_0(x) = 2(x + 1)$ und
 - (ii) $u_0(x) = 2(1 - x)$,zeichne die charakteristischen Grundkurven und gebe den Zeitpunkt T an, bis zu dem die Lösung existiert.

Aufgabe 9:

Gegeben sei das Anfangswertproblem für die Burgers-Gleichung

$$u_t + uu_x = 0 \quad \text{für } (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T)$$

mit

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq -2 \\ 1 & , \quad -2 < x \leq 0 \\ -1 & , \quad 0 < x \end{cases}.$$

- a) Man berechne die Entropielösung für $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, 2)$.
- b) Man zeichne die Grundcharakteristiken ggf. mit Stoßfront im Rechteck $(x, t) \in (-3, 1) \times (0, 2)$.
- c) Man zeichne $u(x, 0)$, $u(x, 1)$, $u(x, 2)$ für $x \in (-3, 1)$.

Aufgabe 10:

Man schreibe folgende partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung in Matrix-Vektorschreibweise, bestimme den Typ und skizziere im \mathbb{R}^2 gegebenenfalls die Gebiete unterschiedlichen Typs:

- a) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} - 3u_y + x^2u = 1$,
 b) $(y + 2)u_{xx} + 4xu_{xy} + u_{yy} + 3u_x - e^x u_y + 27u = 23 \sin(y - \pi)$,
 c) $4u_{xx} - 4u_{xz} + 2u_{yy} + 4u_{zz} + x^2u_x - 9yu_z + 4u = 0$.

Aufgabe 11:

Gegeben sei die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{17}{10}u_{xx} - \frac{9}{5}u_{xy} - \frac{7}{10}u_{yy} + \sqrt{10}u_x = x + 3y .$$

- a) Man bestimme den Typ der Gleichung und
 b) transformiere sie auf Normalform.

Aufgabe 12:

- a) Man zeige, dass die Wellengleichung $u_{tt} = 4u_{xx}$ folgende allgemeine Lösung besitzt:

$$u(x, t) = f(x - 2t) + g(x + 2t) , \quad f, g \in C^2 .$$

Tipp: Man transformiere u auf die Koordinaten $\xi = x - 2t$ und $\eta = x + 2t$ und berechne die allgemeine Lösung der transformierten Differentialgleichung.

- b) Man zeige, dass das folgende Randwertproblem für die Wellengleichung keine Lösung besitzt.

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 4u_{xx} , & 0 < x, t < 1 \\ u(x, 0) &= x - x^2 , & 0 \leq x \leq 1 , \\ u(x, 1) &= 0 , \\ u(0, t) &= 0 , & 0 \leq t \leq 1 , \\ u(1, t) &= 0 . \end{aligned}$$

Man überprüfe auch, ob die vorgegebenen Randwerte in den Eckpunkten verträglich sind.

Aufgabe 13:

Man löse die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0, & 0 < x < 1, & \quad 0 < y < 2, \\ u(x, 0) &= 2 \sin(3\pi x), & u(x, 2) &= 0, & \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, y) &= 0, & u(1, y) &= 0, & \quad 0 \leq y \leq 2\end{aligned}$$

durch einen Separationsansatz der Form $u(x, y) = f(x) \cdot g(y)$, berechne minimalen und maximalen Funktionswert von u und zeichne die Lösung.

Aufgabe 14:

Gegeben sei das folgende Dirichlet-Problem im Kreisring $2 < r = \sqrt{x^2 + y^2} < 3$ (in Polarkoordinaten):

$$\begin{aligned}r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} &= 0, \\ u(2, \varphi) &= \cos \varphi, \\ u(3, \varphi) &= 1 + \frac{65}{144} \sin(2\varphi).\end{aligned}$$

Man berechne die Lösung in Polarkoordinaten, gebe sie in kartesischen Koordinaten an und zeichne sie.

Aufgabe 15:

Man berechne die Lösung des folgenden Dirichlet-Problems im Halbkreis

$$\begin{aligned}r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} &= 0 \quad \text{für } 0 < r < 6 \quad \text{und} \quad 0 < \varphi < \pi, \\ u(r, 0) &= 0 \quad \text{und} \quad u(r, \pi) = 0 \quad \text{für } 0 \leq r \leq 6, \\ u(6, \varphi) &= \left| \varphi - \frac{\pi}{2} \right| - \frac{\pi}{2} \quad \text{für } 0 \leq \varphi \leq \pi,\end{aligned}$$

bestimme den maximalen und minimalen Funktionswert von u und zeichne die Lösung.

Aufgabe 16:

Für den Kreisring $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ löse man das Problem (in Polarkoordinaten) mit gemischten Randdaten

$$\begin{aligned}r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} &= 0, & 1 < r < 2, \\ u(1, \varphi) &= 0, \\ u_r(2, \varphi) &= \frac{5}{2} + \frac{195}{64} \cos 3\varphi,\end{aligned}$$

zeichne die Lösung und gebe sie auch in kartesischen Koordinaten an.

Aufgabe 17:

- a) Man zeige, dass der Laplace-Operator im \mathbb{R}^2 invariant gegenüber Drehungen ist, d.h. für die um den Winkel φ gedrehten Koordinaten

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

gilt $u_{xx} + u_{yy} = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}$.

- b) Unter Verwendung der Mittelwerteigenschaft berechne man für die Lösung u des Problems

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 && \text{für } (x-1)^2 + (y-1)^2 < 25, \\ u(x, y) &= xy && \text{für } (x-1)^2 + (y-1)^2 = 25 \end{aligned}$$

den Wert $u(1, 1)$.

Aufgabe 18:

Man berechne die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe für folgende Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} && \text{für } 0 < x < 4, \\ & && 0 < t \leq T, \\ u(0, t) &= 0 && \text{für } 0 \leq t \leq T \\ u(4, t) &= 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x) && \text{für } 0 \leq x \leq 4 \end{aligned}$$

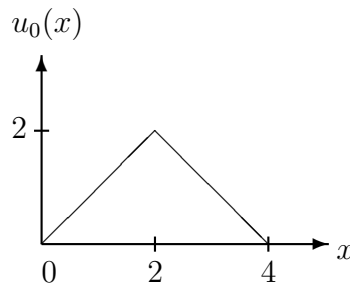


Bild 18 Anfangsfunktion u_0

und bestimme den Maximalwert der Lösung u im Gebiet $[0, 4] \times [0, T]$.

Aufgabe 19:

Gegeben sei folgende Anfangsrandwertaufgabe für die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t &= 4u_{xx} \quad \text{für } 0 < x < 6, \quad 0 < t \\ u(0, t) &= 3 \quad \text{für } 0 \leq t \\ u(6, t) &= 3 \\ u(x, 0) &= u_0(x) \quad \text{für } 0 \leq x \leq 6. \end{aligned}$$

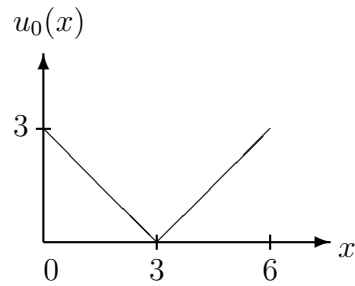


Bild 19 Anfangsfunktion u_0

- Man gebe $u_0(x)$ an.
- Man transformiere das gegebene Problem in u zuerst in ein Problem in v mit homogenen Randbedingungen.
- Man löse das transformierte Problem in v .
Hinweis: Es darf die sich aus dem Produktansatz ergebende Lösungsdarstellung verwendet werden.
- Man gebe die Lösung u an.
- Man bestimme den maximalen Funktionswert von u im zu Grunde liegenden Gebiet $G := [0, 6] \times [0, \infty[$.

Aufgabe 20:

Man berechne die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe für folgende Wärmeleitungsgleichung mit Hilfe eines Produktansatzes:

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u && \text{für } (x, y) \in]0, \pi[\times]0, \pi[, \quad 0 < t, \\ u(0, y, t) &= 0 = u(\pi, y, t) && \text{für } y \in [0, \pi], \quad 0 \leq t, \\ u(x, 0, t) &= 0 = u(x, \pi, t) && x \in [0, \pi], \quad 0 \leq t, \\ u(x, y, 0) &= 5 \sin 3x \sin 4y && \text{für } (x, y) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \\ &\quad - 8 \sin x \cos x \sin y \cos y \quad . \end{aligned}$$

Man zeichne die Lösung u für $t = 0, \frac{1}{100}, \frac{1}{25}, \frac{1}{5}$. Wie verhält sich die Lösung für $t \rightarrow \infty$?

Aufgabe 21:

Berechnen Sie die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung unter Verwendung der Fourier-Methode

$$u_t = u_{xx} + (2x - 1)e^{-t} + 3\pi^2 \sin 3\pi x \quad \text{für } 0 < x < 1, \quad 0 < t,$$

$$u(x, 0) = u_0(x) := \begin{cases} -4x + 1 & , \quad 0 \leq x \leq 1/2 \\ -1 & , \quad 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases},$$

$$u(0, t) = e^{-t}, \quad u(1, t) = -e^{-t} \quad \text{für } 0 \leq t.$$

Aufgabe 22:

Die Telegraphengleichung $u_{xx} = 4u_{tt} + 4u_t + u$ beschreibt den zeitlichen Verlauf einer Signalspannung u am Ort $x > 0$ in einem langen Übertragungskabel.

Gesucht ist die Signalspannung $u(x, t)$, wenn am Rand $x = 0$ des Übertragungskabels ein periodisches Signal der Form $u(0, t) = 5 \sin(3t)$, für $t \geq 0$, eingespeist wird. Außerdem soll die Signalspannung u für $x \rightarrow \infty$ beschränkt sein.

- Man zeige, dass ein Produktansatz der Form $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ zu keiner Lösung führt.
- Man versuche den Lösungsansatz $u(x, t) = u_0 e^{-ax} \sin(3t - bx)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a > 0$.

Aufgabe 23:

Gegeben sei die Anfangsrandwertaufgabe

$$u_{tt} = u_{xx} \quad \text{für } 0 < x < 1, \quad 0 < t,$$

$$u(0, t) = 0 = u(1, t) \quad \text{für } t \geq 0,$$

$$u(x, 0) = u_0(x) := 0$$

$$u_t(x, 0) = v_0(x) := x^2(x - 1) \quad \text{für } 0 \leq x \leq 1.$$

- Man berechne die Lösung über den Produktansatz $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$.
- Man zeichne die Lösung.

Aufgabe 24:

Gegeben sei die Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned}u_{tt} &= u_{xx}, & \text{für } 0 < x < 2 \text{ und } t > 0, \\u(0, t) &= 0, & \text{für } t \geq 0, \\u(2, t) &= 1, & \text{für } t \geq 0, \\u(x, 0) &= x^2/4, & \text{für } 0 \leq x \leq 2, \\u_t(x, 0) &= 0, & \text{für } 0 \leq x \leq 2.\end{aligned}$$

- a) Man bestimme zunächst eine geeignete Funktion $\tilde{u}(x, t)$, die die Randbedingungen erfüllt, und transformiere die Anfangsrandwertaufgabe durch

$$v(x, t) := u(x, t) - \tilde{u}(x, t)$$

in ein Problem mit homogenen Randbedingungen.

- b) Anschließend löse man das Problem in v .

Hinweis: Dabei darf die sich aus dem Produktansatz ergebende Lösungsdarstellung verwendet werden.

- c) Man gebe die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe an.

Aufgabe 25:

Man löse die Anfangsrandwertaufgabe für die Wellengleichung unter Verwendung der Fourier-Methode:

$$\begin{aligned}u_{tt} &= c^2 u_{xx} + t \sin\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right) + \frac{x - \ell}{\ell} \sin t - \frac{x}{\ell} \cos t, & 0 < x < \ell, 0 < t, \\u(0, t) &= \sin t, \quad u(\ell, t) = \cos t, & \text{für } t \geq 0, \\u(x, 0) &= \frac{x}{\ell}, \quad u_t(x, 0) = 1 - \frac{x}{\ell}, & \text{für } 0 \leq x \leq \ell\end{aligned}$$

und zeichne die Lösung für $\ell = 1$ und $c = 1$.

Aufgabe 26:

Man berechne für die Funktion

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

die partiellen Ableitungen u_x und u_{xx} unter Verwendung der Differentiationsregel für parameterabhängige Integrale

$$F(t) := \int_{r(t)}^{s(t)} f(\xi, t) d\xi \Rightarrow F'(t) = f(s(t), t)s'(t) - f(r(t), t)r'(t) + \int_{r(t)}^{s(t)} f_t(\xi, t) d\xi .$$

Aufgabe 27:

Man berechne die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 2, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) &= 50 \sin x, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) &= 2x, & x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

und bestätige die Lösung durch Einsetzen in die Anfangswertaufgabe.

Hinweis: Man bestimme zunächst eine Lösung der inhomogenen Wellengleichung mit homogenen Anfangsdaten, löse die homogene Differentialgleichung mit Hilfe der d'Alembertschen Lösungsformel und verwende anschließend das Superpositionsprinzip.

Aufgabe 28:

a) Gegeben sei das Anfangsrandwertproblem im Halbraum

$$\begin{aligned} u_{tt} - 4u_{xx} &= 0, & x \in \mathbb{R}_+, t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x \geq 0, \\ u_t(x, 0) &= v_0(x), \\ u(0, t) &= 0, & t > 0. \end{aligned}$$

- (i) Man gebe den Abhängigkeitsbereich der Lösung im Punkt $(x_0, t_0) = (3, 1)$ an.
- (ii) Man zeichne den Bestimmtheitsbereich der Lösung zum Intervall $[0, 6]$ für $t \geq 0$.
- (iii) Man löse das Anfangsrandwertproblem mit Hilfe der Reflexionsmethode und kläre, ob es sich bei der gefundenen Lösung um eine C^2 -Funktion handelt, für
 - i. $u_0(x) = x(x-1)(x+1)$, $v_0(x) = 8x$,
 - ii. $u_0(x) = 1 - \cos x$, $v_0(x) = 0$.

b) Gegeben sei die Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} && \text{für } 0 < x < 1, 0 < t, \\ u(0, t) &= 0 = u(1, t) && \text{für } t \geq 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x) := 0 \\ u_t(x, 0) &= v_0(x) := x^2(x-1) && \text{für } 0 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Man berechne die Lösung unter Verwendung der d'Alembertschen Lösungsformel.