

Anleitungsaufgaben zu Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Aufgabe 1:

a) Man bestimme den Typ der folgenden partiellen Differentialgleichungen:

(i) $x^2 u_x + y^2 u_y + 3 \sin(x)u = e^{x+y}$,

(ii) $u^2 u_x + y^2 u_y + 3 \sin(x)u = e^{x+y+u}$,

(iii) $(u_{xx})^2 + \sin(u_y) = u^2$,

(iv) $\Delta u = u^2$,

(v) $\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_y \\ -v_x \end{pmatrix}$.

b) Man zeige, dass folgende Funktionen harmonisch sind:

(i) $v_1(x, y) = x^4 - 6x^2 y^2 + y^4$,

(ii) $v_2(x, y) = 4x^3 y - 4xy^3$,

(iii) $v_3(x, y) = \Im(z^2 + \cos z)$ mit $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 2:

Man berechne die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen

a) $u_{xx} - y^2 u = -yx + y^3$,

b) $u_{xy} = 3x^2 + 3y^2$,

c) $u_{xy} = 2y u_x$.

Aufgabe 3:

Man berechne mit Hilfe von Exponentialansätzen reelle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

$$\text{a) } u(x, t) = e^{\alpha x + \beta t} \quad \text{für} \quad u_t = u_{xx} + u ,$$

$$\text{b) } u(x, y, z) = e^{\alpha x + \beta y + \gamma z} \quad \text{für} \quad u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - 2u_z + u = 0 .$$

Aufgabe 4:

Man löse die Anfangswertaufgabe

$$2v_t + 5v_x = 12tx + 15t^2 , \quad v(0, x) = \cos(2x)$$

und zeichne die Lösung.

Hinweis: Durch eine geeignete lineare Transformation

$$\begin{aligned} r &= at + bx \\ s &= ct + dx \end{aligned}$$

mit $ad - bc \neq 0$ transformiere man die Differentialgleichung auf eine gewöhnliche Differentialgleichung.

Aufgabe 5:

Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\text{a) } xu_x + (x + y)u_y = 0 ,$$

$$\text{b) } xu_x + (x + y)u_y = 3x^3u^2 .$$

Aufgabe 6:

Gegeben sei die partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$3u_x + x^2u_y - u_z = 0 .$$

Man bestimme die allgemeine Lösung mit Hilfe des charakteristischen Differentialgleichungssystems.

Aufgabe 7:

Man löse die Anfangswertaufgabe

$$u_x - u_y = 1 + 2x + 2y \quad \text{mit} \quad u(x, x) = x$$

unter Verwendung

- a) der Charakteristikenmethode und
- b) des Summenansatzes $u(x, y) = f(x) + g(y)$.

Aufgabe 8:

Gegeben sei die partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$3u_x + x^2u_y = -1.$$

- a) Man berechne die allgemeine Lösung.
- b) Man bestimme mit dem Ergebnis aus a) die Lösung, die der Anfangsbedingung $u(x, 0) = x^3 - x/3$ genügt.
- c) Man führe die Probe für die berechnete Lösung aus b) durch.
- d) Man bestimme mit dem Ergebnis aus a) die Lösung, die der Anfangsbedingung $u\left(x, \frac{x^3}{9} + 1\right) = \sin x$ genügt.

Aufgabe 9:

Gegeben sei das Cauchy-Problem für die Burgers-Gleichung

$$u_t + uu_x = 0 \quad \text{für} \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \quad \text{mit} \quad u(x, 0) = u_0(x).$$

- a) Man berechne die allgemeine Lösung mit Hilfe der Charakteristikenmethode.
- b) Man löse das Cauchy-Problem für die Anfangsdaten
 - (i) $u_0(x) = 5 + x$ und
 - (ii) $u_0(x) = 5 - x$,

zeichne die charakteristischen Grundkurven und gebe den Zeitpunkt T an, bis zu dem sich die Lösung eindeutig berechnen lässt.

Aufgabe 10:

Gegeben sei das Anfangswertproblem für die Burgers-Gleichung

$$u_t + uu_x = 0 \quad \text{für } (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T)$$

mit

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} -1 & , \quad x \leq -1 \\ 1 & , \quad -1 < x \leq 1 \\ 0 & , \quad 1 < x \end{cases}$$

- Man berechne die Entropielösung für $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, 4)$.
- Man zeichne $u(x, 0)$, $u(x, 1)$, $u(x, 2)$, $u(x, 3)$, $u(x, 4)$.

Aufgabe 11:

Man bestimme den Typ der folgenden partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung und skizziere im \mathbb{R}^2 gegebenenfalls die Gebiete unterschiedlichen Typs:

- $3u_{xx} + 4u_{xy} - xu_x = x^2y$,
- $(y + 2)u_{xx} + 4xu_{xy} + u_{yy} + 3u_x - e^x u_y + 27u = 23 \sin(y - \pi)$,
- $u_{xx} + 2u_{xz} + 2u_{yy} - u_{zz} + zu_x + xu_y + yu_z - u = 7$.

Aufgabe 12:

Gegeben sei die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{17}{10}u_{xx} - \frac{9}{5}u_{xy} - \frac{7}{10}u_{yy} + \sqrt{10}u_x = x + 3y.$$

- Man bestimme den Typ der Gleichung und
- transformiere sie auf Normalform.

Aufgabe 13:

Gegeben sei die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$u_{xx} + 2xu_{xy} + (x^2 - 4)u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y).$$

- a) Man bestimme den Typ der Differentialgleichung.
 b) Man transformiere die Differentialgleichung auf Normalform für den Fall

$$f(x, y, u, u_x, u_y) = -u_y.$$

- c) Mit den Daten aus b) bestimme man die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

Aufgabe 14:

Mit Hilfe des Produktansatzes $u(x, y) = f(x) \cdot g(y)$ bestimme man Lösungen von

$$u_{xy} + u_x + u_y + 2u = 0.$$

Aufgabe 15:

Man zeige, dass bei der Telegraphengleichung

$$u_{tt} - u_{xx} + 4u_t + 4u = 0$$

mit folgender Randbedingung

$$u(0, t) = \cos t$$

ein Produktansatz der Form $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ zu keiner Lösung führt.

Aufgabe 16:

Man berechne durch einen Separationsansatz der Form $u(x, y) = f(x) \cdot g(y)$ eine Lösung der Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, & x \in (0, 1), \quad y > 0, \\ u(x, 0) &= \frac{2}{n} \sin 3n\pi x, & x \in [0, 1], \\ u_y(x, 0) &= 0, \\ u(0, y) &= 0, & y \geq 0, \\ u(1, y) &= 0. \end{aligned}$$

und begründe damit, warum keine stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten vorliegt, die Aufgabe also nicht korrekt gestellt ist. Anschließend zeichne man die Lösung für $n = 3$.

Aufgabe 17:

Man löse das folgende Dirichlet-Problem im Rechteck

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0, & 0 < x, y < \pi, \\ u(x, 0) &= 0, & u(x, \pi) = 0, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0, y) &= \sin y, & u(\pi, y) = \sin 2y, & 0 \leq y \leq \pi\end{aligned}$$

und zeichne die Lösung.

Aufgabe 18:

a) Zur Transformation in Polarkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(r, \varphi) := \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

berechne man $J\Phi$, $J\Phi^{-1}$ und die zweiten Ableitungen von Φ^{-1} .

b) Man berechne die allgemeine Lösung für

$$x^2 y'' - \frac{3x}{2} y' + y = 0.$$

Aufgabe 19:

Man berechne die Lösung des folgenden Dirichlet-Problems im Halbkreis

$$\begin{aligned}r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} &= 0 & \text{für } 0 < r < 6 & \text{ und } 0 < \varphi < \pi, \\ u(r, 0) &= 0 & \text{ und } u(r, \pi) &= 0 & \text{für } 0 \leq r \leq 6, \\ u(6, \varphi) &= \left| \varphi - \frac{\pi}{2} \right| - \frac{\pi}{2} & \text{für } 0 \leq \varphi \leq \pi\end{aligned}$$

und bestimme den maximalen und minimalen Funktionswert von u .

Aufgabe 20:

Für den Kreisring $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$ löse man das Dirichletsche Problem (in Polarkoordinaten)

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0, \quad 1 < r < 3,$$

$$u(1, \varphi) = -1 + 82 \cos(2\varphi),$$

$$u_r(3, \varphi) = 1 - 10 \sin \varphi,$$

zeichne die Lösung und gebe sie auch in kartesischen Koordinaten an.

Aufgabe 21:

Man berechne die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe für die folgende Wärmeleitungsgleichung mit Hilfe eines Produktansatzes:

$$u_t = u_{xx} \quad \text{für } 0 < x < 2, \\ 0 < t \leq T,$$

$$u(0, t) = 0 \quad \text{für } 0 \leq t \leq T$$

$$u(2, t) = 0$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{für } 0 \leq x \leq 2.$$

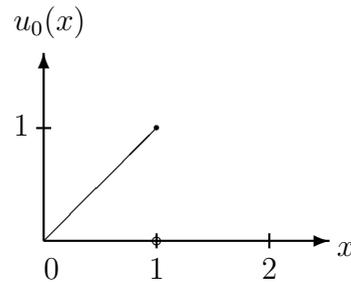


Bild 21 Anfangsfunktion u_0

Aufgabe 22:

Man berechne die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$u_t = u_{xx} \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t > 0,$$

$$u(x, 0) = e^{4x} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

a) unter Verwendung der Fundamentallösung und

b) mit Hilfe eines Produktansatzes.

Aufgabe 23:

Man berechne die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe für die folgende Wärmeleitungsgleichung mit Hilfe eines Produktansatzes:

$$\begin{aligned}
 u_t &= \Delta u && \text{für } (x, y) \in]0, \pi[\times]0, \pi[, \quad 0 < t, \\
 u(0, y, t) &= 0 = u(\pi, y, t) && \text{für } y \in [0, \pi], \quad 0 \leq t, \\
 u(x, 0, t) &= 0 = u(x, \pi, t) && x \in [0, \pi], \quad 0 \leq t, \\
 u(x, y, 0) &= 5 \sin 3x \sin 4y && \text{für } (x, y) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \\
 &\quad - 8 \sin x \cos x \sin y \cos y \quad .
 \end{aligned}$$

Wie verhält sich die Lösung für $t \rightarrow \infty$?

Aufgabe 24:

Man berechne die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned}
 u_{tt} - u_{xx} &= 2, && x \in \mathbb{R}, t > 0, \\
 u(x, 0) &= 50 \sin x, && x \in \mathbb{R}, \\
 u_t(x, 0) &= 2x, && x \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

und bestätige die Lösung durch Einsetzen in die Anfangswertaufgabe.

Hinweis: Man bestimme zunächst eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung in Polynomform und verwende anschließend das Superpositionsprinzip.

Aufgabe 25:

Man löse das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{aligned}
 u_{tt} - u_{xx} &= 0, && x \in \mathbb{R}_+, t > 0, \\
 u(x, 0) &= u_0(x), && x \geq 0, \\
 u_t(x, 0) &= v_0(x), && \\
 u(0, t) &= 0, && t > 0
 \end{aligned}$$

mit Hilfe der Reflexionsmethode und kläre, ob es sich bei der gefundenen Lösung um eine C^2 -Funktion handelt, für

- a) $u_0(x) = x^3, \quad v_0(x) = 2x,$
- b) $u_0(x) = x^2, \quad v_0(x) = 2.$

Aufgabe 26:

Das Anschlagen einer Saite wird beschrieben durch die Anfangsrandwertaufgabe für die Wellengleichung:

$$\begin{aligned} u_{tt} - 16u_{xx} &= 0, & 0 < x < \pi, & \quad 0 < t, \\ u(0, t) &= 0 = u(\pi, t), & t &\geq 0, \\ u(x, 0) &= 0, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u_t(x, 0) &= v_0(x) := \begin{cases} 2\pi & \text{für } \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Man löse die Anfangsrandwertaufgabe mittels Produktansatz

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$$

und zeichne die Lösung.

Aufgabe 27:

Man löse folgende Anfangsrandwertaufgabe für die Wellengleichung unter Verwendung der Fouriermethode:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} + \sin x + \left(1 - \frac{2x}{\pi}\right) \cdot e^{-t}, & \text{für } 0 < x < \pi \text{ und } t > 0, \\ u(0, t) &= e^{-t}, \\ u(\pi, t) &= -e^{-t}, & \text{für } t \geq 0, \\ u(x, 0) &= 1 - \frac{2x}{\pi}, \\ u_t(x, 0) &= \frac{2x}{\pi} - 1, & \text{für } 0 \leq x \leq \pi \end{aligned}$$

und zeichne die Lösung für $c = 1$.

Aufgabe 28:

Man berechne die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung unter Verwendung der Fouriermethode

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + \frac{2x}{\pi} & \text{für } 0 < x < \pi, & \quad 0 < t, \\ u(x, 0) &= u_0(x) := \begin{cases} 1 & , \quad 3\pi/8 \leq x \leq 5\pi/8 \\ 0 & , \quad \text{sonst,} \end{cases} \\ u(0, t) &= -t, \quad u(\pi, t) = t & \text{für } 0 \geq t. \end{aligned}$$