Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2008**
Dr. K. Rothe

Anleitungsaufgaben zu
Differentialgleichungen II
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Aufgabe 1:

a) Man bestimme den Typ der folgenden partiellen Differentialgleichungen:

(i) $u_x + u^2 u_y = 3x + 4y - 6u + 5,$

(ii) $u_{xy} + y^2 u_y^2 = e^u + x^2 + y^2,$

(iii) $u_{xx}^2 + x^2 u_{yy} = 1 + 2x + 3y + 4u + 5u_x + 6u_y,$

(iv) $\ln(u_x + u_y) + u_x + u_y = 1,$

(v) $\begin{pmatrix} xu_x \\ xv_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_y \\ -u_y \end{pmatrix}.$

b) Man zeige, dass folgende Funktionen harmonisch sind:

(i) $u_1(x,y) = x^3 - 3xy^2$

(ii) $u_2(x,y) = 3x^2 y - y^3$

(iii) $u_3(x,y) = \Im(e^z + z) + 6\Re(z)$ mit $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 2:
Man berechne die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen

a) $u_{xx} - y^2 u = -yx + y^3,$

b) $u_{xy} = 3x^2 + 3y^2,$

c) $u_{xy} = 2yu_x.$

Aufgabe 3:
Man berechne mit Hilfe von Exponentialansätzen reelle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

a) $u(x,t) = e^{\alpha x + \beta t}$ für $u_t = u_{xx} + u$,

b) $u(x,y,z) = e^{\alpha x + \beta y + \gamma z}$ für $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - 2u_z + u = 0$.

Aufgabe 4:
Man löse die Anfangswertaufgabe

$$4u_x - 7u_y = y^2\,, \quad u\,(x,0) = x^2$$

und zeichne die Lösung.

Hinweis: Durch eine geeignete lineare Transformation

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha x + \beta y \\ \eta &= \gamma x + \delta y \end{aligned}$$

mit $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ transformiere man die Differentialgleichung auf eine gewöhnliche Differentialgleichung.

Aufgabe 5:
Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung:

a) $3u_x + x^2 u_y - u_z = 0$,

b) $xu_x + (x+y)u_y = 0$.

Aufgabe 6:
Man bestimme eine Lösung der Anfangswertaufgabe

$$3(u-y)^2 u_x - u_y = 0, \quad u(0,y) = y$$

a) mit Hilfe der Charakteristikenmethode und

b) mit Hilfe eines Summenansatzes $u(x,y) = f(x) + g(y)$.

Aufgabe 7:
Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem für die Burgers-Gleichung

$$u_t + uu_x = 0 \quad \text{für} \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \quad \text{mit} \quad u(x,0) = u_0(x)\ .$$

a) Man berechne die allgemeine Lösung mit Hilfe der Charakteristikenmetode.

b) Man löse die Aufgabe für die Anfangsdaten

 (i) $u_0(x) = 2(x+1)$ und
 (ii) $u_0(x) = 2(1-x)$,

 zeichne die charakteristischen Grundkurven und gebe den Zeitpunkt T an, bis zu dem sich die Lösung eindeutig berechnen lässt.

Aufgabe 8:
Gegeben sei die partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$u_x + 2xu_y = y\ .$$

a) Man berechne die allgemeine Lösung.

b) Man bestimme mit dem Ergebnis aus a) die Lösung, die der Anfangsbedingung $u(0,y) = 1 + y^2$ genügt.

c) Man führe die Probe für die berechnete Lösung aus b) durch.

d) Man bestimme mit dem Ergebnis aus a) die Lösung, die der Anfangsbedingung $u\left(x, x^2+1\right) = 3x$ genügt.

Aufgabe 9:
Man bestimme den Typ der folgenden partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung und skizziere im $\mathbb{R}^2$ gegebenenfalls die Gebiete unterschiedlichen Typs:

a) $3u_{xx} + 4u_{xy} - xu_x = x^2y$,

b) $xu_{xx} + 4u_{xy} + yu_{yy} + (x^2+y^2)u = 3$,

c) $u_{xx} + 2u_{xz} + 2u_{yy} - u_{zz} + zu_x + xu_y + yu_z - u = 7$.

Aufgabe 10:
Gegeben sei die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{14}{5}u_{xx} - \frac{4}{5}u_{xy} + \frac{11}{5}u_{yy} + 2\sqrt{5}u_x - \sqrt{5}u_y + 3u = x$$

a) Man bestimme den Typ der Gleichung und

b) transformiere sie auf Normalform.

Aufgabe 11:
Gegeben sei die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} = 0\,.$$

a) Man bestimme den Typ der Differentialgleichung,

b) berechne die Charakteristiken,

c) transformiere die Differentialgleichung auf Normalform und

d) bestimme ihre allgemeine Lösung.

Aufgabe 12:
Man berechne durch einen Separationsansatz der Form $u(x,y) = f(x)\cdot g(y)$ eine Lösung der Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0\,, && x \in (0,\pi), \quad y > 0, \\ u(x,0) &= \frac{4}{n}\sin 5nx\,, && x \in [0,\pi], \\ u_y(x,0) &= 0\,, && \\ u(0,y) &= 0\,, && y \geq 0\,, \\ u(\pi,y) &= 0\,. && \end{aligned}$$

und begründe damit, warum keine stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten vorliegt, die Aufgabe also nicht korrekt gestellt ist. Anschließend zeichne man die Lösung für $n = 11$.

Aufgabe 13:
Man löse die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned}
\Delta u &= 0\,, & & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2,\\
u(x,0) &= \sin(6\pi x)\,, & & 0 \le x \le 1\\
u(x,2) &= 3\sin(2\pi x)\,, & &\\
u(0,y) &= 0\,, & & 0 \le y \le 2\\
u(1,y) &= 0\,. & &
\end{aligned}$$

durch einen Separationsansatz der Form $u(x,y) = f(x) \cdot g(y)$ und zeichne die Lösung.

Aufgabe 14:
Für den Kreisring $1 \le x^2+y^2 \le 16$ löse man das Dirichletsche Problem (in Polarkoordinaten)

$$\begin{aligned}
&r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0, \quad 1 < r < 4\,,\\
&u(1,\varphi) = 3 + \sin(5\varphi)\,,\\
&u(4,\varphi) = 0\,,
\end{aligned}$$

und zeichne die Lösung.

Aufgabe 15:
Für den Kreisring $1 \le x^2 + y^2 \le 4$ löse man das Problem (in Polarkoordinaten) mit gemischten Randdaten

$$\begin{aligned}
&r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0, \quad 1 < r < 2\,,\\
&u(1,\varphi) = 0\,,\\
&u_r(2,\varphi) = \frac{5}{2} + \frac{195}{64}\cos 3\varphi\,,
\end{aligned}$$

zeichne die Lösung und gebe sie auch in kartesischen Koordinaten an.

Aufgabe 16:
Man berechne die Lösung des folgenden Dirichlet-Problems im Halbkreis

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0 \quad \text{für} \quad 0 < r < 6 \quad \text{und} \quad 0 < \varphi < \pi\,,$$

$$u(r,0) = 0 \quad \text{und} \quad u\,(r,\pi) = 0 \quad \text{für} \quad 0 \le r \le 6\,,$$

$$u(6,\varphi) = \left|\varphi - \frac{\pi}{2}\right| - \frac{\pi}{2} \quad \text{für} \quad 0 \le \varphi \le \pi$$

und bestimme den maximalen und minimalen Funktionswert von u.

Aufgabe 17:
Man zeige, dass bei der Telegraphengleichung

$$u_{tt} - u_{xx} + 4u_t + 4u = 0$$

mit folgender Randbedingung

$$u(0,t) = \cos t$$

ein Produktansatz der Form $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ zu keiner Lösung führt.

Aufgabe 18:
Man berechne die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= -4x\,, && x \in \mathbb{R},\ t > 0\,, \\ u(x,0) &= 1\,, && x \in \mathbb{R}\,, \\ u_t(x,0) &= \cos x\,, && x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

und bestätige die Lösung durch Einsetzen in die Anfangswertaufgabe.

Hinweis: Man bestimme zunächst eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung in Polynomform und verwende anschließend das Superpositionsprinzip.

Aufgabe 19:
Gegeben sei die inhomogene Wellengleichung mit homogenen Anfangsbedingungen:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} \;=\; f(x,t) \qquad \text{mit} \qquad u(x,0) \;=\; 0 \;=\; u_t(x,0)\,.$$

Man zeige, dass die Funktion $\quad u(x,t) = \dfrac{1}{2c} \displaystyle\int_D f(\xi,\tau)\; d(\xi,\tau)$ die Anfangswertaufgabe löst, wobei das Abhängigkeitsdreieck D gegeben ist durch

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} \xi \\ \tau \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le \tau \le t \;\wedge\; x - c(t-\tau) \le \xi \le x + c(t-\tau) \right\}.$$

Aufgabe 20:
Gegeben sei die Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} && \text{für} \quad 0 < x < 1\,,\ 0 < t\,, \\ u(0,t) &= 0 = u(1,t) && \text{für} \quad t \geq 0\,, \\ u(x,0) &= u_0(x) := 0 && \\ u_t(x,0) &= v_0(x) := x^2(x-1) && \text{für} \quad 0 \leq x \leq 1\,. \end{aligned}$$

a) Man berechne die Lösung unter Verwendung der d´Alembertschen Lösungsformel und

b) über den Produktansatz $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ nach Fourier.

c) Man zeichne die Lösung.

Aufgabe 21:
Man löse die Anfangswertaufgabe für die Wellengleichung im $\mathbb{R}^3$:

$$u_{tt} - c^2 \Delta_3 u = 0\,, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3\,, \quad t > 0\,,$$

$$u(\boldsymbol{x},0) = u_0(\boldsymbol{x}) := 0\,, \qquad u_t(\boldsymbol{x},0) = v_0(\boldsymbol{x}) := x - y + z^2\,,$$

unter Verwendung der Liouvilleschen Lösungsformel

$$u(\boldsymbol{x},t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{4\pi} \int\limits_S u_0(\boldsymbol{x} + ct\boldsymbol{n})\, do \right) + \frac{t}{4\pi} \int\limits_S v_0(\boldsymbol{x} + ct\boldsymbol{n})\, do$$

mit der Einheitssphäre S im $\mathbb{R}^3$ und dem Normalenvektor $\boldsymbol{n}$ auf S.

Anschließend bestätige man durch eine Probe, dass die gefundene Lösung die Anfangswertaufgabe erfüllt.

Aufgabe 22:
Man berechne die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \ \text{und} \ t > 0\,, \\ u(x,0) &= e^{4x} \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

mit Hilfe eines Produktansatzes.

Aufgabe 23:
Man berechne die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe für die folgende Wärmeleitungsgleichung mit Hilfe eines Produktansatzes:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} && \text{für } 0 < x < 2\,, \\ &&& \phantom{\text{für }} 0 < t \le T\,, \\ u(0,t) &= 0 && \text{für } 0 \le t \le T \\ u(2,t) &= 0 && \\ u(x,0) &= u_0(x) && \text{für } 0 \le x \le 2\,. \end{aligned}$$

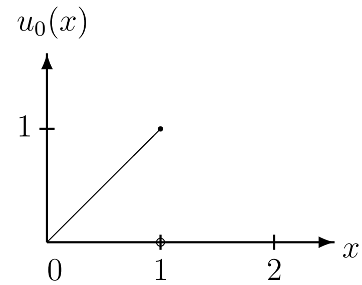

Bild 23 Anfangsfunktion u_0

Aufgabe 24:
Man berechne die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe für die folgende Wärmeleitungsgleichung mit Hilfe eines Produktansatzes:

$$\begin{aligned} u_t &= \quad \Delta u && \text{für } (x,y) \in\,]0,1[\, \times\,]0,2[\,, \quad 0 < t\,, \\ u(0,y,t) &= 0 = u(1,y,t) && \text{für } y \in [0,2]\,, \quad 0 \le t\,, \\ u(x,0,t) &= 0 = u(x,2,t) && \phantom{\text{für }} x \in [0,1]\,, \quad 0 \le t\,, \\ u(x,y,0) &= \quad 7\sin(2\pi x)\sin(\pi y) && \text{für } (x,y) \in [0,1] \times [0,2] \\ & \quad +(3\sin(\pi x) && \\ & \quad -4\sin^3(\pi x))\sin(3\pi y/2) \quad . && \end{aligned}$$

Wie verhält sich die Lösung für $t \to \infty$?

Aufgabe 25:
Man berechne die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung unter Verwendung der Fouriermethode

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + \frac{2x}{\pi} \quad \text{für} \quad 0 < x < \pi\,, \quad 0 < t\,, \\ u(x,0) &= u_0(x) := \begin{cases} 1 \ , & 3\pi/8 \le x \le 5\pi/8 \\ 0 \ , & \text{sonst}\,, \end{cases} \\ u(0,t) &= -t\,, \ u(\pi,t) = t \qquad \text{für} \quad 0 \le t\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 26:
Gegeben seien die Dreiterm-Rekursion für die Bessel-Funktionen

$$J_{k+1}(x) - \frac{2k}{x} J_k(x) + J_{k-1}(x) \; = \; 0 \;\; (*)$$

und Testwerte für $x = 2$

$$\begin{aligned} J_0(2) &\doteq 2.238907791e-01 \, , \\ J_1(2) &\doteq 5.767248078e-01 \, , \\ J_{11}(2) &\doteq 2.304284758e-08 \, . \end{aligned}$$

a) Man berechne $J_{11}(2)$ aus den näherungsweise gegebene Werten von $J_0(2)$ und $J_1(2)$ mittels der sich aus $(*)$ ergebenden Vorwärtsrekursion und begründe die Abweichung vom tatsächlichen Wert.

b) Man berechne $J_{11}(2)$ aus $J_{15}(2) = 0$ und $J_{14}(2) = 10^{-20}$ mittels der sich aus $(*)$ ergebenden Rückwärtsrekursion.

   Die berechneten Werte sind dabei zu normieren durch

$$1 = J_0(x) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(x) \, .$$

Aufgabe 27:
Man schreibe ein Programm zur Auswertung des Polynoms

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$$

an der Stelle x mit Hilfe des Clenshaw-Algorithmus und teste dies für $x = 9$ am Beispiel

$$p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \, .$$

Aufgabe 28:
Man löse die folgende Randeigenwertaufgabe mit Hilfe eines Produktansatzes der Form $u(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda \, u, && (x, y) \in \,]0, \pi[\times]0, 2\pi[\\ u(x, 0) &= 0 = u(0, y), && \\ u_y(x, 2\pi) &= 0 = \; u_x(\pi, y) && . \end{aligned}$$

Anschließend gebe man die zehn kleinsten Eigenwerte an und zeichne die Eigenfunktion zum zweitkleinsten Eigenwert.