Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2006**
Dr. K. Rothe

Anleitungsaufgaben zu

Differentialgleichungen II

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Aufgabe 1:

a) Man bestimme den Typ der folgenden partiellen Differentialgleichungen:

(i) $x^2 u_x + y^2 u_y + 3\sin(x)u = e^{x+y}$,

(ii) $u^2 u_x + y^2 u_y + 3\sin(x)u = e^{x+y+u}$,

(iii) $(u_{xx})^2 + \sin(u_y) = u^2$,

(iv) $\Delta u = u^2$,

(v) $\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_y \\ -v_x \end{pmatrix}$.

b) Man zeige, dass folgende Funktionen harmonisch sind:

(i) $v_1(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$,

(ii) $v_2(x,y) = 4x^3y - 4xy^3$,

(iii) $v_3(x,y) = \Im(z^2 + \cos z)$ mit $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 2:

Man berechne die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen

a) $u_{xx} - y^2 u = -yx + y^3$,

b) $u_{xy} = 3x^2 + 3y^2$,

c) $u_{xy} = 2yu_x$.

Aufgabe 3:

Man berechne mit Hilfe von Exponentialansätzen reelle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

a) $u(x,t) = e^{\alpha x + \beta t}$ für $u_t = u_{xx} + u$,

b) $u(x,y,z) = e^{\alpha x + \beta y + \gamma z}$ für $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - 2u_z + u = 0$.

Aufgabe 4:

Man löse die Anfangswertaufgabe

$$2v_t + 5v_x = 12tx + 15t^2 \, , \quad v(0,x) = \cos(2x)$$

und zeichne die Lösung.

Hinweis: Durch eine geeignete lineare Transformation

$$\begin{aligned} r &= at + bx \\ s &= ct + dx \end{aligned}$$

mit $ad - bc \neq 0$ transformiere man die Differentialgleichung auf eine gewöhnliche Differentialgleichung.

Aufgabe 5:

Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung:

a) $xu_x + (x+y)u_y = 0$,

b) $xu_x + (x+y)u_y = 3x^3u^2$.

Aufgabe 6:

Gegeben sei die partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$3u_x + x^2u_y - u_z = 0 \, .$$

Man bestimme die allgemeine Lösung mit Hilfe des charakteristischen Differentialgleichungssystems.

Aufgabe 7:

Man löse die Anfangswertaufgabe

$$u_x - u_y = 1 + 2x + 2y \quad \text{mit} \quad u(x,x) = x$$

unter Verwendung

a) der Charakteristikenmethode und

b) des Summenansatzes $u(x,y) = f(x) + g(y)$.

Aufgabe 8:

Gegeben sei die partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$3u_x + x^2 u_y = -1\ .$$

a) Man berechne die allgemeine Lösung.

b) Man bestimme mit dem Ergebnis aus a) die Lösung, die der Anfangsbedingung $u(x,0) = x^3 - x/3$ genügt.

c) Man führe die Probe für die berechnete Lösung aus b) durch.

d) Man bestimme mit dem Ergebnis aus a) die Lösung, die der Anfangsbedingung $u\left(x, \dfrac{x^3}{9} + 1\right) = \sin x$ genügt.

Aufgabe 9:

Gegeben sei das Cauchy-Problem für die Burgers-Gleichung

$$u_t + uu_x = 0 \quad \text{für} \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \quad \text{mit} \quad u(x,0) = u_0(x)\ .$$

a) Man berechne die allgemeine Lösung mit Hilfe der Charakteristikenmetode.

b) Man löse das Cauchy-Problem für die Anfangsdaten

   (i) $u_0(x) = 5 + x$ und

   (ii) $u_0(x) = 5 - x$,

   zeichne die charakteristischen Grundkurven und gebe den Zeitpunkt T an, bis zu dem sich die Lösung eindeutig berechnen lässt.

Aufgabe 10:

Gegeben sei das Anfangswertproblem für die Burgers-Gleichung

$$u_t + uu_x = 0 \quad \text{für} \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T)$$

mit

$$u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} -1 \ , & \quad\quad x \ \leq -1 \\ \ \ 1 \ , & -1 < x \ \leq 1 \\ \ \ 0 \ , & \ \ \ 1 < x \ . \end{cases}$$

a) Man berechne die Entropielösung für $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,4)$.

b) Man zeichne $u(x,0)$, $u(x,1)$, $u(x,2)$, $u(x,3)$, $u(x,4)$.

Aufgabe 11:

Man bestimme den Typ der folgenden partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung und skizziere im $\mathbb{R}^2$ gegebenenfalls die Gebiete unterschiedlichen Typs:

a) $3u_{xx} + 4u_{xy} - xu_x = x^2 y$,

b) $(y+2)u_{xx} + 4xu_{xy} + u_{yy} + 3u_x - e^x u_y + 27u = 23\sin(y-\pi)$,

c) $u_{xx} + 2u_{xz} + 2u_{yy} - u_{zz} + zu_x + xu_y + yu_z - u = 7$.

Aufgabe 12:

Gegeben sei die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{17}{10}u_{xx} - \frac{9}{5}u_{xy} - \frac{7}{10}u_{yy} + \sqrt{10}u_x = x + 3y \ .$$

a) Man bestimme den Typ der Gleichung und

b) transformiere sie auf Normalform.

Aufgabe 13:

Gegeben sei die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$u_{xx} + 2xu_{xy} + (x^2-4)u_{yy} = f(x,y,u,u_x,u_y) \ .$$

a) Man bestimme den Typ der Differentialgleichung.

b) Man transformiere die Differentialgleichung auf Normalform für den Fall

$$f(x, y, u, u_x, u_y) = -u_y.$$

c) Mit den Daten aus b) bestimme man die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

Aufgabe 14:

Mit Hilfe des Produktansatzes $u(x, y) = f(x) \cdot g(y)$ bestimme man Lösungen von

$$u_{xy} + u_x + u_y + 2u = 0 \; .$$

Aufgabe 15:

Man zeige, dass bei der Telegraphengleichung

$$u_{tt} - u_{xx} + 4u_t + 4u = 0$$

mit folgender Randbedingung

$$u(0, t) = \cos t$$

ein Produktansatz der Form $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ zu keiner Lösung führt.

Aufgabe 16:

Man berechne durch einen Separationsansatz der Form $u(x, y) = f(x) \cdot g(y)$ eine Lösung der Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned}
\Delta u &= 0 \, , & & x \in (0,1), \quad y > 0, \\
u(x,0) &= \frac{2}{n} \sin 3n\pi x \, , & & x \in [0,1], \\
u_y(x,0) &= 0 \, , & & \\
u(0,y) &= 0 \, , & & y \geq 0 \, , \\
u(1,y) &= 0 \, . & &
\end{aligned}$$

und begründe damit, warum keine stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten vorliegt, die Aufgabe also nicht korrekt gestellt ist. Anschließend zeichne man die Lösung für $n = 3$.

Aufgabe 17:

Man löse das folgende Dirichlet-Problem im Rechteck

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0\,, \quad 0 < x, y < \pi\,, \\ u(x,0) &= 0\,, \quad u(x,\pi) = 0\,, \quad 0 \le x \le \pi\,, \\ u(0,y) &= \sin y\,, \quad u(\pi,y) = \sin 2y\,, \quad 0 \le y \le \pi \end{aligned}$$

und zeichne die Lösung.

Aufgabe 18:

a) Zur Transformation in Polarkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Phi}(r,\varphi) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

berechne man $\boldsymbol{J\Phi}$, $\boldsymbol{J\Phi}^{-1}$ und die zweiten Ableitungen von $\boldsymbol{\Phi}^{-1}$.

b) Man berechne die allgemeine Lösung für

$$x^2 y'' - \frac{3x}{2} y' + y = 0\,.$$

Aufgabe 19:

Man berechne die Lösung des folgenden Dirichlet-Problems im Halbkreis

$$\begin{aligned} r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0 \quad &\text{für} \quad 0 < r < 6 \quad \text{und} \quad 0 < \varphi < \pi\,, \\ u(r,0) = 0 \quad \text{und} \quad u(r,\pi) = 0 \quad &\text{für} \quad 0 \le r \le 6\,, \\ u(6,\varphi) = \left|\varphi - \frac{\pi}{2}\right| - \frac{\pi}{2} \quad &\text{für} \quad 0 \le \varphi \le \pi \end{aligned}$$

und bestimme den maximalen und minimalen Funktionswert von u.

Aufgabe 20:

Für den Kreisring $1 \leq x^2+y^2 \leq 9$ löse man das Dirichletsche Problem (in Polarkoordinaten)

$$\begin{aligned}
&r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0, \quad 1 < r < 3\,,\\
&u(1,\varphi) = -1 + 82\cos(2\varphi)\,,\\
&u_r(3,\varphi) = 1 - 10\sin\varphi\,,
\end{aligned}$$

zeichne die Lösung und gebe sie auch in kartesischen Koordinaten an.

Aufgabe 21:

Man berechne die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe für die folgende Wärmeleitungsgleichung mit Hilfe eines Produktansatzes:

$$\begin{aligned}
u_t &= u_{xx} && \text{für} \quad 0 < x < 2\,,\\
& && \qquad\;\; 0 < t \leq T\,,\\
u(0,t) &= 0 && \text{für} \quad 0 \leq t \leq T\\
u(2,t) &= 0 && \\
u(x,0) &= u_0(x) && \text{für} \quad 0 \leq x \leq 2\,.
\end{aligned}$$

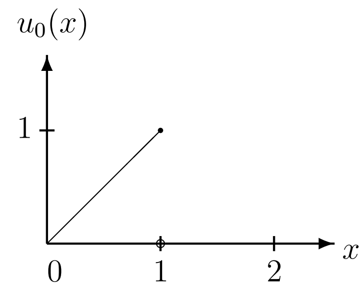

Bild 21 Anfangsfunktion u_0

Aufgabe 22:

Man berechne die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned}
u_t &= u_{xx} \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \;\text{ und }\; t > 0\,,\\
u(x,0) &= e^{4x} \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

a) unter Verwendung der Fundamentallösung und

b) mit Hilfe eines Produktansatzes.

Aufgabe 23:

Man berechne die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe für die folgende Wärmeleitungsgleichung mit Hilfe eines Produktansatzes:

$$\begin{array}{rcll}
u_t & = & \Delta u & \text{für} \quad (x,y) \in \,]0,\pi[\, \times \,]0,\pi[\,, \quad 0 < t\,, \\[1ex]
u(0,y,t) & = 0 & = u(\pi,y,t) & \text{für} \quad y \in [0,\pi]\,, \quad 0 \le t\,, \\[1ex]
u(x,0,t) & = 0 & = u(x,\pi,t) & \qquad x \in [0,\pi]\,, \quad 0 \le t\,, \\[1ex]
u(x,y,0) & = & 5\sin 3x \sin 4y & \text{für} \quad (x,y) \in [0,\pi] \times [0,\pi] \\[1ex]
 & & -8 \sin x \cos x \sin y \cos y & .
\end{array}$$

Wie verhält sich die Lösung für $t \to \infty$?

Aufgabe 24:

Man berechne die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{array}{rcll}
u_{tt} - u_{xx} & = & 2\,, & x \in \mathbb{R},\ t > 0\,, \\
u(x,0) & = & 50 \sin x\,, & x \in \mathbb{R}\,, \\
u_t(x,0) & = & 2x\,, & x \in \mathbb{R}
\end{array}$$

und bestätige die Lösung durch Einsetzen in die Anfangswertaufgabe.

Hinweis: Man bestimme zunächst eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung in Polynomform und verwende anschließend das Superpositionsprinzip.

Aufgabe 25:

Man löse das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{array}{rcll}
u_{tt} - u_{xx} & = & 0\,, & x \in \mathbb{R}_+,\ t > 0\,, \\
u(x,0) & = & u_0(x)\,, & x \ge 0\,, \\
u_t(x,0) & = & v_0(x)\,, & \\
u(0,t) & = & 0\,, & t > 0
\end{array}$$

mit Hilfe der Reflexionsmethode und kläre, ob es sich bei der gefundenen Lösung um eine C^2-Funktion handelt, für

a) $u_0(x) = x^3, \quad v_0(x) = 2x\,,$

b) $u_0(x) = x^2, \quad v_0(x) = 2\,.$

Aufgabe 26:

Das Anschlagen einer Saite wird beschrieben durch die Anfangsrandwertaufgabe für die Wellengleichung:

$$\begin{aligned} u_{tt} - 16u_{xx} &= 0\,, \quad 0 < x < \pi\,, \quad 0 < t\,, \\ u(0,t) &= 0 \;=\; u(\pi,t)\,, \quad t \geq 0\,, \\ u(x,0) &= 0\,, \quad 0 \leq x \leq \pi\,, \\ u_t(x,0) &= v_0(x) := \begin{cases} 2\pi & \text{für} \quad \dfrac{\pi}{4} \leq x \leq \dfrac{3\pi}{4}\,, \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases} \end{aligned}$$

Man löse die Anfangsrandwertaufgabe mittels Produktansatz

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$$

und zeichne die Lösung.

Aufgabe 27:

Man löse folgende Anfangsrandwertaufgabe für die Wellengleichung unter Verwendung der Fouriermethode:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} + \sin x + \left(1 - \frac{2x}{\pi}\right) \cdot e^{-t}\,, \quad \text{für} \quad 0 < x < \pi \text{ und } t > 0, \\ u(0,t) &= e^{-t}\,, \\ u(\pi,t) &= -e^{-t}\,, \quad \text{für} \quad t \geq 0\,, \\ u(x,0) &= 1 - \frac{2x}{\pi}\,, \\ u_t(x,0) &= \frac{2x}{\pi} - 1\,, \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq \pi \end{aligned}$$

und zeichne die Lösung für $c = 1$.

Aufgabe 28:

Man berechne die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung unter Verwendung der Fouriermethode

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + \frac{2x}{\pi} \quad \text{für} \quad 0 < x < \pi\,, \quad 0 < t\,, \\ u(x,0) &= u_0(x) := \begin{cases} 1 \;, & 3\pi/8 \leq x \leq 5\pi/8 \\ 0 \;, & \text{sonst}\,, \end{cases} \\ u(0,t) &= -t\,, \;\; u(\pi,t) = t \qquad \text{für} \quad 0 \geq t\,. \end{aligned}$$