Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2004**
Dr. K. Rothe

Anleitungsaufgaben zu

Differentialgleichungen II

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Aufgabe 1:

Man löse die Anfangswertaufgabe

$$2v_t + 5v_x = 12tx + 15t^2\,, \quad v(0,t) = \cos(2x).$$

Hinweis: Durch eine geeignete lineare Transformation

$$\begin{aligned} r &= at + bx \\ s &= ct + dx \end{aligned}$$

mit $ad - bc \neq 0$ transformiere man die Differentialgleichung auf eine gewöhnliche Differentialgleichung.

Aufgabe 2: **(keine Ersatzaufgabe)**

Bei einer eingespannten Seite greife eine konzentrierte Kraft $F(t)$ im Punkt x_0 mit $0 < x_0 < l$ an.

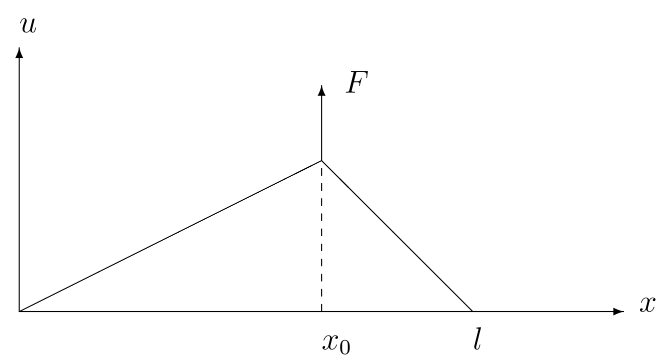

Bild: Abbildung zum Zeitpunkt $t = 0$

Dann ergibt sich die Schwingungsgleichung in Integralform in der Gestalt

$$\begin{aligned} &\int_{x_1}^{x_2} \rho(\xi)[u_t(\xi,t_2) - u_t(\xi,t_1)]d\xi - \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} f(\xi,\tau)d\xi d\tau \\ = &\int_{t_1}^{t_2} T_0[u_x(x_2,\tau) - u_x(x_1,\tau)]d\tau + \int_{t_1}^{t_2} F(\tau)d\tau \end{aligned}$$

für alle (t_1,t_2) und alle (x_1,x_2), wobei ρ die lineare Dichte der Saite ist und $f(x,t)$ die zum Zeitpunkt t auf die Längeneinheit bezogene Kraft im Punkt x. Wie kann diese Schwingung durch Differentialgleichungen und Anfangs- und Randbedingungen beschrieben werden?

Aufgabe 3:

Man zeige:
Es gibt stetige Funktionen $f \in C(\mathbb{R}^2) \setminus C^1(\mathbb{R}^2)$ derart, dass $u_{xx} = f(x,y)$ keine $C^2(\mathbb{R}^2)$-Lösung besitzt.

Hinweis: $f(x,y) = g(x)h(y)$ mit $h \in C^0(\mathbb{R}) \setminus C^1(\mathbb{R})$ ist eine Möglichkeit.

Aufgabe 4:

Gegeben sei ein Gebiet $U \subset \mathbb{R}^2$ und eine kompakte Menge $D \subset U$ mit stückweise glattem Rand, die bezüglich beider Koordinatenrichtungen projizierbar ist. Außerdem sei $u \in C^1(U)$, $\boldsymbol{v} : U \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, $w \in C^2(U)$, $\boldsymbol{n} = (n_x, n_y)$ die äußere Normale von D und ds das Bogenelement. Man beweise für mathematisch positiv durchlaufenen Rand ∂D

a) die Regeln für die partielle Integration

(i) $$\int_D u_x(x,y)\, d(x,y) = \int_{\partial D} u(\boldsymbol{x}) n_x\, ds\ ,$$

(ii) $$\int_D u_y(x,y)\, d(x,y) = \int_{\partial D} u(\boldsymbol{x}) n_y\, ds\ ,$$

b) den Gaußschen Integralsatz

$$\int_D \operatorname{div}\, \boldsymbol{v}(x,y)\, d(x,y) = \int_{\partial D} < \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{n} > \ ds\ ,$$

c) sowie

$$\int_D \Delta w(x,y)\, d(x,y) = \int_{\partial D} \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{n}}\, ds\ .$$

Aufgabe 5:

Gegeben sei die partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$3u_x + x^2 u_y - u_z = 0 \,.$$

a) Man bestimme die allgemeine Lösung mit Hilfe des charakteristischen Differentialgleichungssystems und

b) ermittle die Lösung, die der Anfangsbedingung $u(z, y, z) = y + z^3$ genügt.

Aufgabe 6:

Gegeben sei die partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$3u_x + x^2 u_y = -1 \,.$$

a) Man berechne die allgemeine Lösung mit Hilfe der Phasendifferentialgleichungen indem man

   (i) x als unabhängige Variable einführt,

   (ii) y als unabhängige Variable einführt.

b) Man bestimme mit dem Ergebnis aus a) die Lösung, die der Anfangsbedingung $u(x, 0) = x^3 - x/3$ genügt.

c) Man führe die Probe für die berechnete Lösung aus b) durch.

d) Man bestimme mit dem Ergebnis aus a) die Lösung, die der Anfangsbedingung $u\left(x, \frac{x^3}{9} + 1\right) = \sin x$ genügt.

Aufgabe 7: **(keine Ersatzaufgabe)**

a) Man passe die allgemeine Lösung von $u_x + 2xu_y = y$ an die Anfangswerte $u(x, x^2 + 1) = 3x$ an und prüfe das Ergebnis durch Einsetzen.

b) Faßt man die Differentialgleichung

$$a_1(x, y)u_x(x, y) + a_2(x, y)u_y(x, y) = a_0(x, y)$$

auf als die Ableitung einer Funktion $u(x(t), y(t))$ längs einer Kurve $(x(t), y(t))$,

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{dt} = a_0(x(t), y(t)),$$

so erhält man das System

$$\frac{dx}{dt} = a_1, \quad \frac{dy}{dt} = a_2, \quad \frac{du}{dt} = a_0,$$

dessen Lösungen *charakteristische Kurven*, kurz *Charakteristiken* heißen. Ihre Projektion auf die xy-Ebene heißen charakteristische Grundkurven. Sie werden durch die ersten beiden Differentialgleichungen beschrieben. Was hat eine Charakteristik mit der Lösung der Differentialgleichung zu tun? Betrachte eine Charakteristik längs einer charakteristischen Grundkurve. Erkläre das Ergebnis aus Teil a).

Aufgabe 8:

Man bestimme den Typ der folgenden partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung und skizziere im $\mathbb{R}^2$ gegebenenfalls die Gebiete unterschiedlichen Typs:

a) $3u_{xx} + 4u_{xy} - xu_x = x^2y$,

b) $(y+2)u_{xx} + 4xu_{xy} + u_{yy} + 3u_x - e^x u_y + 27u = 23\sin(y-\pi)$.

Aufgabe 9:

Man zeige:

Für die Anfangswertaufgabe der Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}\,, \quad 0 < t < t_0\,, \quad -\infty < x < \infty\,, \\ u(x,0) &= \varphi(x)\,, \\ \frac{\partial}{\partial t}u(x,0) &= 0 \end{aligned}$$

gilt:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta(\varepsilon) > 0$ derart, dass sich zwei Lösungen $u_i(x,t)$, $i = 1,2$ mit den Anfangswerten

$$u_i(x,0) = \varphi_i(x), \quad \frac{\partial}{\partial t}u_i(x,0) = 0, \quad i = 1,2$$

und

$$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \delta$$

um weniger als ε unterscheiden, d.h.

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| < \varepsilon\,.$$

Aufgabe 10:

Man löse

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - u_{xx} &= 0, && 0 \le x, t \le 1, \\
u(x,0) &= x(1-x); && 0 \le x \le 1, \\
u_t(x,0) &= 0, && 0 \le x \le 1, \\
u(0,t) &= u(1,t) = 0, && 0 \le t \le 1
\end{aligned}
$$

durch geeignete Fortsetzung der Anfangsdaten. Wo ist u wie oft differenzierbar?

Aufgabe 11

Man berechne zu

$$u_{tt} = 4u_{xx}\ , \quad \text{mit} \quad u(x,0) = \varphi(x)\ ,\ u(2x,x) = \psi(x)$$

eine Lösung, falls sie existiert.

Aufgabe 12:

Man löse

$$
\begin{aligned}
u_{xy} &= x^2 + \sin y\ , \quad x, y > 0 \\
u(x,0) &= e^x\ , \quad x \ge 0 \\
u(0,y) &= y + 1\ , \quad y \ge 0\ .
\end{aligned}
$$

Aufgabe 13:

Man löse

$$u_x - u_y = 1 + 2x + 2y \quad \text{mit} \quad u(x,x) = x$$

unter Verwendung

a) der Charakteristikenmethode und

b) des Summenansatzes $u(x,y) = f(x) + g(y)$.

Aufgabe 14:

Man zeige, dass das folgende Randwertproblem für die Wellengleichung keine Lösung besitzt.

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}\,, && 0 < x, t < 1 \\ u(x,0) &= x\,, && 0 \le x \le 1\,, \\ u(x,1) &= 1 + x(x-1)\,, && \\ u(0,t) &= t\,, && 0 \le t \le 1\,, \\ u(1,t) &= 1\,. && \end{aligned}$$

Man überprüfe auch, ob die vorgegebenen Randwerte in den Eckpunkten verträglich sind.

Aufgabe 15:

Man berechne durch einen Separationsansatz der Form $u(x,y) = f(x) \cdot g(y)$ eine Lösung der Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0\,, && x \in (0,1), \quad y > 0, \\ u(x,0) &= \frac{2}{n} \sin 3n\pi x\,, && x \in [0,1], \\ u_y(x,0) &= 0\,, && \\ u(0,y) &= 0\,, && y \ge 0\,, \\ u(1,y) &= 0\,. && \end{aligned}$$

und begründe damit, warum keine stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten vorliegt, die Aufgabe also nicht sachgemäß gestellt ist.

Aufgabe 16:

Gegeben sei die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$u_{xx} + 2xu_{xy} + (x^2 - 4)u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y)\,.$$

a) Man bestimme den Typ der Differentialgleichung.

b) Man berechne die Charakteristiken und

c) transformiere die Differentialgleichung auf Normalform für den Fall

$$f(x, y, u, u_x, u_y) = -u_y\,.$$

d) Mit den Daten aus c) bestimme man die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

Aufgabe 17:

Man berechne die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe für die folgende Wärmeleitungsgleichung:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} && \text{für} \quad 0 < x < 2\,, \\ & && \phantom{\text{für}} \quad 0 < t \leq T\,, \\ u(0,t) &= 0 && \text{für} \quad 0 \leq t \leq T \\ u(2,t) &= 0 && \\ u(x,0) &= u_0(x) && \text{für} \quad 0 \leq x \leq 2\,. \end{aligned}$$

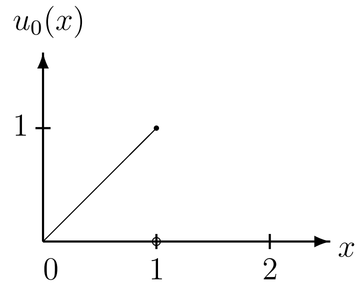

Bild 17 Anfangsfunktion u_0

Hinweis: Man bestimme mit einem Produktansatz der Form

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$$

zunächst Lösungen der Differentialgleichung zu den homogenen Randdaten.

Aufgabe 18:

Gegeben sei die folgende Anfangsrandwertaufgabe für die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t &= 3u_{xx} \quad \text{für} \quad 0 < x < \pi\,, \quad 0 < t\,, \\ u(0,t) &= 1\,, \quad u(\pi,t) = -1 \quad \text{für} \quad 0 \leq t\,, \\ u(x,0) &= \cos x \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq \pi\,. \end{aligned}$$

a) Man gebe eine einfache Näherungslösung $\tilde{u}$ an und schätze den Fehler $|\tilde{u} - u^*|$ bezüglich der Lösung u^* in $D := [0,\pi] \times [0,\infty[$ nach oben ab.

b) Man berechne die Lösung u^*.

Hinweis: Es darf die sich aus dem Produktansatz ergebende Lösungsdarstellung verwendet werden.

Aufgabe 19:

Mit Hilfe des Produktansatzes $u(x,y) = f(x) \cdot g(y)$ bestimme man Lösungen von

$$u_{xy} + u_x + u_y + 2u = 0\,.$$

Aufgabe 20:

a) Man zeige mit $z = x + iy$ gilt:
$u(x, y) := \mathrm{Re}(e^z)$ und $v(x, y) := \mathrm{Im}(e^z)$ sind harmonische Funktionen, d.h. Lösungen der Gleichung
$$\Delta w = 0\,.$$

b) Man berechne eine Lösung von
$$\Delta u = x + y$$
in Polynomform.

Aufgabe 21:

Die Transversalschwingungen einer am Rand eingespannten kreisfömigen Membran werden beschrieben durch das folgende Anfangsrandwertproblem
$$\begin{aligned}
u_{tt} &= c^2 \Delta u && \text{für} \quad (t, x, y) \in]0, \infty[\times \{x^2 + y^2 < R^2\}\,, \\
u(x, y, t) &= 0 && \text{für} \quad x^2 + y^2 = R^2 \quad \text{und} \quad t \geq 0\,, \\
u(x, y, 0) &= u_0(x, y) && \text{für} \quad (x, y) \in \{x^2 + y^2 \leq R^2\}\,, \\
u_t(x, y, 0) &= v_0(x, y) && .
\end{aligned}$$
Man gebe die zu lösenden gewöhnlichen Differentialgleichungen an, gegebenenfalls mit Randbedingungen, die sich bei der Lösungskonstruktion über einen Produktansatz ergeben. Dabei sollen Polarkoordinaten für die Ortsvariablen verwendet werden.

Aufgabe 22:

Man zeige, dass bei der Telegraphengleichung
$$u_{tt} - u_{xx} + 4u_t + 4u = 0$$
mit folgender Randbedingung
$$u(0, t) = \cos t$$
ein Produktansatz der Form $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ zu keiner Lösung führt.

Aufgabe 23:

Man löse das folgende Dirichlet-Problem im Rechteck
$$\begin{aligned}
\Delta u &= 0\,, \quad 0 < x, y < \pi\,, \\
u(x, 0) &= 0\,, \quad u(x, \pi) = 0\,, \quad 0 \leq x \leq \pi\,, \\
u(0, y) &= \sin y\,, \quad u(\pi, y) = \sin 2y\,, \quad 0 \leq y \leq \pi
\end{aligned}$$

und zeichne die Lösung.

Aufgabe 24:

Man bestimme $a, b, c \in \mathbb{R}$ so, dass sich eine rechtsseitige Differenzenapproximation von $u_{xx}(x_j, y_j)$ möglichst hoher Ordnung p aus der folgenden Gleichung

$$u_{xx}(x_j, y_j) = \frac{1}{h^2} \left(a \cdot u_{j,j} + b \cdot u_{j+1,j} + c \cdot u_{j+2,j} \right) + O(h^p)$$

ergibt.

Hinweis: Man entwickle $u_{j+k,j} := u(x_j + kh, y_j)$ für $k = 1, 2$ jeweils in eine (eindimensionale) Taylor-Reihe um x_j.