

Hörsaalübungsaufgaben zu

Differentialgleichungen I

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Aufgabe 1:

Man löse die folgenden Differentialgleichungen durch Trennung der Variablen (Separation):

a) $3y' - 2y + 1 = 0$,

b) $x^2y' + y^2 + 2y + 1 = 0$

und bestätige durch eine Probe, dass es sich um Lösungen handelt.

Aufgabe 2:

a) Man löse die Anfangswertaufgabe $y' = y^2 - 16$ mit $y(0) = 5$.

b) Man löse die Differentialgleichung $y' = \frac{x - y}{x}$.

Aufgabe 3:

Man löse die folgenden Differentialgleichungen unter Verwendung der Variation der Konstanten:

a) $2y' - 3y = 4$,

b) $y' - \frac{2y}{x} = x^3 e^{x^2}$.

Aufgabe 4:

Man löse die linearen Differentialgleichungen mit einem speziellen Ansatz für die Inhomogenität:

a) $2y' - 3y = 4,$

b) $5y' + 4y = 3e^{2x} + e^{-x}.$

Aufgabe 5:

Durch Substitution löse man die Differentialgleichung

$$y' = (x - y + 3)^2 \quad \text{mit} \quad y(1) = 1.$$

Aufgabe 6:

Man löse die folgenden Differentialgleichungen

a) $y' + y + x^2y^4 = 0,$

b) $y' + xy = xy^3.$

Aufgabe 7:

Man löse die Differentialgleichung $y' + (6t - 4)y + (3t - 1)y^2 = 3 - 3t.$

Hinweis: Es existiert eine Lösung der Form $y(x) = c.$

Aufgabe 8:

Man zeige, dass die folgende Differentialgleichung exakt ist

$$(t^2 e^y - 1)y' + 2t e^y = 0$$

Man löse die Differentialgleichung, wobei eine Lösungsdarstellung durch eine implizite Gleichung ausreicht.

Aufgabe 9:

Man zeige, dass die Differentialgleichung

$$y + ty^3 + (t + 2t^2y^2)y' = 0$$

einen integrierenden Faktor der Form $m = m(t \cdot y)$ besitzt und bestimme damit dann die allgemeine Lösung (eine implizite Darstellung reicht aus).

Aufgabe 10:

Man löse folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(1 - y)y'' + 2(y')^2 = 0.$$

Aufgabe 11:

Man löse die folgenden Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\text{a) } y'' = y^{-3}, \quad \text{b) } xy'' = y' \ln\left(\frac{y'}{x}\right).$$

Aufgabe 12:

Man löse die folgenden Anfangswertaufgaben und bestimme den Bereich, in dem die Lösungen existieren

- a) $y' = 2xe^{-y}$ mit $y(0) = 0$,
- b) $y' = 2xy$ mit $y(0) = 3$,
- c) $y' - \frac{y}{3} - \frac{y^4}{3} = 0$ mit $y(0) = 1$.

Aufgabe 13:

Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$y' = 2y - 6x + 3, \quad y(0) = 1.$$

- a) Man berechne mit Hilfe des Eulerschen-Polygonzug-Verfahrens mit $h = 0.1$ eine Näherung für $y(0.5)$.
- b) Man führe 5 Schritte des Verfahrens der sukzessiven Approximation aus und berechne $y^{[5]}(0.5)$ als Näherung für $y(0.5)$.
- c) Man löse die Anfangswertaufgabe und berechne $y(0.5)$.
- d) Man gebe von der Potenzreihe von $y(x)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ den Abschnitt bis zur Ordnung 5 an, vergleiche diesen mit $y^{[0]}(x)$ bis $y^{[5]}(x)$ aus Teil b) und zeichne diese Funktionen im Intervall $[0, 0.5]$.

Aufgabe 14:

- a) Man berechne eine Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y'(t) + y(t) + y^{2/3}(t) = 0, \quad y(0) = 1.$$

- b) Man zeige, dass die Lösung im Intervall $[0, 3 \ln 2]$ eindeutig bestimmt ist.
 c) Man zeige, dass die Lösung im Intervall $[0, b]$ mit $b > 3 \ln 2$ nicht mehr eindeutig bestimmt ist und gebe eine zweite Lösung an.

Aufgabe 15:

Gegeben sei die folgende Anfangswertaufgabe für $t \neq 0$:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/t & -2/t^3 \\ -2t & 1/t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{y}(1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Man bestimme eine Polynomlösung der Form

$$\mathbf{y}^1(t) = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \\ b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 \end{pmatrix}.$$

- b) Bilden $\mathbf{y}^1(t)$ und $\mathbf{y}^2(t) := \begin{pmatrix} 1/t^3 \\ 1/t \end{pmatrix}$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung?
 c) Man löse die Anfangswertaufgabe.

Aufgabe 16:

Man berechne die allgemeine Lösung des linearen Differentialgleichungssystems

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{x} & 1 \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

unter Verwendung der Variation der Konstanten.

Aufgabe 17:

a) Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} 3x - 1 \\ 6 - x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Man berechne

- (i) die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Systems,
- (ii) eine spezielle Lösung des zugehörigen inhomogenen Systems und
- (iii) dann die Lösung der Anfangswertaufgabe.

b) Man bestimme die allgemeine reelle Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{y} + e^{3x} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems eignet sich hier der Ansatz $\mathbf{y}_p(x) = e^{3x} \mathbf{c}$ mit $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 18:

Man bestimme ein Fundamentalsystem des Differentialgleichungssystems

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}.$$

Aufgabe 19:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' + \frac{4}{x}y' - \frac{4}{x^2}y = -18.$$

- a) Man bestimme ein Fundamentalsystem mit dem Reduktionsverfahren.
Hinweis: Es gibt eine polynomiale Lösung $u(x) = ax + b$.
- b) Man schreibe die Differentialgleichung um in ein System erster Ordnung und berechne eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung unter Verwendung der Variation der Konstanten.
- c) Man gebe die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an.

Aufgabe 20:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' + 5y' + 4y = 4x - 3.$$

- a) Man berechne die allgemeine Lösung mit Hilfe eines speziellen Ansatzes für die Inhomogenität.
- b) Man schreibe die Differentialgleichung als System erster Ordnung und berechne die allgemeine Lösung des Systems unter Verwendung
- (i) der Variation der Konstanten und
 - (ii) der Methode der Greenschen Funktion.

Aufgabe 21:

- a) Man berechne die allgemeine reelle Lösung für $y'''' + 2y''' + 3y'' - 2y' - 4y = 0$.
- b) Man löse die Anfangswertaufgabe

$$y'''' - 3y' - 2y = -6e^{-x} \quad \text{mit} \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 9$$

mit Hilfe

- (i) des charakteristischen Polynoms sowie eines speziellen Ansatzes für die Inhomogenität und
- (ii) der Laplace-Transformation.

Aufgabe 22:

Man löse die Anfangswertaufgabe

$$u' = -3u - 2v, \quad u(0) = 2$$

$$v' = 2u - 3v, \quad v(0) = -3$$

mit Hilfe der Laplace-Transformation.

Aufgabe 23:

Man gebe die Gleichgewichtspunkte der folgenden Differentialgleichungssysteme an, untersuche sie auf Stabilität, bestimme ihren Typ und skizziere das zugehörige Phasenporträt:

$$\begin{aligned} \text{a) } \dot{x} &= x + 5y + 7, \\ \dot{y} &= x - 3y - 9, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \dot{x} &= -x - 2y - 6, \\ \dot{y} &= 5x + y - 6. \end{aligned}$$

Aufgabe 24:

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (x^2 - 9)(y + 4), \\ \dot{y} &= xy^2 - y^2 - 4x + 4. \end{aligned}$$

Man bestimme alle reellen stationären Lösungen (Gleichgewichtspunkte) und untersuche deren Stabilitätsverhalten mit (lokaler) Klassifikation.

Aufgabe 25:

Gegeben sei das folgende Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= -3y_1^5 - 4y_1y_2^2, \\ y_2' &= y_1^2y_2 - 5y_2^3. \end{aligned}$$

- Man berechne alle stationären Punkte $\mathbf{y}^* \in \mathbb{R}^2$ des Differentialgleichungssystems.
- Man untersuche das Stabilitätsverhalten aller stationären Punkte nach Stabilitätssatz III.
- Man untersuche das Stabilitätsverhalten aller stationären Punkte mit Hilfe der Methode von Ljapunov, wobei eine Ljapunov-Funktion V in der Form $V(\mathbf{y}) = ay_1^2 + by_2^2$ gesucht werden soll.

Aufgabe 26

Gegeben sei das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 + y_3, & y_1(0) + e^{-1} \cdot y_1(1) &= 2, \\ \dot{y}_2 &= y_1 + y_3, & y_2(0) + e^{-1} \cdot y_2(1) &= 2, \\ \dot{y}_3 &= 2y_3, & y_3(0) + e^{-1} \cdot y_3(1) &= 0. \end{aligned}$$

- a) Man gebe die Aufgabe in Matrixschreibweise an,
- b) bestimme die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems und
- c) löse die Randwertaufgabe.

Aufgabe 27:

Gegeben ist die Minimierungsaufgabe: Minimiere das Funktional

$$I[y] = \int_0^2 16y^2 + (y')^2 - 8yy' dt$$

für alle C^1 -Funktionen y mit $y(0) = 0$ und $y(2) = 1$.

- a) Man stelle die zugehörige Euler-Lagrange-Gleichung auf,
- b) löse die zugehörige Randwertaufgabe und
- c) berechne für die Lösung aus (ii) den Wert des Funktionals $I[y]$.

Aufgabe 28:

Für die Differentialgleichung

$$y'' + 4y = 0 \quad \text{mit} \quad 0 \leq x \leq \pi$$

bestimme man die allgemeine Lösung. Damit berechne man alle Lösungen für folgende Randbedingungen:

- a) $y(0) = 0$ und $y'(\pi) = 1$,
- b) $y(0) + 2y(\pi) = 0$ und $3y(0) + 4y(\pi) = 0$,
- c) $y'(0) + y'(\pi) = 0$ und $y'(0) - y'(\pi) = 1$.

unter Verwendung der allgemeinen Lösungsdarstellung der Einzelgleichung und alternativ durch Umschreiben in ein System 1.Ordnung und dann unter Verwendung der Shooting-Matrix.