Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2015/16**
Dr. K. Rothe

Hörsaalübungsaufgaben zu

Differentialgleichungen I

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Aufgabe 1:
Man löse die folgenden Differentialgleichungen durch Trennung der Variablen (Separation):

a) $3y' - 2y + 1 = 0$,

b) $x^2y' + y^2 + 2y + 1 = 0$

und bestätige durch eine Probe, dass es sich um Lösungen handelt.

Aufgabe 2:
Man löse die folgenden Differentialgleichungen unter Verwendung der Variation der Konstanten:

a) $2y' - 3y = 4$,

b) $y' - \frac{2y}{x} = x^3 e^{x^2}$.

Aufgabe 3:
Durch Substitution löse man folgende Differentialgleichungen:

a) $y' = \frac{x-y}{x}$ für $x \neq 0$,

b) $y' = (x - y + 3)^2$ mit $y(1) = 1$.

Aufgabe 5:
Man bestimme den Typ der folgenden Differentialgleichungen und löse sie:

a) $y' = -4xy - xy^2$,

b) $y' + (6t-4)y + (3t-1)y^2 = 3 - 3t$.
Hinweis: Es existiert eine Lösung der Form $y(x) = c$.

Aufgabe 6:
Man zeige, dass die folgende Differentialgleichung exakt ist

$$(t^2 e^y - 1)y' + 2t\, e^y = 0$$

Man löse die Differentialgleichung, wobei eine Lösungsdarstellung durch eine implizite Gleichung ausreicht.

Aufgabe 7:
Man zeige, dass die Differentialgleichung

$$y + ty^3 + (t + 2t^2y^2)y' = 0$$

einen integrierenden Faktor der Form $m = m(t \cdot y)$ besitzt und bestimme damit dann die allgemeine Lösung (eine implizite Darstellung reicht aus).

Aufgabe 8:
Man löse die folgenden Differentialgleichungen:

a) $(1-y)y'' + 2(y')^2 \;=\; 0$, b) $y'' \;=\; y^{-3}$, c) $xy'' \;=\; y' \ln\left(\dfrac{y'}{x}\right)$.

Aufgabe 9:

a) Man bestimme Lösungen der folgenden Differentialgleichungen

(i) Lineare homogene Differentialgleichung 2.Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' - 3y' + 2y = 0 ,$$

Hinweis: Es existieren Lösungen der Form $y(x) = e^{\lambda x}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) Eulersche (lineare homogene) Differentialgleichung 2.Ordnung

$$x^2y'' - 6xy' + 12y = 0 .$$

Hinweis: Es existieren Lösungen der Form $y(x) = x^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) Man zeige, dass jede Linearkombination der berechneten Lösungen wieder die Differentialgleichung löst.

Aufgabe 10:
Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$y' = 2y - 6x + 3\,, \quad y(0) = 1\,.$$

a) Man berechne mit Hilfe des Eulerschen-Polygonzug-Verfahrens mit $h = 0.1$ eine Näherung für $y(0.5)$.

b) Man führe 5 Schritte des Verfahrens der sukzessiven Approximation aus und berechne $y^{[5]}(0.5)$ als Näherung für $y(0.5)$.

c) Man löse die Anfangswertaufgabe und berechne $y(0.5)$.

d) Man gebe von der Potenzreihe von $y(x)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ den Abschnitt bis zur Ordnung 5 an, vergleiche diesen mit $y^{[0]}(x)$ bis $y^{[5]}(x)$ aus Teil b) und zeichne diese Funktionen im Intervall $[0, 0.5]$.

Aufgabe 11:

a) Man berechne eine Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y'(t) + y(t) + y^{2/3}(t) = 0\,, \quad y(0) = 1\,.$$

b) Man zeige, dass die Lösung im Intervall $[0, 3\ln 2]$ eindeutig bestimmt ist.

c) Man zeige, dass die Lösung im Intervall $[0, b]$ mit $b > 3\ln 2$ nicht mehr eindeutig bestimmt ist und gebe eine zweite Lösung an.

Aufgabe 12:
Man löse die folgende Anfangswertaufgabe für $x \neq 0$:

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 16x^2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{y}(1) = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

Aufgabe 13:
Gegeben sei die folgende Anfangswertaufgabe für $t \neq 0$:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/t & -2/t^3 \\ -2t & 1/t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{y}(1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Man bestimme eine Polynomlösung der Form

$$\boldsymbol{y}^1(t) = \begin{pmatrix} a_0 + a_1\,t + a_2\,t^2 + a_3\,t^3 \\ b_0 + b_1\,t + b_2\,t^2 + b_3\,t^3 \end{pmatrix}.$$

b) Bilden $\boldsymbol{y}^1(t)$ und $\boldsymbol{y}^2(t) := \begin{pmatrix} 1/t^3 \\ 1/t \end{pmatrix}$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung?

c) Man löse die Anfangswertaufgabe.

Aufgabe 14:

a) Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} 3x-1 \\ 6-x \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Man berechne

(i) die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Systems,

(ii) eine spezielle Lösung des zugehörigen inhomogenen Systems und

(iii) dann die Lösung der Anfangswertaufgabe.

b) Man bestimme die allgemeine reelle Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\boldsymbol{y} + e^{3x}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems eignet sich hier der Ansatz $\boldsymbol{y}_p(x) = e^{3x}\mathbf{c}$ mit $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 15:
Man bestimme ein Fundamentalsystem des Differentialgleichungssystems

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{y}.$$

Aufgabe 16:
Man berechne die allgemeine reelle Lösung für folgende Differentialgleichungen:

a) $y''' + 7y'' + 7y' - 15y = 0$,

b) $y''' - 12y' - 16y = 0$,

c) $y'''' + 2y''' + 3y'' - 2y' - 4y = 0$.

Aufgabe 17:
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' + 5y' + 4y = 4x - 3 .$$

a) Man berechne die allgemeine Lösung mit Hilfe eines speziellen Ansatzes für die Inhomogenität.

b) Man schreibe die Differentialgleichung als System erster Ordnung und berechne die allgemeine Lösung des Systems unter Verwendung

   (i) der Variation der Konstanten und

   (ii) der Methode der Greenschen Funktion.

Aufgabe 18:
Man löse die Anfangswertaufgabe

$$y''' - 3y' - 2y = -6e^{-x} \quad \text{mit} \quad y(0) = 2 , \quad y'(0) = 0 , \quad y''(0) = 9$$

mit Hilfe

a) des charakteristischen Polynoms sowie eines speziellen Ansatzes für die Inhomogenität und

b) der Laplace-Transformation.

Aufgabe 19:
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''' + 7y'' + 14y' + 8y = 0 \, .$$

a) Man schreibe die Differentialgleichung als System erster Ordnung,

b) untersuche den Gleichgewichtspunkt des Systems auf Stabilität,

c) gebe die allgemeine Lösung des Systems an und

d) vergleiche diese mit der, die man erhält, wenn die Differentialgleichung mit den Methoden für eine Einzelgleichung höherer Ordnung gelöst wird.

Aufgabe 20:
Man gebe die Gleichgewichtspunkte der folgenden Differentialgleichungssysteme an, untersuche sie auf Stabilität, bestimme ihren Typ und skizziere das zugehörige Phasenporträt:

a) $$\begin{aligned} \dot{x} &= x + 5y + 7, \\ \dot{y} &= x - 3y - 9, \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} \dot{x} &= -x - 2y - 6, \\ \dot{y} &= 5x + y - 6. \end{aligned}$$

Aufgabe 21:
Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (x^2 - 9)(y + 4) \, , \\ \dot{y} &= xy^2 - y^2 - 4x + 4 \, . \end{aligned}$$

Man bestimme alle reellen stationären Lösungen (Gleichgewichtspunkte) und untersuche deren Stabilitätsverhalten mit (lokaler) Klassifikation.

Aufgabe 22:
Gegeben sei das folgende Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= -3y_1^5 - 4y_1 y_2^2 \, , \\ y_2' &= y_1^2 y_2 - 5y_2^3 \, . \end{aligned}$$

a) Man berechne alle stationären Punkte $\boldsymbol{y}^* \in \mathbb{R}^2$ des Differentialgleichungssystems.

b) Man untersuche das Stabilitätsverhalten aller stationären Punkte nach Stabilitätssatz III.

c) Man untersuche das Stabilitätsverhalten aller stationären Punkte mit Hilfe der Methode von Ljapunov, wobei eine Ljapunov-Funktion V in der Form $V(\boldsymbol{y}) = ay_1^2 + by_2^2$ gesucht werden soll.

Aufgabe 23:
Für die Differentialgleichung

$$y'' + 4y = 0 \quad \text{mit} \quad 0 \leq x \leq \pi$$

bestimme man die allgemeine Lösung. Damit berechne man alle Lösungen für folgende Randbedingungen:

a) $y(0) = 0$ und $y'(\pi) = 1$,

b) $y(0) + 2y(\pi) = 0$ und $3y(0) + 4y(\pi) = 0$,

c) $y'(0) + y'(\pi) = 0$ und $y'(0) - y'(\pi) = 1$.

unter Verwendung der allgemeinen Lösungsdarstellung der Einzelgleichung und alternativ durch Umschreiben in ein System 1.Ordnung und dann unter Verwendung der Shooting-Matrix.

Aufgabe 24:
Gegeben ist die Minimierungsaufgabe: Minimiere das Funktional

$$I[y] = \int_0^2 16y^2 + (y')^2 - 8yy' \, dt$$

für alle C^1-Funktionen y mit $y(0) = 0$ und $y(2) = 1$.

a) Man stelle die zugehörige Euler-Lagrange-Gleichung auf,

b) löse die zugehörige Randwertaufgabe und

c) berechne für die Lösung aus (ii) den Wert des Funktionals $I[y]$.