Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2001/02**
Dr. K. Rothe

Anleitungsaufgaben zu

Differentialgleichungen I

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Die in Klammern angegebenen Nummern beziehen sich auf den Aufgabenband 3 von Oberle, Rothe, Sonar

Aufgabe 1:

Ein Tank enthalte 2000 Liter Wasser, in dem 60 kg Salz gelöst sind. Beginnend mit der Zeit $t_0 = 0$ sollen ständig pro Minute 15 Liter Salzlösung abfließen, aber auch 15 Liter Wasser mit einem Salzgehalt von 3 kg zufließen, mit anschließender sofortiger Durchmischung.

a) Wie groß ist der Salzgehalt $m(t)$ in kg im Tank zur Zeit $t > 0$?

b) Auf welchem Niveau stabilisiert sich der Salzgehalt im Tank?

Aufgabe 2: (vgl. 20.2.1)

Man bestimme den Typ der folgenden Differentialgleichungen und berechne Lösungen:

$$\text{a) } y' = \frac{2\cos^2 y}{1-x^2}\,, \quad \text{b) } y' = \frac{4y^3+x^3}{3xy^2}\,, \quad \text{c) } y' + xy = x\,.$$

Aufgabe 3: (vgl. 20.2.2)

Für folgende Differentialgleichungen bestimme man den Typ und berechne Lösungen:

$$\text{a) } y' + y + \left(\frac{1}{3} - x\right) y^4 = 0\,, \quad \text{b) } y' + (x-1)^2 y + x\left(1 - \frac{x}{2}\right) y^2 = \frac{x^2}{2} - x + 1\,.$$

Hinweis: Es gibt eine polynomiale Lösung für b).

Aufgabe 4: (vgl. 20.2.4)

Man löse die Differentialgleichungen

a) $2ty^2 e^{t^2y^2} + (2yt^2 e^{t^2y^2} + 2y)y' = 0$

b) $2t^2 + 2ty + (t+y)\cos(t+y) + (2ty + 2y^2 + (t+y)\cos(t+y))y' = 0$,

wobei die Lösungsdarstellung in einer impliziten Gleichung ausreicht.

Aufgabe 5:

a) Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{t} - \frac{1}{t} .$$

b) Man bestimme den Anfangswert $y(1) = y_0$ so, dass für den Grenzwert gilt

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y(t)}{t} = 5 .$$

Aufgabe 6:

Man löse die folgenden Differentialgleichungen:

a) $y^2 y'' - (y')^3 \;=\; 0$, b) $y'' + y \;=\; 0$, c) $2xy'' - y' - x \;=\; 0$.

Aufgabe 7:

a) Man berechne eine Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' + 2y + \sqrt{y} = 0 , \quad y(0) = \frac{1}{4} .$$

b) Man zeige, dass die Lösung im Intervall $[0, \ln 2]$ eindeutig bestimmt ist.

c) Man zeige, dass die Lösung im Intervall $[0, b]$ mit $b > \ln 2$ nicht mehr eindeutig bestimmt ist und gebe eine zweite Lösung an.

Aufgabe 8:

a) Man berechne die allgemeine radialsymmetrische Lösung $u(r)$, mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, der Poissongleichung $\Delta u = 1$ im $\mathbb{R}^2$.

b) Man berechne die Lösung der Randwertaufgabe aus a) mit $u(1) = 0 = u(2)$.

Aufgabe 9a: (vgl. 24.1.3)

a) Gegeben sei die Anfangswertaufgabe $\quad y' = y - \dfrac{2x}{y} \quad$ mit $\quad y(0) = 1$.

(i) Man berechne die exakte Lösung.

(ii) Mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung (vgl. Lehrbuch (24.2.14)) berechne man die Lösung im Punkt $x = 2$ näherungsweise für die Schrittweiten $h = 0.4,\ 0.2,\ 0.1,\ 0.05,\ 0.025$.

b) Gegeben sei die Anfangswertaufgabe $\quad y' = y \quad$ mit $\quad y(0) = 1\,.$

(i) Man berechne die exakte Lösung.

(ii) Man führe drei Schritte mit dem Verfahren der sukzessiven Approximation durch.

Aufgabe 9b: (vgl. 21.1.1)

Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$y' = t^2(y-1), \quad y(0) = 2 \quad .$$

a) Man bestimmen mit Hilfe des Eulerschen Polygonzugverfahrens mit $h = 0.25$ eine Näherung für $y(1)$.

b) Man führen drei Schritte des Verfahrens der sukzessiven Approximation (vgl. Lehrbuch (21.1.11)) aus und berechne $y^{[3]}(1)$ als Näherung für $y(1)$.

c) Man löse die gegebene Anfangswertaufgabe analytisch, berechne den Wert $y(1)$ und zeichne die Lösung.

Bemerkungen zu Aufgabe 10:

Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt der Mittelwertsatz $f(x_1) - f(x_2) = f'(x_0)(x_1 - x_2)\,.$

Die Lipschitzkonstante L kann berechnet werden durch: $L = \sup\{|f'(x)| \;:\; x_1 \le x \le x_2\}\;.$

Aufgabe 11: (vgl. 22.1.1)

Für das folgende lineare Differentialgleichungssystem berechne man die allgemeine Lösung:

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \dfrac{x+1}{x-1} \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \quad \text{mit} \quad x \neq 1 \quad .$$

Hinweis: Es gibt eine Lösung in Polynomform je Komponente.

Aufgabe 12: (vgl. 22.2.3)

Man berechne die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems $\quad \dot{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{b}(t)$

$$\text{mit} \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{b}(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Dazu bestimme man

a) Eigenwerte, Eigenvektoren und gegebenenfalls Hauptvektoren von $\boldsymbol{A}$,

b) ein reelles Fundamentalsystem von $\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{y}$ und

c) eine partikuläre Lösung von $\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}$ mittels des Ansatzes $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{v}\,e^{2t}$ mit $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 13: (vgl. 22.3.2)

Man berechne die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}$$

und gebe die Lösungen auch in reeller Form an und berechne die Lösung der Anfangswertaufgabe zum Anfangswert $\boldsymbol{y}(0) = (1,1,1)^T$.

Aufgabe 14: (vgl. 22.2.1)

Man berechne ein Fundamentalsystem des linearen Systems $\dot{\boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}$.

Aufgabe 15: (vgl. 22.3.3)

Man bestimme ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$y'' - \frac{1}{t}y' - \frac{3}{t^2}y = 0\,.$$

Hinweis: Es gibt eine polynomiale Lösung.

Aufgabe 16: (vgl. 22.3.1)

a) Man berechne ein reelles Fundamentalsystem von

$$y^{(5)} - 3y^{(4)} + y''' + y'' + 4y = 0\,.$$

Hinweis: $\lambda = 2$ ist mehrfache Nullstelle des zugehörigen charakteristischen Polynoms.

b) Man berechne die allgemeine Lösung von $y''' + 3y'' + 3y' + y = 4e^t(6t+5)$. Für eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung wähle man einen der Inhomogenität entsprechend angepassten Ansatz.

Aufgabe 17: (vgl. 22.4.2)

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (x+2)(10+6x+x^2+y)\,, \\ \dot{y} &= (y-1)(y-x-2)\,. \end{aligned}$$

Man bestimme alle reellen stationären Lösungen (Gleichgewichtspunkte) und untersuche sie auf Stabilität.

Aufgabe 18: (vgl. 22.4.4)

Gegeben sei die folgende Differentialgleichung:

$$y'' + y + y^3 = 0\,.$$

a) Man berechne alle Gleichgewichtspunkte.

b) Man untersuche das Stabilitätsverhalten aller Gleichgewichtspunkte nach Stabilitätssatz III des Lehrbuches.

c) Man untersuche das Stabilitätsverhalten aller Gleichgewichtspunkte mit Hilfe der Methode von Ljapunov, wobei eine Ljapunov-Funktion V in der Form $V(y, y') = ay^2 + by^4 + c(y')^2$ gesucht werden soll, und zeichne die gefundene Ljapunov-Funktion.

Aufgabe 19: (vgl. 23.1.1)

Gegeben sei das folgende lineare Zweipunkt-Randwertproblem:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 + 2y_3\,, & y_1(0) - y_1(b) &= 1\,, \\ y_2' &= y_1 + 2y_3\,, & y_2(0) - y_2(b) &= 0\,, \\ y_3' &= 2y_1 + 2y_2 + 3y_3\,, & y_3(0) - y_3(b) &= 2\,. \end{aligned}$$

a) Man formuliere das Randwertproblem in Matrizenschreibweise und

b) bestimme die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems.

c) Für welche $b \in \mathbb{R}$ ist die Randwertaugabe eindeutig lösbar?

Aufgabe 20: (vgl. 23.2.1)

a) Man bestimme eine C^1-Funktion $y = y_0(t)$ mit $y_0(0) = 0$ und $y_0(1) = \frac{2}{\pi}$, die das Funktional

$$I[y] = \int_0^1 y\,\sqrt{1 - y'^2}\,dt$$

minimiert, und berechne den minimalen Wert des Zielfunktionals.

b) Welche Lösung erhält man, wenn man die Randbedingung $y_0(1) = \frac{2}{\pi}$ weglässt? Welcher Wert ergibt sich nun für das Zielfunktional?

Aufgabe 21: (vgl. 23.3.2) Klausuraufgabe 2 vom 8.10.99

Man bestimme die Greensche Funktion für die Randwertaufgabe

$$y''(t) + y'(t) = h(t) \quad \text{mit} \quad y(0) = 0, \quad y'(0) - y'(1) = 0$$

und löse hiermit die Randwertaufgabe für $h(t) = t$.

Aufgabe 22: (vgl. 23.4.1)

Man bestimme die Eigenwerte und Eigenfunktionen der Randwertaufgabe

$$x^2 y'' + 3xy' + \lambda y \;=\; 0 \quad \text{mit} \quad y(1) = y(e) = 0\,,$$

berechne die vier kleinsten Eigenwerte und zeichne die zugehörigen Eigenfunktionen.

Hinweis: Man verwende den Lösungsansatz $y(x) = x^\alpha$.

Aufgabe 23a: (vgl. 24.1.2)

Man zeige, dass das Runge-Kutta-Verfahren

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot \underbrace{\frac{1}{6}\,(k_1 + k_2 + 4k_3)}_{\Phi} \quad \text{mit}$$

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n)\,, \quad k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1)\,, \\ k_3 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{4}(k_1 + k_2)\right) \end{aligned}$$

die Ordnung $p = 3$ besitzt.

Aufgabe 23b: (vgl. 24.2.1)

Gegeben sei das Mehrschrittverfahren

$$y_{n+4} \;=\; y_n + \frac{h}{3}\,(8f_{n+3} - 4f_{n+2} + 8f_{n+1})\;.$$

a) Man zeige, dass das Verfahren (mindestens) von der Ordnung $p = 4$ ist.

b) Ist das Verfahren stark stabil? (Begründung!)

Aufgabe 24: (vgl. 24.3.1)

Gegeben sei die Randwertaufgabe

$$y''(x) = 2(y'(x))^{\frac{3}{2}} \quad \text{mit} \quad y(0) = 0 \quad \text{und} \quad y(1) = 1\,. \qquad (*)$$

a) Man berechne (analytisch) die Lösung $y(x, s)$ der zugehörigen Anfangswertaufgabe $y(0) = 0$ und $y'(0) = s > 0$ und bestimme die Lage der Singularität $x_\infty(s)$ von $y(x, s)$. Für welche $s > 0$ gilt $x_\infty \in [0, 1]$?

b) Man berechne (analytisch) die Lösung $y(x, s^*)$ des Randwertproblems $(*)$ und zeichne sie.

c) Zur numerischen Lösung von $(*)$ soll das einfache Schießverfahren verwendet werden. Man stelle das zugehörige Nullstellenproblem

$$\tilde{F}(s) = y(1, s) - 1 = 0$$

auf, vereinfache es zu $F(s) = as^2 + bs + c = 0$ und bestimme alle Anfangswerte s_0, für die die Newton-Iteration für $F(s) = 0$ eine gegen s^* konvergente Folge liefert.