Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2000/01**
Dr. K. Rothe

Anleitungsaufgaben zu

Differentialgleichungen I

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Die in Klammern angegebenen Nummern beziehen sich auf den Aufgabenband 3 von Oberle, Rothe, Sonar

Aufgabe 1: (vgl. 20.2.2)

Für folgende Differentialgleichungen bestimme man den Typ und berechne die Lösungen:

a) $y' + \dfrac{y}{x} = 2\,,$ b) $y' + (x-1)^2 y + x\left(1 - \dfrac{x}{2}\right) y^2 = \dfrac{x^2}{2} - x + 1\,,$

c) $y' = \dfrac{y^2 + xy + x^2}{x^2}\,,$ d) $y' + y + \left(\dfrac{1}{3} - x\right) y^4 = 0\,.$

Hinweis: Es gibt eine polynomiale Lösung für b).

Aufgabe 2: (vgl. 20.2.6)

Gegeben sei die Differentialgleichung $y' = xy\,.$

a) Durch Separation ermittle man die Lösung.

b) Unter Verwendung eines Potenzreihenansatzes der Form $y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ ermittle man die Lösung und bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe.

Aufgabe 3:

Die Clairautsche Differentialgleichung

$$y = xy' + \psi(y')$$

besitzt eine allgemeine Lösung der Form $y = Cx + \psi(C)$ mit $C \in \mathbb{R}$.

Außerdem kann noch eine 'singuläre Lösung' y_s vorhanden sein, die man durch Elimination von p aus den Gleichungen $y_s = px + \psi(p)$ und $x + \psi'(p) = 0$ erhält.

Man löse die Differentialgleichung

$$y = xy' - y' + (y')^2 \ ,$$

und gebe eine geometrische Deutung der singulären Lösung y_s an.

Aufgabe 4:

Man löse die folgenden Differentialgleichungen:

$$\text{a)}\ \ y^2y'' - (y')^3 \ = \ 0 \ , \qquad \text{b)}\ \ y'' + y \ = \ 0 \ , \qquad \text{c)}\ \ 2xy'' - y' - x \ = \ 0 \ .$$

Aufgabe 5:

Man löse die folgende Differentialgleichung:

$$1 - 2x + 4y^3 + \frac{2x}{x^2+y^2} + \left(1 + 12xy^2 + \frac{2y}{x^2+y^2}\right) y' = 0 \ .$$

Hinweis: Eine implizite, die Lösung enthaltende, Gleichung reicht aus.

Aufgabe 6: (vgl. 20.2.3)

Man löse die Differentialgleichungen $y + ty^3 + (t + 2t^2y^2)y' = 0$.

Hinweis: Man suche einen integrierenden Faktor der Form $m(t,y) \ = \ m(ty)$.

Aufgabe 7: (keine Ersatzaufgabe)

Aufgabe 8: (keine Ersatzaufgabe)

Aufgabe 9:

Ein Tank enthalte 2000 Liter Wasser, in dem 60 kg Salz gelöst sind. Beginnend mit der Zeit $t_0 = 0$ sollen ständig pro Minute 15 Liter Salzlösung abfließen, aber auch 15 Liter Wasser mit einem Salzgehalt von 3 kg zufließen, mit anschließender sofortiger Durchmischung.

a) Wie groß ist der Salzgehalt $m(t)$ in kg im Tank zur Zeit $t > 0$?

b) Auf welchem Niveau stabilisiert sich der Salzgehalt im Tank?

Aufgabe 10: (vgl. 22.1.1)

Für das folgende lineare Differentialgleichungssystem berechne man die allgemeine Lösung:

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \dfrac{x+1}{x-1} \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \quad \text{mit} \quad x \neq 0 \quad .$$

Hinweis: Es gibt eine Lösung in Polynomform je Komponente.

Aufgabe 11:

Man berechne die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} - \begin{pmatrix} 2+t \\ 2t \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 12: (vgl. 22.2.3)

Man berechne die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{b}(t)$

$$\text{mit} \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{b}(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Dazu bestimme man

a) Eigenwerte, Eigenvektoren und gegebenenfalls Hauptvektoren von $\boldsymbol{A}$,

b) ein reelles Fundamentalsystem von $\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{y}$ und

c) eine partikuläre Lösung von $\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}$ mittels des Ansatzes $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{v}\, e^{2t}$ mit $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$.

d) Man bestimme außerdem die Lösung zum Anfangswert

$$\boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 13: (vgl. 22.3.4)

Man berechne die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''' - y'' - 2y' = -6t^2 - 6t + 8 .$$

a) Unter Verwendung des Grundlösungsverfahrens für eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung.

b) Mit Hilfe eines angepassten speziellen Ansatzes für eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung.

Aufgabe 14:

Man berechne die allgemeine Lösung von

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 4e^t(6t + 5) .$$

Für eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung wähle man einen der Inhomogenität entsprechend angepassten Ansatz.

Aufgabe 15:

Man gebe die Gleichgewichtspunkte der folgenden Differentialgleichungssysteme an, untersuche sie auf Stabilität, bestimme ihren Typ und skizziere das zugehörige Phasenporträt:

a) $\dot{x} = y - 3x + 9\,,\quad \dot{y} = x - 3y - 11$
b) $\dot{x} = 4x + 5y\,,\quad \dot{y} = -5x - 4y\,.$

Aufgabe 16:

Man schreiben die Differentialgleichung

$$y''' - y'' - 9y' + 9y = 0$$

als System erster Ordnung und untersuche den Gleichgewichtspunkt des Systems auf Stabilität.

Man zeichne ein qualitatives Phasenporträt.

Aufgabe 17: (vgl. 22.4.2)

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (x+2)(10+6x+x^2+y)\,, \\ \dot{y} &= (y-1)(y-x-2)\,. \end{aligned}$$

Man bestimme alle reellen stationären Lösungen (Gleichgewichtspunkte) und untersuche sie auf Stabilität.

Aufgabe 18: (vgl. 22.4.4)

Gegeben sei das folgende Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2\,, \\ y_2' &= -y_1 - y_1^3\,. \end{aligned}$$

a) Man berechne alle Gleichgewichtspunkte $\boldsymbol{y}^* \in \mathbb{R}^n$ des Differentialgleichunssystems.

b) Man untersuche das Stabilitätsverhalten aller Gleichgewichtspunkte nach Stabilitätssatz III des Lehrbuches.

c) Man untersuche das Stabilitätsverhalten aller Gleichgewichtspunkte mit Hilfe der Methode von Ljapunov, wobei eine Ljapunov-Funktion V in der Form $V(\boldsymbol{y}) = ay_1^2 + by_1^4 + cy_2^2$ gesucht werden soll, und zeichne die gefundene Ljapunov-Funktion.

Aufgabe 19: (vgl. 23.1.1)

Gegeben sei das folgende lineare Zweipunkt-Randwertproblem:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 + 2y_3\,, & y_1(0) - y_1(b) &= 1\,, \\ y_2' &= y_1 + 2y_3\,, & y_2(0) - y_2(b) &= 0\,, \\ y_3' &= 2y_1 + 2y_2 + 3y_3\,, & y_3(0) - y_3(b) &= 2\,. \end{aligned}$$

a) Man formuliere das Randwertproblem in Matrizenschreibweise und

b) bestimme die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems.

c) Für welche $b \in \mathbb{R}$ ist die Randwertaugabe eindeutig lösbar?

d) Im Falle der nicht eindeutigen Lösbarkeit ermittle man alle Lösungen.

Aufgabe 20: (vgl. 23.2.1)

Man bestimme eine C^1-Funktion $y = y_0(t)$ mit $y_0(0) = 0$ und $y_0(1) = \dfrac{2}{\pi}$, die das Funktional

$$I[y] = \int_0^1 y\sqrt{1 - y'^2}\,dt$$

minimiert, und berechne den minimalen Wert des Zielfunktionals.

Aufgabe 21:

Man bestimme alle Lösungen der folgenden Randwertaufgaben:

$$\begin{array}{lllll} \text{a)} & y'' + y = 0\,, & 0 \le x \le \pi/2\,, & y(0) = 0\,, & y'(\pi/2) = 1 \\ \text{b)} & y'' + y = 0\,, & 0 \le x \le \pi/2\,, & y(0) = 0\,, & y(\pi/2) = 2 \\ \text{c)} & y'' + y = 0\,, & 0 \le x \le \pi/2\,, & y(0) = 0\,, & y'(\pi/2) = 0\,. \end{array}$$

Aufgabe 22: (vgl. 23.3.2)

Man bestimme die Greensche Funktion für die Randwertaufgabe

$$y''(t) + y'(t) = h(t) \quad \text{mit} \quad y(0) = 0, \quad y'(0) - y'(1) = 0$$

und löse hiermit die Randwertaufgabe für $h(t) = t$.

Aufgabe 23: (vgl. 23.4.1)

Man bestimme die Eigenwerte und Eigenfunktionen der Randwertaufgabe

$$x^2y'' + 3xy' + \lambda y = 0 \quad \text{mit} \quad y(1) = y(e) = 0\,,$$

berechne die vier kleinsten Eigenwerte und zeichne die zugehörigen Eigenfunktionen.

Hinweis: Man verwende den Lösungsansatz $y(x) = x^\alpha$.

Aufgabe 24: keine Ersatzaufgabe

Gegeben sei eine Funktion $r : [0,1] \to \mathbb{R}$, die nur negative Werte annimmt. Die Funktion y löse die Differentialgleichung

$$\ddot{y} - y = r \quad \text{auf} \quad [0,1]$$

mit den Randwerten $y(0) = y(1) = 0$.

Zeigen Sie: Für $0 < t < 1$ ist $y(t) > 0$.

Hinweis: Der Standard-Zugang zu dieser Aufgabe wäre die Darstellung mit einer Greenschen Funktion. Man kann die Aussage aber auch ohne dieses Hilfmittel zeigen.