Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2019/20**
©Dr. K. Rothe

Hörsaalübungsaufgaben zu

Analysis III

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Aufgabe 1:
Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x(x+2) & , \quad -2 \le x \le 0 \quad , \\ x(2-x) & , \quad 0 \le x \le 2 \quad . \end{cases}$$

a) Man zeichne die Funktion f.

b) Man berechne die Fourier-Reihe der 4-periodischen direkten Fortsetzung von f.

c) Man zeichne $S_m(x)$ und die Fehlerfunktionen $f(x) - S_m(x)$ für $m = 1, 3, 5$, wobei $S_m(x)$ die m-te Partialsumme der Fourier-Reihe darstellt.

d) Man zeige mit Hilfe von b) die Identität $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$.

Aufgabe 2:
Gegeben sei die 2π-periodische direkte Fortsetzung der Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} -\sin x & , \quad -\pi \le x \le 0 \quad , \\ 0 & , \quad 0 \le x \le \pi \quad . \end{cases}$$

a) Man zeichne die direkte Fortsetung im Intervall $[-\pi, 4\pi]$.

b) Man berechne die zugehörige Fourier-Reihe.

c) Man zeichne die Partialsummen $S_0(x), \ldots, S_3(x)$ der berechneten Fourierreihe.

d) Mit Hilfe von b) zeige man die Identität

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \, .$$

Aufgabe 3:
Für die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ berechne man die Gradienten und erstelle ein Bild im Bereich $[-1,1] \times [-1,1]$, auf dem verschiedene Höhenlinien der Funktion angegeben sind. Dies sind Linien, für die $f(x,y) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$ gilt.

a) $f(x,y) = 5x^2 - 3y^2$, b) $f(x,y) = 5x + 3y$,

c) $f(x,y) = 5x^2 + 3y^2$, d) $f(x,y) = \sin(6x) + 2y$.

Aufgabe 4:
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x^2 - 4y$.

a) Man berechne von f alle partiellen Ableitungen bis zur 3. Ordnung.

b) Man zeichne die Funktion im Bereich $[-4,4] \times [-2,2]$.

c) Man bestimme die Tangentialebene für das gegebene f im Punkt $(x_0, y_0) = (2, 0)$.

d) Man gebe eine Parameterdarstellung der Höhenlinie von f an, die durch den Punkt $(2,0)$ läuft.

e) Man berechne den Winkel α zwischen $\operatorname{grad} f(2,0)$ und der Tangentialrichtung der Höhenlinie von f im Punkt $(2,0)$.

Aufgabe 5:

a) Man zeige, dass die Wärmeleitungsgleichung $u_t = \Delta u$ für zwei Ortsvariable von der Funktion
$$u(x,y,t) = \sin(x)\sin(2y)e^{-5t}$$
gelöst wird.

b) Man zeige, dass mit $n \in \mathbb{N}$ die Funktion
$$u(x,y) = (\sin(nx) + 2\cos(nx))\sinh(ny)$$
die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ löst.

Aufgabe 6:

a) Man berechne Divergenz und Rotation für die Vektorfelder mit $x, y, z \in \mathbb{R}$

(i) $\boldsymbol{h}(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, x^2 + y^2 + z^2, x^2 + y^2 + z^2)^T$,

(ii) $\boldsymbol{u}(x, y, z) = (x^2 - y^2 - z^2, y^2 - x^2 - z^2, z^2 - x^2 - y^2)^T$,

(iii) $\boldsymbol{h}(x, y, z) + \boldsymbol{u}(x, y, z)$.

b) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\boldsymbol{g}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))^T = (x, -y)^T .$$

(i) Man berechne div $\boldsymbol{g}$ und rot $\boldsymbol{g}$ und

(ii) skizziere das Vektorfeld und einige Stromlinien in $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

Aufgabe 7:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & , \text{falls} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{falls} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases} .$$

a) Man zeichne die Funktion im Bereich $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

b) Man überprüfe, ob f stetig ist.

c) Man berechne $\boldsymbol{J}f(x, y)$.

d) Man überprüfe, ob f total differenzierbar ist.

Aufgabe 8:

a) Man berechne die Jacobi-Matrizen der folgenden Funktionen mit den Abbildungsvorschriften

(i) $f(x, y) = \log(y) + \cos(xy)$ und $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^+$,

(ii) $\boldsymbol{g}(t) = (t \cos t, t \sin t, t)^T$ und $t \in \mathbb{R}$,

(iii) $\boldsymbol{h}(\varphi, \psi) = \boldsymbol{h}(2 \cos \varphi \cos \psi, 2 \sin \varphi \cos \psi, 2 \sin \psi)^T$ und $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$,

(iv) $\boldsymbol{u}(x, y, z) = (-3x + y, x - 3y + z, y - 3z)^T$ und $x, y, z \in \mathbb{R}$.

b) Gegeben sei das Vektorfeld $\boldsymbol{f}(x, y) = (x + y + 1, x^2 - y - 1)^T$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

Man bestimme $\boldsymbol{f}(0, 0)$ und berechne damit näherungsweise $\boldsymbol{f}(0.2, 0.1)$ unter Verwendung des vollständigen Differentials. Anschließend berechne man $\boldsymbol{f}(0.2, 0.1)$ und ermittle den euklidischen Abstand zur Näherung.

Aufgabe 9:
Man berechne die Jacobi-Matrix unter Verwendung der Kettenregel und direkt:

a)
$$\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 & \overset{\boldsymbol{f}_1}{\to} & \mathbb{R}^2 & \overset{\boldsymbol{f}_2}{\to} & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} r = ye^x \\ s = x^3 \end{pmatrix} & \mapsto & r\cos(s^2)\,. \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{g} : \mathbb{R}^3 & \overset{\boldsymbol{g}_1}{\to} & \mathbb{R}^2 & \overset{\boldsymbol{g}_2}{\to} & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} u = \sin(2yz) \\ v = x^2 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2v - 3u \\ e^{2u+v} \\ u^3 v \end{pmatrix}. \end{array}$$

Aufgabe 10:
Man berechne für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2 + y$ im Punkt (x_0, y_0) die Ableitung in Richtung $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2)^T$. Welchen Anstieg besitzt die Funktion im Punkt $(2, -3)$ in den durch die Gerade $2x + 7y = 3$ gegebenen Richtungen.

Aufgabe 11:

a) Gegeben sei die Koordinatentransformation

$$\boldsymbol{\Phi}(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix}$$

mit $(x, y) \in Q := [-1, 1] \times [-1, 1]$.

(i) Man berechne $\boldsymbol{J\Phi}(x, y)$ und $\det(\boldsymbol{J\Phi}(x, y))$ sowie

(ii) $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(u, v)$, $\boldsymbol{J\Phi}^{-1}(u, v)$ und $\det(\boldsymbol{J\Phi}^{-1}(u, v))$.

(iii) Man zeichne Q und $\boldsymbol{\Phi}(Q)$.

b) Man zeichne den folgenden Körper und gebe die zugehörige Zylinderkoordinatendarstellung an

$$K = \left\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid 9 \le y^2 + z^2 \le 25 \;\wedge\; 0 \le x \le 10 \;\wedge\; z \le 0\right\}.$$

Aufgabe 12:
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2 + y^2$.

a) Man berechne das Taylor-Polynom ersten Grades $T_1(x, y)$ von f im Punkt $(x_0, y_0) = (-1, -1)$.

b) Man zeichne f und die Tangentialebene im Quadrat $[-3, 1] \times [-3, 1]$.

c) Man berechne den Abstand von f zu T_1 im Punkt $(1, 1)$.

Aufgabe 13:
Man berechne das Taylor-Polynom 2.Grades der folgenden Funktion zum Entwicklungspunkt $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$

$$f(x, y, z) = 1 + z + xy + x^2(1 - y)^2 + (y + z)^3 .$$

Aufgabe 14:
Man berechne das Taylor-Polynom 2. Grades zum Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$ der folgenden Funktion

$$h(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$$

und schätze den Fehler, der dadurch entsteht, wenn man T_2 anstelle von f im Rechteck $[0, \pi/4] \times [0, \pi/4]$ verwendet, nach oben ab.

Aufgabe 15:
Man berechne alle stationären Punkte der folgenden Funktionen und klassifiziere diese:

a) $f(x, y) = (x^2 - y^2)e^{-x^2-y^2}$,

b) $f(x, y) = y(y^2 - 3)$,

c) $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$,

d) $f(x, y) = |x + y|$.

Aufgabe 16:
Gegeben sei die Funktion $\quad f(x, y) = 8x^4 - 10x^2y + 3y^2$.

a) Man berechne alle stationären Punkte von f.

b) Man versuche die hinreichende Bedingung zur Klassifikation der stationären Punkte anzuwenden.

c) Man weise nach, dass f im Ursprung längs jeder Geraden durch Null ein lokales Minimum besitzt.

d) Besitzt f auch längs jeder Parabel $y = ax^2$ mit $a \in \mathbb{R}$ ein Minimum im Ursprung?

e) Man zeichne die Funktion beispielsweise mit Hilfe der MATLAB-Routinen 'ezsurf' und 'ezcontour'.

Aufgabe 17:
Man untersuche die durch die Niveaumenge

$$f(x,y) := x^3 + y^3 - xy = 0$$

implizit gegebene Kurve. Im Einzelnen sind gesucht

a) die Symmetrien der Kurve,

b) die Kurvenpunkte mit horizontaler und

c) vertikaler Tangente,

d) die singulären Punkte der Kurve mit Klassifikation und

e) eine Zeichnung der Niveaumenge.

Aufgabe 18:
Gegeben sei die Funktion $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x,y,z) = z^2 + y^2 - x^2 + 4z - 2x + 3\,.$$

a) Man überprüfe, ob die Niveaumenge $h(x,y,z) = c$, die durch den Punkt $(-1,1,-2)$ festgelegt wird, in der Umgebung dieses Punktes eine glatte Fläche bildet.

b) Man löse obige Gleichung gegebenenfalls nach einer der Variablen auf, um die Fläche explizit anzugeben.

c) Man gebe im Punkt $(-1,1,-2)$ die Tangentialebene bezüglich der Fläche aus a) in Parameterform an.

d) Man zeichne die Fläche mit Tangentialebene.

Aufgabe 19:
Man berechne die Extremwerte der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x + y$ auf dem Kreis $x^2 + y^2 = 1$

a) unter Verwendung der Lagrangeschen Multiplikatorenregel und

b) über Parametrisierung des Kreises durch $\mathbf{c}$ und anschließendes Lösen der Extremalaufgabe in $h(t) := f(\mathbf{c}(t))$.

Aufgabe 20:
Für die Funktion $f(x, y, z) = z^2$ berechne und klassifiziere man die Extrema auf dem Schnitt des Zylinders $x^2 + y^2 = 9$ mit der Ebene $y = z$ unter Verwendung der Lagrangeschen Multiplikatorenregel.

Aufgabe 21:
Zur Bestimmung eines Extremums der Funktion

$$f(x, y) := (x + y)^2 + \cosh(x) + \cos(y + 1)$$

soll das Newton-Verfahren auf die Funktion $\boldsymbol{F}(x, y) = \nabla f(x, y)$ angewendet werden.

a) Man berechne $\boldsymbol{F}(x, y)$ und die Jacobi-Matrix $\boldsymbol{JF}(x, y)$.

b) Man stelle das Newton-Verfahren auf.

c) Man schreibe ein MATLAB-Programm zur numerischen Durchführung des Newton-Verfahrens unter Verwendung der MATLAB-Routine 'linsolve'.

d) Ausgehend vom Startvektor $(x_0, y_0) = (0, 0)$ berechne man damit eine Lösung auf zehn Stellen genau.

e) Man klassifiziere den berechneten stationären Punkt und erstelle einen Flächenplot und einen Höhenlinienplot mit Hilfe der MATLAB-Routinen 'ezsurf' und 'ezcontour'.

Aufgabe 22:
Mit $Q := [0, 2] \times [0, 1]$ berechne man für die Funktion

$$f : Q \to \mathbb{R}\,, \quad f(x, y) = 2 - x$$

a) Riemannsche Unter- und Obersumme zu folgender Zerlegung Z von Q

$$Q_{i,j} = \left[\frac{2(i-1)}{n}, \frac{2i}{n}\right] \times \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right] \;, \; i, j = 1, \ldots, n$$

b) und das Integral von f über Q nach dem Satz von Fubini.

Aufgabe 23:
Man berechne folgende Integrale

a) $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi}\int_0^{\pi} \cos(x+y)\,dx\,dy$,

b) $\displaystyle\int_0^2\int_0^1 x^2-3y+1\,dx\,dy$ und $\displaystyle\int_0^1\int_0^2 x^2-3y+1\,dy\,dx$,

c) $\displaystyle\int_Q \frac{y^2-x}{xy^2}\,d(x,y)$ mit $Q=[1,e]\times[1,2]$.

Aufgabe 24:
Man berechne folgende Integrale

a) $\displaystyle\int_2^9\int_0^3\int_0^1 \frac{x^6\sqrt{y+1}}{z-1}\,dx\,dy\,dz$,

b) $\displaystyle\int_Q \sinh z+\frac{6z^2}{(2x+y)^2}\,d(x,y,z)$ mit $Q=[1,2]\times[0,1]\times[-1,1]$.

Aufgabe 25:

a) Man zeichne das Dreieck D mit den Eckpunkten $P_1=(-1,1)$, $P_2=(0,0)$ und $P_3=(2,2)$ und stelle es als Normalbereich dar.

b) Man berechne $\displaystyle\int_D 18y\,d(x,y)$

Aufgabe 26:

a) Man zeichne den durch $x\le 0,\ z\ge 1,\ z\le 3$ und $x^2+y^2=4$ eingeschlossenen Bereich Z und stelle ihn als Normalbereich dar.

b) Man berechne $\displaystyle\int_Z 3x\,d(x,y,z)$ in x,y,z-Koordinaten und in Zylinderkoordinaten.

Aufgabe 27:
Man zeichne die durch $y \leq 0$, $z \leq 0$ und $x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$ gegebene Viertelkugel K und berechne ihren Schwerpunkt mit der Dichtefunktion $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 1$ unter Verwendung von Kugelkoordinaten.

Aufgabe 28:
Durch $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ wird eine Kugel K beschrieben. K habe die konstante Dichte ρ.

a) Man zeichne K unter Verwendung der MATLAB-Routine 'ezgraph3'.

b) Für K berechne man die Masse und das Trägheitsmoment bezüglich der z-Achse.

c) Man berechne das Trägheitsmoment von K bezüglich der zur z-Achse parallelen Achse D, die durch den Punkt $(2, 1, 3)^T$ verläuft.

Aufgabe 29:

a) Für das Vektorfeld $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\boldsymbol{f}(x, y) = \begin{pmatrix} xy \\ 1 \end{pmatrix}$ berechne man das Kurvenintegral $\displaystyle\oint_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}$.

Dabei ist $\mathbf{c}$ die mathematisch positive durchlaufene Randkurve ∂H der Halbkreisfläche $H : x^2 + y^2 \leq 4$ mit $x \leq y$.

b) Für das Vektorfeld $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\boldsymbol{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ (x + y)/z \end{pmatrix}$$

berechne man das Kurvenintegral $\displaystyle\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}$ mit der Kurve $\mathbf{c} : [4\pi, 16\pi] \to \mathbb{R}^3$ und

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} t \cos t \\ t \sin t \\ t \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 30:

Gegeben sei das Vektorfeld $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\boldsymbol{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3x^2y^4z^5 + 1 \\ 4x^3y^3z^5 + 2y \\ 5x^3y^4z^4 + 3z^2 \end{pmatrix} .$$

a) Man zeige, dass $\boldsymbol{f}$ ein Potential besitzt, ohne es zu berechnen.

b) Man berechne ein Potential durch sukzessives Integrieren von $\boldsymbol{f}$ und

c) mit Hilfe des Hauptsatzes für Kurvenintegrale.

d) Längs der Kurve $\mathbf{c} : [0, T] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, \sin t + \cos t)^T$$

berechne man für die Fälle $T = \pi$ und $T = 2\pi$ das Kurvenintegral $\displaystyle\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}$
.

Aufgabe 31:

Man verifiziere den Satz von Green für das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}(x, y) = (-xy - 2y, 2x + 4y^2)^T$$

und das durch die Kurve $x^2 + 4y^2 = 4$ eingeschlossene Gebiet E.