Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2017/18**
Dr. K. Rothe

Hörsaalübungsaufgaben zu

Analysis III

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Aufgabe 1:
Man untersuche die Konvergenz der angegebenen Folgen

a) $\mathbf{a}_n = \begin{pmatrix} n^2/2^n \\ 1+1/n \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}$

b) $\mathbf{a}_{n+1} := \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_n - y_n)/\sqrt{3} \\ (x_n + y_n)/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{a}_1 \in \mathbb{R}^2$

Tipp: Eine geeignete Norm erleichtert das Leben.

Aufgabe 2:
Man zeichne die folgenden Mengen und prüfe, ob sie offen, abgeschlossen, beschränkt oder kompakt sind.

a) $R = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| + |y| \le 2 \right\}$,

b) $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 < 1,\ x < y \right\}$,

c) $P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 \le 4\,,\ 0 \le z \le 4 - x^2 - y^2 \right\}$,

d) $Z = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + 4y^2 \le 17\,,\ 1 < z \le 11 \right\}$.

Aufgabe 3:
Gegeben sei die Kurve $\mathbf{c} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Man zeichne die Kurve $\mathbf{c}$.

b) Man berechne für $\mathbf{c}$ die Bogenlänge und gebe die Tangentengleichung im Punkt $t = \pi/2$ an.

c) Man berechne für $\mathbf{c}$ den Tangenteneinheitsvektor, Hauptnormalenvektor und Binormalenvektor.

d) Im Punkt $t = \pi/2$ gebe man die Parameterform der Schmiegebene an und berechne dort den Krümmungsvektor und die Krümmung.

Aufgabe 4:
Für die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \quad (x, y) \to f(x, y)$$

zeichne man den Funktionsgraphen und die Höhenlinien, dies sind Linien konstanter Höhe, d.h. von der Form $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = c\}$ für $c \in \mathbb{R}$. Man überprüfe, ob f stetig ist oder in eventuell vorhandenen Definitionslücken stetig ergänzt werden kann.

a) $f(x, y) = y - x$,

b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

c) $f(x, y) = xy$,

d) $f(x, y) = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$,

e) $f(x, y) = \dfrac{y^5}{x^4 + y^4}$.

Aufgabe 5:
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = 3x^2 + 2y$.

a) Man zeichne den Funktionsgraphen und einen Höhenlinienplot von f im Definitionsbereich $[-2, 2] \times [-1, 1]$.

b) Man berechne von f alle partiellen Ableitungen bis zur 3. Ordnung.

c) Man berechne den Anstieg von f im Punkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$ in x-Richtung und in y-Richtung und zeichne die Funktionsgraphen der Funktionen $f(x, 0)$ in $[-2, 2]$ und $f(0, y)$ in $[-1, 1]$.

d) Man gebe eine Parameterdarstellung der Höhenlinie von f an, die durch den Punkt $(0, 0)$ läuft.

e) Man berechne den Winkel α zwischen $\mathrm{grad} f(0, 0)$ und der Tangentialrichtung der Höhenlinie von f im Punkt $(0, 0)$.

Aufgabe 6:
Man berechne die Jacobi-Matrizen und, falls dies möglich ist, die Hessematrizen der folgenden Funktionen mit den Abbildungsvorschriften

a) $f(x, y) = \ln(y) + \cos(xy)$ und $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^+$,

b) $\boldsymbol{g}(t) = (t \cos t, t \sin t, t)^T$ und $t \in \mathbb{R}$,

c) $\boldsymbol{h}(\varphi, \psi) = \boldsymbol{h}(2 \cos \varphi \cos \psi, 2 \sin \varphi \cos \psi, 2 \sin \psi)^T$ und $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$,

d) $\boldsymbol{u}(x, y, z) = (-3x + y, x - 3y + z, y - 3z)^T$ und $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 7:
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y^5}{x^4 + y^4} & \text{, falls } \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{, falls } \quad (x, y) = (0, 0) \ . \end{cases}$$

a) Man zeichne die Funktion im Bereich $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

b) Man zeige, dass f in $(x_0, y_0) = (0, 0)$ stetig ist.

c) Man berechne die Jacobi-Matrix für f.

d) Sind die partiellen Ableitungen im Punkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$ stetig?

Aufgabe 8:
Man berechne für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x^2 + y$ im Punkt (x_0, y_0) die Ableitung in Richtung $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2)^T$. Welchen Anstieg besitzt die Funktion im Punkt $(2, -3)$ in den durch die Gerade $2x + 7y = 3$ gegebenen Richtungen.

Aufgabe 9:
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{, falls} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, falls} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

a) Man zeichne die Funktion im Bereich $[-1,1] \times [-1,1]$.

b) Man überprüfe, ob f stetig ist.

c) Man berechne $\boldsymbol{J} f(x,y)$.

d) Man überprüfe, ob f total differenzierbar ist.

Aufgabe 10:
Man berechne die Jacobi-Matrix unter Verwendung der Kettenregel und direkt:

a)
$$f_2 \circ \boldsymbol{f}_1 =: \boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \overset{\boldsymbol{f}_1}{\to} \mathbb{R}^2 \overset{f_2}{\to} \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r = ye^x \\ s = x^3 \end{pmatrix} \mapsto r\cos(s^2) .$$

b)
$$\boldsymbol{g}_2 \circ \boldsymbol{g}_1 =: \boldsymbol{g} : \mathbb{R}^3 \overset{\boldsymbol{g}_1}{\to} \mathbb{R}^2 \overset{\boldsymbol{g}_2}{\to} \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u = \sin(2yz) \\ v = x^2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2v - 3u \\ e^{2u+v} \\ u^3 v \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 11:

a) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2 + y^2$.

   (i) Man bestimme die Tangentialebene $T_1(x, y)$ von f im Punkt $(x_0, y_0) = (-1, -1)$.

   (ii) Man zeichne f und die Tangentialebene T_1 im Quadrat $[-3, 1] \times [-3, 1]$.

   (iii) Man berechne den Abstand von f zu T_1 im Punkt $(1, 1)$.

b) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}(x, y) = (x + y + 1, x^2 - y - 1)^T$$

mit $x, y \in \mathbb{R}$. Man bestimme $\boldsymbol{f}(0, 0)$ und berechne damit näherungsweise $\boldsymbol{f}(0.2, 0.1)$ unter Verwendung des vollständigen Differentials in $(0, 0)$.

Anschließend berechne man den euklidischen Abstand zwischen $\boldsymbol{f}(0.2, 0.1)$ und der Näherung.

Aufgabe 12:

a) Man berechne das Taylor-Polynom 2.Grades der folgenden Funktion

$$f(x, y, z) = 1 + z + xy + x^2(1 - y)^2 + (y + z)^3$$

im Entwicklungspunkt $(0, 0, 0)$.

b) Für die durch

$$f(x, y) = (x + 1)^2 + x \sin(x + y)$$

definierte Funktion berechne man das Taylor-Polynom 2. Grades zum Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0, \pi)$ und schätze den Fehler, der dadurch entsteht, wenn man T_2 anstelle von f im Punkt $(x, y) = (\pi, \pi)$ verwendet, nach oben ab.

Aufgabe 13:
Für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ untersuche man die durch die Niveaumenge

$$f(x,y) := x^3 + y^3 - xy = 0$$

implizit gegebene Kurve. Im Einzelnen sind gesucht

a) die Symmetrien der Kurve,

b) die Kurvenpunkte mit horizontaler und

c) vertikaler Tangente,

d) die singulären Punkte der Kurve mit Klassifikation und

e) eine Zeichnung der Niveaumenge.

Aufgabe 14:
Gegeben sei die Funktion $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x,y,z) = z^2 + y^2 - x^2 + 4z - 2x + 3 .$$

a) Man überprüfe, ob die Niveaumenge $h(x,y,z) = c$, die durch den Punkt $(-1,1,-2)$ festgelegt wird, in der Umgebung dieses Punktes eine glatte Fläche bildet.

b) Man löse obige Gleichung gegebenenfalls nach einer der Variablen auf, um die Fläche explizit anzugeben.

c) Man gebe im Punkt $(-1,1,-2)$ die Tangentialebene bezüglich der Fläche aus a) in Parameterform an.

d) Man zeichne die Fläche mit Tangentialebene.

Aufgabe 15:
Man berechne alle stationären Punkte der folgenden Funktionen und klassifiziere diese:

a) $f(x,y) = (x^2 - y^2)e^{-x^2-y^2}$,

b) $f(x,y) = y(y^2 - 3)$,

c) $f(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$,

d) $f(x,y) = |x + y|$.

Aufgabe 16:
Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = 8x^4 - 10x^2y + 3y^2$.

a) Man berechne alle stationären Punkte von f.

b) Man versuche die hinreichende Bedingung zur Klassifikation der stationären Punkte anzuwenden.

c) Man weise nach, dass f im Ursprung längs jeder Geraden durch Null ein lokales Minimum besitzt.

d) Besitzt f auch längs jeder Parabel $y = ax^2$ mit $a \in \mathbb{R}$ ein Minimum im Ursprung?

e) Man zeichne die Funktion beispielweise mit Hilfe der MATLAB-Routinen 'ezsurf' und 'ezcontour'.

Aufgabe 17:
Man berechne die Extremwerte der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x + y$ auf dem Kreis $x^2 + y^2 = 1$

a) unter Verwendung der Lagrangeschen Multiplikatorenregel und

b) über eine Parametrisierung $\mathbf{c}$ des Kreises und anschließendes Lösen der Extremalaufgabe in $h(t) := f(\mathbf{c}(t))$.

Aufgabe 18:
Für die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y, z) = z^2$ berechne und klassifiziere man die Extrema auf dem Schnitt des Zylinders $x^2 + y^2 = 9$ mit der Ebene $y = z$ unter

a) Verwendung der Lagrangeschen Multiplikatorenregel und

b) durch Bestimmung der Extremwerte von $f(\mathbf{c}(t))$ auf der Parametrisierung $\mathbf{c}$ der Schnittkurve von Zylinder und Ebene.

Aufgabe 19:

a) Man zeige, dass die Wärmeleitungsgleichung $u_t = \Delta u$ für zwei Ortsvariable von der Funktion
$$u(x,y,t) = \sin(x)\sin(2y)e^{-5t}$$
gelöst wird.

b) Man zeige, dass mit $n \in \mathbb{N}$ die Funktion
$$u(x,y) = (\sin(nx) + 2\cos(nx))\sinh(ny)$$
die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ löst.

Aufgabe 20:
Man berechne Divergenz und Rotation für folgende Vektorfelder mit $x, y, z \in \mathbb{R}$

a) $\boldsymbol{f}(x,y) = (xe^y, x^2y)^T$,

b) $\boldsymbol{g}(x,y) = (x^3, \sin y)^T$,

c) $3\boldsymbol{f}(x,y) - \boldsymbol{g}(x,y)$,

d) $\boldsymbol{h}(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2, x^2+y^2+z^2, x^2+y^2+z^2)^T$,

e) $\boldsymbol{u}(x,y,z) = (x^2-y^2-z^2, y^2-x^2-z^2, z^2-x^2-y^2)^T$,

f) $\boldsymbol{h}(x,y,z) + \boldsymbol{u}(x,y,z)$.

Aufgabe 21:

a) Gegeben sei ein Draht mit der Dichtefunktion $\rho(x,y) = \sin\left(\frac{(x+y)\pi}{14}\right)$.
Die Form des Drahtes werde beschrieben durch die Kurve
$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} 3t \\ 4t \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad 0 \le t \le 1\,.$$
Man zeichne die Form des Drahtes und berechne seine Gesamtmasse.

b) Für das Vektorfeld $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit
$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ (x+y)/z \end{pmatrix}$$
berechne man das Kurvenintegral $\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$ mit der Kurve $\mathbf{c} : [4\pi, 16\pi] \to \mathbb{R}^3$ und
$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} t\cos t \\ t\sin t \\ t \end{pmatrix}\,.$$

Aufgabe 22:
Gegeben sei das Vektorfeld $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2y^4z^5 + 1 \\ 4x^3y^3z^5 + 2y \\ 5x^3y^4z^4 + 3z^2 \end{pmatrix} .$$

a) Man zeige, dass $\boldsymbol{f}$ ein Potential besitzt, ohne es zu berechnen.

b) Man berechne ein Potential durch sukzessives Integrieren von $\boldsymbol{f}$ und

c) mit Hilfe des Hauptsatzes für Kurvenintegrale.

d) Längs der Kurve $\mathbf{c} : [0,T] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, \sin t + \cos t)^T$$

berechne man für die Fälle $T = \pi$ und $T = 2\pi$ das Kurvenintegral $\displaystyle\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$.

Aufgabe 23:

a) Mit $Q := [0,2] \times [0,1]$ berechne man für die Funktion

$$f : Q \to \mathbb{R}\,, \quad f(x,y) = 2 - x$$

(i) Riemannsche Unter- und Obersumme zu folgender Zerlegung Z_n von Q

$$Q_{i,j} = \left[\frac{2(i-1)}{n}, \frac{2i}{n}\right] \times \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right] \;,\; i,j = 1,\ldots,n$$

(ii) und das Flächenintegral von f über Q.

b) Man berechne die folgenden Integrale:

(i) $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{\pi} \cos(x+y)\,dx\,dy$,

(ii) $\displaystyle\int_R 9x^2\sqrt{y}\,d(x,y) \quad \text{mit} \quad R = [1,2] \times [1,4]$,

Aufgabe 24:

a) (i) Man zeichne das Dreieck D mit den Eckpunkten $P_1 = (-1, 1)$, $P_2 = (0, 0)$ und $P_3 = (2, 2)$ und stelle es als Normalbereich dar.

(ii) Man berechne $\displaystyle\int_D 18y \, d(x, y)$

b) Man verifiziere den Satz von Green für das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}(x, y) = (y + \sin x, xy^2)^T$$

und das Gebiet G, das von $x^2 \leq y \leq x$ mit $0 \leq x \leq 1$ eingeschlossen wird.

Aufgabe 25:

a) Man zeichne das cartesische Blatt $\mathbf{c} : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{t}{t^3+1} \\ \dfrac{t^2}{t^3+1} \end{pmatrix}$$

und berechne den Flächeninhalt der im 1. Quadranten umschlossenen Fläche.

b) Die Kurve $\mathbf{c}$ sei in Polarkoordinaten mit $r(\varphi) = e^{\varphi}$ und $0 \leq \varphi \leq \pi$ gegeben. Man berechne die von $\mathbf{c}$ überstrichene Fläche und zeichne die Kurve.

Aufgabe 26:
Gegeben sei die Teilfläche eines Zylinders

$$Z = \left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq y \leq 2 \,,\; 0 \leq z \,,\; x^2 + z^2 = 9 \right\} .$$

a) Man gebe eine Parametrisierung von Z an,

b) zeichne Z mit Hilfe der MATLAB-Routine 'ezgraph3' und

c) berechne den Flächeninhalt von Z mit Hilfe eines Oberflächenintegrals.

Aufgabe 27:
Gegeben seien das Geschwindigkeitsfeld $\boldsymbol{u}(x,y,z) = (-y^2, yz, x)^T$ einer Strömung sowie die Fläche

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \quad x^2+y^2 \le 1 \quad \wedge \quad z = xy \right\} .$$

a) Man zeichne die Fläche S mit Hilfe der MATLAB-Routine 'ezmesh' oder 'ezmeshc' .

b) Man berechne auf S das Integral über alle Wirbelstärken $\displaystyle\int_S \operatorname{rot} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\, do$.

c) Man berechne die Zirkulation $\displaystyle\oint_{\partial S} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}$ von $\boldsymbol{u}$ längs der Randkurve ∂S von S und bestätige damit den Integralsatz von Stokes im $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 28:

a) Durch $x^2+y^2 \le 4$ und $0 \le z \le 4-x^2-y^2$ wird ein Rotationsparaboloid P mit konstanter Dichte ρ beschrieben. Man zeichne P unter Verwendung der MATLAB-Routine 'ezgraph3' und berechne seine Masse.

b) Gegeben seien der Körper

$$K = \left\{ (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2+z^2 \le 9\,,\; x \le 0 \right\}$$

und das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = \left(y, -x, z^3\right)^T .$$

(i) Man skizziere K.

(ii) Der Rand von K ist beschreibbar durch ein ebenes Flächenstücke S und ein nicht ebenes Flächenstück H.

Man gebe jeweils Parametrisierungen für die beiden Randflächenstücke S und H an.

(iii) Man berechne jeweils den Fluss von $\boldsymbol{f}$ durch die beiden Randflächenstücke S und H.

(iv) Man berechne das Volumenintegral $\displaystyle\int_K \operatorname{div} \boldsymbol{f}(x,y,z)\, d(x,y,z)$.