Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2011/12**
Dr. K. Rothe

Anleitungsaufgaben zu

Analysis III

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Aufgabe 1:
Für die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ berechne man die Gradienten und erstelle ein Bild im Bereich $[-1,1] \times [-1,1]$, auf dem verschiedene Höhenlinien der Funktion angegeben sind. Dies sind Linien, für die $f(x,y) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$ gilt.

a) $f(x,y) = 5x^2 - 3y^2$, b) $f(x,y) = 5x + 3y$, c) $f(x,y) = 5x^2 + 3y^2$.

Aufgabe 2:
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = 5x^2 - 3y^2$.

a) Man berechne von f alle partiellen Ableitungen bis zur 3. Ordnung.

b) Die Tangentialebene an den Graphen einer differenzierbaren Funktion f im Punkt $(x_0, y_0) \in D \subset \mathbb{R}^2$ lautet

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Man bestimme die Tangentialebene für das gegebene f im Punkt $(x_0, y_0) = (3, -4)$.

c) Man gebe eine Parameterdarstellung der Höhenlinie von f an, die durch den Punkt $(3, -4)$ läuft.

d) Man berechne den Winkel α zwischen $\mathrm{grad} f(3, -4)$ und der Tangentialrichtung der Höhenlinie von f im Punkt $(3, -4)$.

Aufgabe 3:
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^4+y^4} & \text{, falls } \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, falls } \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

a) Man überprüfe, ob f im Nullpunkt stetig ist.

b) Man zeichne die Funktion im Bereich $[-1,1] \times [-1,1]$.

c) Man berechne die ersten partiellen Ableitungen von f und

d) überprüfe, ob diese im Nullpunkt stetig sind.

Aufgabe 4:

a) Man zeige, dass die Wellengleichung $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ für eine Ortsvariable mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ von der Funktion

$$u(x,t) = 2\sin(x+ct) + 3e^{x-ct}$$

gelöst wird.

b) Man zeige, dass die Funktion

$$u(x,y) = e^{-x}\sin y + (x+5)(y-6)$$

mit den Konstanten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ löst.

Aufgabe 5:

a) Man berechne div $\boldsymbol{f}$ und rot $\boldsymbol{f}$ für das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = \left(yz + \cos(x+y), xz + \frac{1}{y+z}, xy + \frac{1}{y+z} \right)^T .$$

b) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\boldsymbol{g}(x,y) = (u(x,y), v(x,y))^T = (1, 3x^2)^T .$$

(i) Man berechne div $\boldsymbol{g}$ und rot $\boldsymbol{g}$ und

(ii) zeichne das Vektorfeld und einige Stromlinien im Bereich $[-1,1] \times [-1,1]$.

Aufgabe 6:
Man berechne für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x^2 + y$ im Punkt (x_0, y_0) die Ableitung in Richtung $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2)^T$. Welchen Anstieg besitzt die Funktion im Punkt $(2,-3)$ in den durch die Gerade $2x + 7y = 3$ gegebenen Richtungen.

Aufgabe 7:
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{2x^2 + 3y^2} & \text{, falls} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, falls} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

a) Man zeichne die Funktion im Bereich $[-1,1] \times [-1,1]$.

b) Man berechne für f im Punkt $(x_0, y_0) = (0,0)$ alle Richtungsableitungen.

c) Man überprüfe, ob f im Punkt $(x_0, y_0) = (0,0)$ (vollständig) differenzierbar ist.

Aufgabe 8:

a) Man berechne die Jacobi-Matrix unter Verwendung der Kettenregel und direkt:

$$\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\boldsymbol{f}_1} & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\boldsymbol{f}_2} & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} u = \sin(rs) \\ v = e^r + s \\ w = 1 - 2s^3 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} uw \\ vw \end{pmatrix}. \end{array}$$

b) Man berechne die Jacobi-Matrix von:

$$\begin{array}{ccccc} h : \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\boldsymbol{f}} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} & \mapsto & g(u,v)\,. \end{array}$$

Aufgabe 9:
Gegeben sei die 'Koordinatentransformation'

$$\boldsymbol{\Phi}(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ x/y \end{pmatrix}$$

mit $(u,v) \in D := [0.5, 2] \times [2, 4]$.

a) Man berechne $\boldsymbol{J\Phi}(x,y)$ und $\det(\boldsymbol{J\Phi}(x,y))$ sowie

b) bzgl. D: $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(u,v)$, $\boldsymbol{J\Phi}^{-1}(u,v)$ und $\det(\boldsymbol{J\Phi}^{-1}(u,v))$.

c) Man skizziere $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(D)$ im (x,y)-Koordinatensystem.

d) Man transformiere $\Delta w = w_{xx} + w_{yy}$ mit Hilfe der Kettenregel in eine Darstellung bzgl. (u,v)-Koordinaten.

Aufgabe 10:
Man berechne das Taylor-Polynom 3.Grades der folgenden Funktion

$$f(x,y) = x + (y+1)\cosh(x+y)$$

im Entwicklungspunkt $(0,0)$ und schätze den Fehler, der dadurch entsteht, wenn man T_3 anstelle von f verwendet, im Rechteck $[0,1] \times [-1,0]$ nach oben ab.

Aufgabe 11:
Man berechne alle stationären Punkte der folgenden Funktionen und klassifiziere diese:

a) $f(x,y) = xy - 4x + 3y - 12$,

b) $f(x,y) = 2(x^2+y^2)^2 - x^2 - y^2$,

c) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$,

d) $f(x,y) = x \sin y$.

Aufgabe 12:
Gegeben sei die Funktion $\quad f(x,y) = 9x^4 - 12x^2y + 4y^2$.

a) Man berechne alle stationären Punkte von f.

b) Man versuche, die hinreichende Bedingung zur Klassifikation der stationären Punkte anzuwenden.

c) Man weise nach, dass f im Ursprung längs jeder Geraden durch Null ein lokales Minimum besitzt.

d) Man klassifiziere alle stationären Punkte von f.

e) Man zeichne die Funktion beispielweise mit Hilfe der MATLAB-Routinen 'ezsurf' und 'ezcontour'.

Aufgabe 13:
Man untersuche die durch die Niveaumenge

$$f(x,y) := y^4 - 2y^2 + x^4 - 2x^2 = 0$$

implizit gegebene(n) Kurve(n). Im Einzelnen sind gesucht

a) die Symmetrien der Kurve(n),

b) die Kurvenpunkte mit horizontaler und

c) vertikaler Tangente,

d) die singulären Punkte der Kurve mit Klassifikation und

e) eine Zeichnung der Niveaumenge.

Aufgabe 14:
Gegeben sei die Funktion $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x, y, z) = 16z^2 + x^2 + 4y^2 + 2x - 8y + 5 \,.$$

a) Man überprüfe, ob die Niveaumenge $g(x, y, z) = c$, die durch den Punkt $(3, 1, 0)$ festgelegt wird, in der Umgebung dieses Punktes eine glatte Fläche bildet.

b) Man gebe im Punkt $(3, 1, 0)$ die Tangentialebene bezüglich der Fläche aus a) in Parameterform an.

c) Man löse obige Gleichung gegebenenfalls nach einer der Variablen auf, um die Fläche explizit anzugeben.

d) Man zeichne die Fläche.

Aufgabe 15:
Man berechne die Extremwerte der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x+y$ auf dem Kreis $x^2 + y^2 = 1$

a) unter Verwendung der Lagrangeschen Multiplikatorenregel und

b) über Parametrisierung des Kreises durch $\mathbf{c}$ und anschließendes Lösen der Extremalaufgabe in $h(t) := f(\mathbf{c}(t))$.

Aufgabe 16:
Für die Funktion $f(x, y, z) = y + 2z$ berechne und klassifiziere man die Extrema auf dem Schnitt des parabolischen Zylinders $z = x^2 - 1$ mit der Ebene $z = 2y$ unter Verwendung der Lagrangeschen Multiplikatorenregel.

Aufgabe 17:
Zur Berechnung eines Extremums der Funktion

$$f(x, y) = 0.1x^2 + \cos x + y^2$$

soll das Newton-Verfahren auf

$$\boldsymbol{F}(x, y) \;:=\; (\text{grad } f(x, y))^T \;=\; 0$$

angewendet werden.

a) Man berechne $\boldsymbol{F}(x, y)$ und die Jacobi-Matrix $\boldsymbol{JF}(x, y)$.

b) Man stelle das Newton-Verfahren auf und starte es mit $\boldsymbol{x}^0 = (2, 1)^T$. Als Abbruchkriterium verwende man $||\boldsymbol{x}^{k+1} - \boldsymbol{x}^k||_\infty < 10^{-4}$.

c) Man klassifiziere das gefundene Extremum.

d) Man erstelle einen Funktionsplot von f im Bereich $[0, 4.5] \times [-1, 1]$.

Aufgabe 18:
Mit $Q := [0,2] \times [0,1]$ berechne man für die Funktion

$$f : Q \to \mathbb{R}\,, \quad f(x,y) = 2 - x$$

a) Riemannsche Unter- und Obersumme zu folgender Zerlegung Z von Q

$$Q_{i,j} = [2(i-1)/n, 2i/n] \times [(j-1)/n, j/n]\,,\ i,j = 1,\dots,n$$

b) und das Integral von f über Q nach dem Satz von Fubini.

Aufgabe 19:
Man berechne die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^1 x^2 - 3y + 1\, dx\, dy,$

b) $\displaystyle\int_0^1 \int_2^3 \frac{y-x-2}{xy-x+y-1}\, dy\, dx,$

c) $\displaystyle\int_D \frac{4xy}{y^2+1}\, d(x,y)$ mit $D = [-1,0] \times [1,\sqrt{3}]$,

d) $\displaystyle\int_B \sin y + zx^2\, d(x,y,z)$ mit $B = [0,1] \times [0,\pi/2] \times [0,2]$.

Aufgabe 20:
Man zeichne folgende Mengen und beschreibe sie durch Normalbereiche:

a) den durch die Funktionen $f(x) = 2x$ und $g(x) = 24 - 2x^2$ eingeschlossenen Bereich P,

b) den durch die Höhenline $|x| + |y| = 5$ eingeschlossenen Bereich Q,

c) den durch $x \le 0,\ y \le 0,\ z \ge 0$ und $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ eingeschlossenen Bereich K.

Aufgabe 21:
Man skizziere den Bereich

$$D = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1 \ \wedge\ 0 \le y \le x\}\,.$$

und berechne $\displaystyle\int\int_D xy\, d(x,y)$

a) indem zuerst nach y und dann nach x integriert wird und

b) indem zuerst nach x und dann nach y integriert wird.

Aufgabe 22:
Man zeichne den durch $1 \leq z \leq 2$, $0 \leq y$ und $x^2 + y^2 \leq 9$ gegebenen halben Zylinder Z und berechne seinen Schwerpunkt mit der Dichtefunktion $\rho(x, y, z) = z$ unter Verwendung von Zylinderkoordinaten.

Aufgabe 23:

a) Für das Vektorfeld $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\boldsymbol{f}(x, y) = \begin{pmatrix} y + \sin x \\ xy^2 \end{pmatrix}$ berechne man das Kurvenintegral $\oint\limits_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}$.

Dabei ist $\mathbf{c}$ die mathematisch positiv durchlaufene Randkurve des durch $x^2 \leq y \leq x$ mit $0 \leq x \leq 1$ eingeschlossenen Gebietes G.

b) Für das Vektorfeld $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\boldsymbol{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -z^2/2 \\ 0 \\ xz \end{pmatrix}$

berechne man das Kurvenintegral $\int\limits_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}$ mit der Kurve

$\mathbf{c} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^3$ und $\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos^2 t \\ 2\sin t \cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix}$.

Aufgabe 24:
Gegeben sei das Vektorfeld $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\boldsymbol{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \cos(x + y) + \dfrac{1}{x^2 + 1} \\ \cos(x + y) + e^{y+z} + \dfrac{y}{y^2 + 1} \\ e^{y+z} + \dfrac{z^2}{z^2 + 1} \end{pmatrix} .$$

a) Man zeige, dass $\boldsymbol{f}$ ein Potential besitzt, ohne es zu berechnen.

b) Man berechne ein Potential von $\boldsymbol{f}$ durch Hochintegrieren und

c) mit Hilfe des Hauptsatzes für Kurvenintegrale.

d) Man zeichne die Kurven $\mathbf{c}_i$, $i = 1, 2$ und berechne die Kurvenintegrale $\int_{\mathbf{c}_i} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}$:

(i) $\mathbf{c}_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit $\mathbf{c}_1(t) = (0, \cos t, \sin t)^T$,

(ii) $\mathbf{c}_2 : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ mit $\mathbf{c}_2(t) = (t, t^2, t^3)^T$.

Aufgabe 25:
Man verifiziere den Satz von Green für das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}(x, y) = (x^2 + y, \sin x)^T$$

und das Gebiet G, das von der Funktion $y = 1 - (x - 1)^2$ und der x-Achse eingeschlossen wird.

Aufgabe 26:
Gegeben sei die Mantelfläche

$$M = \left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 4\,,\ |z| \leq x + 2 \right\}$$

eines durch zwei Ebenen begrenzten Zylinders.

a) Man zeichne die Ebenen und die begrenzte Mantelfläche M,

b) parametrisiere M und

c) berechne den Flächeninhalt von M mit Hilfe eines Oberflächenintegrals.

Hinweis: In b) eignen sich Zylinderkoordinaten.

Aufgabe 27:
Gegeben seien der Körper

$$K = \left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\,,\ x \leq 0 \right\}$$

und das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}(x, y, z) = \left(y, -x, z^3\right)^T \ .$$

a) Man skizziere K.

b) Der Rand von K ist beschreibbar durch ein ebenes Flächenstücke S und ein nicht ebenes Flächenstück H.

Man gebe jeweils Parametrisierungen für die beiden Randflächenstücke S und H an.

c) Man berechne jeweils den Fluss von $\boldsymbol{f}$ durch die beiden Randflächenstücke S und H.

d) Man berechne das Volumenintegral $\displaystyle\int_E \operatorname{div} \boldsymbol{f}(x, y, z)\, d(x, y, z)\,.$

Aufgabe 28:
Gegeben seien das Geschwindigkeitsfeld $\boldsymbol{v}(x,y,z) = (y,z,x)^T$ einer Strömung sowie die Fläche

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 0 \leq z \quad \wedge \quad x^2+y^2+z^2 = 1 \right\} .$$

a) Man zeichne die Fläche K.

b) Man berechne auf K das Integral über alle Wirbelstärken $\displaystyle\int_K \operatorname{rot} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \, do$.

c) Man berechne die Zirkulation $\displaystyle\oint_{\partial K} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \, d\boldsymbol{x}$ von $\boldsymbol{v}$ längs der Randkurve ∂K von K und bestätige damit den Integralsatz von Stokes im $\mathbb{R}^3$.