

Anleitungsaufgaben zu

Analysis III

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Aufgabe 1:

Für die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ berechne man die Gradienten und erstelle ein Bild im Bereich $[-1, 1] \times [-1, 1]$, auf dem verschiedene Höhenlinien der Funktion angegeben sind. Dies sind Linien, für die $f(x, y) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$ gilt.

a) $f(x, y) = 5x^2 - 3y^2$, b) $f(x, y) = 5x + 3y$, c) $f(x, y) = 5x^2 + 3y^2$.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = 5x^2 - 3y^2$.

- Man berechne von f alle partiellen Ableitungen bis zur 3. Ordnung.
- Die Tangentialebene an den Graphen einer differenzierbaren Funktion f im Punkt $(x_0, y_0) \in D \subset \mathbb{R}^2$ lautet

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Man bestimme die Tangentialebene für das gegebene f im Punkt $(x_0, y_0) = (3, -4)$.

- Man gebe eine Parameterdarstellung der Höhenlinie von f an, die durch den Punkt $(3, -4)$ läuft.
- Man berechne den Winkel α zwischen $\text{grad}f(3, -4)$ und der Tangentialrichtung der Höhenlinie von f im Punkt $(3, -4)$.

Aufgabe 3:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^4 + y^4} & , \text{ falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ falls } (x, y) = (0, 0) . \end{cases}$$

- Man überprüfe, ob f im Nullpunkt stetig ist.
- Man zeichne die Funktion im Bereich $[-1, 1] \times [-1, 1]$.
- Man berechne die ersten partiellen Ableitungen von f .
- und überprüfe, ob diese im Nullpunkt stetig sind.

Aufgabe 4:

- Man zeige, dass die Wellengleichung $u_{tt} = c^2 \Delta u$ für eine Ortsvariable mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ von der Funktion

$$u(x, t) = 3 \ln(x + ct) - 5 \tan(x - ct)$$

gelöst wird.

- Man zeige, dass die Funktion

$$u(x, y) = e^y \cos x + a + bx + cy + dxy$$

mit den Konstanten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ löst.

Aufgabe 5:

- Man berechne $\operatorname{div} \mathbf{f}$ und $\operatorname{rot} \mathbf{f}$ für das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (2x \cosh y, x^2 \sinh y - z^3 \sin y, x + 3z^2 \cos y)^T.$$

- Gegeben sei das Vektorfeld

$$\mathbf{g}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))^T = (1, 2x)^T.$$

- Man berechne $\operatorname{div} \mathbf{g}$ und $\operatorname{rot} \mathbf{g}$ und
- skizziere das Vektorfeld und einige Stromlinien.

Aufgabe 6:

- Man berechne für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = xy$ im Punkt (x_0, y_0) die Ableitung in Richtung $\mathbf{h} = (h_1, h_2)^T$. Welchen Anstieg besitzt die Funktion im Punkt $(x_0, y_0) = (1, -1)$ in den durch die Gerade $3y - 5x = 7$ gegebenen Richtungen.
- Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^2}{x^4 + y^4} & , \text{ falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ falls } (x, y) = (0, 0) . \end{cases}$$

- (i) Man zeichne die Funktion im Bereich $[-1, 1] \times [-1, 1]$.
- (ii) Man berechne für f im Punkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$ alle Richtungsableitungen.
- (iii) Man überprüfe, ob f im Punkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$ (vollständig) differenzierbar ist.

Aufgabe 7:

- a) Man berechne die Jacobi-Matrix unter Verwendung der Kettenregel und direkt:

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathbf{f}_1} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\mathbf{f}_2} \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u = \sin(rs) \\ v = e^r + s \\ w = 1 - 2s^3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} uw \\ vw \end{pmatrix} = \mathbf{f}(u(r, s), v(r, s), w(r, s)).$$

- b) Man berechne die Jacobi-Matrix von:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \mathbf{g}(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} \mapsto h(u, v) = f(u(x, y), v(x, y)).$$

Aufgabe 8:

Gegeben sei die Koordinatentransformation

$$\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ x/y \end{pmatrix}$$

mit $(u, v) \in D := [0.5, 2] \times [2, 4]$.

- a) Man berechne $\mathbf{J}\Phi(x, y)$ und $\det(\mathbf{J}\Phi(x, y))$ sowie
- b) bzgl. D : $\Phi^{-1}(u, v)$, $\mathbf{J}\Phi^{-1}(u, v)$ und $\det(\mathbf{J}\Phi^{-1}(u, v))$.
- c) Man skizziere $\Phi^{-1}(D)$ im (x, y) -Koordinatensystem.
- d) Man transformiere $\Delta w = w_{xx} + w_{yy}$ mit Hilfe der Kettenregel in eine Darstellung bzgl. (u, v) -Koordinaten.

Aufgabe 9:

- a) In einer Tischlerwerkstatt soll ein Holzkegelstumpf nach den vom Auftraggeber vorgegebenen Maßen r, R und h hergestellt werden. Dabei soll das Volumen

$$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + rR)$$

höchstens um 1 % abweichen dürfen. Mit den vorhandenen Werkzeugen können die Längenmaße bis auf einen Fehler von 0.5 % umgesetzt werden. Kann die Werkstatt die Kundenanforderung bzgl. des Volumens garantieren?

b) Man berechne das Taylor-Polynom 2.Grades der folgenden Funktion

$$f(x, y, z) = 1 + z + xy + x^2(1 - y)^2 + (y + z)^3.$$

Aufgabe 10:

Man berechne das Taylor-Polynom 3.Grades der folgenden Funktion

$$f(x, y) = x \sin(x + y)$$

im Entwicklungspunkt $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ und schätze den Fehler, der dadurch entsteht, wenn man T_3 anstelle von f verwendet, im Rechteck $[-1/2, 1/2] \times [\pi/4, 3\pi/4]$ nach oben ab.

Aufgabe 11:

Man berechne alle stationären Punkte der folgenden Funktionen und klassifiziere diese:

- a) $f(x, y) = xy - 4x + 3y - 12$,
- b) $f(x, y) = 2(x^2 + y^2)^2 - x^2 - y^2$,
- c) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$,
- d) $f(x, y) = x \sin y$.

Aufgabe 12:

Es sei durch

$$f(x, y) := \sin y + \cos x - 1 = 0$$

implizit eine Kurve c in \mathbb{R}^2 definiert.

- a) Man zeige, dass der Punkt $(0, \pi)$ auf c liegt.
- b) Man erstelle einen Höhenlinienplot von f .
- c) Man benutze den Satz über implizite Funktionen, um zu zeigen, dass sich obige Gleichung im Punkte $(0, \pi)$ lokal nach einer der Variablen auflösen läßt.
- d) Man bestimme die Tangente an die Kurve im Punkt $(0, \pi)$.

Aufgabe 13:

Man untersuche die durch die Niveaumenge

$$f(x, y) := y^4 - 2y^2 + x^4 - 2x^2 = 0$$

implizit gegebene(n) Kurve(n). Im Einzelnen sind gesucht

- a) die Symmetrien der Kurve(n),
- b) die Kurvenpunkte mit horizontaler und

- c) vertikaler Tangente,
- d) die singulären Punkte der Kurve mit Klassifikation und
- e) eine Zeichnung der Niveaumenge.

Aufgabe 14:

Gegeben sei die Funktion $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(x, y, z) = 16z^4 + 4x^2 + y^2 - 8x + 2y + 5.$$

- a) Man überprüfe, ob die Niveaumenge $g(x, y, z) = c$, die durch den Punkt $(1, 3, 0)$ festgelegt wird, in der Umgebung dieses Punktes eine glatte Fläche bildet.
- b) Man gebe im Punkt $(1, 3, 0)$ die Tangentialebene bezüglich der Fläche aus a) in Parameterform an.
- c) Man löse obige Gleichung gegebenenfalls nach einer der Variablen auf, um die Fläche explizit anzugeben.
- d) Man zeichne die Fläche.

Aufgabe 15:

Man berechne die Extremwerte der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x + y$ auf dem Kreis $x^2 + y^2 = 1$

- a) unter Verwendung der Lagrangeschen Multiplikatorenregel und
- b) über Parametrisierung des Kreises durch \mathbf{c} und anschließendes Lösen der Extremalaufgabe in $h(t) := f(\mathbf{c}(t))$.

Aufgabe 16:

Man bestimme absolutes Minimum und Maximum der Funktion

$$f(x, y, z) = x + y + z$$

auf dem Schnitt der Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ mit der Ebene $x + y - 2z = 0$ mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatorenregel.

Aufgabe 17:

Zur Berechnung eines Extremums der Funktion

$$f(x, y) = 0.1x^2 + \cos x + y^2$$

soll das Newton-Verfahren auf

$$\mathbf{F}(x, y) := (\text{grad } f(x, y))^T = 0$$

angewendet werden.

- Man berechne $\mathbf{F}(x, y)$ und die Jacobi-Matrix $\mathbf{JF}(x, y)$.
- Man stelle das Newton-Verfahren auf und starte es mit $\mathbf{x}^0 = (2, 1)^T$. Als Abbruchkriterium verwende man $\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|_\infty < 10^{-4}$.
- Man klassifiziere das gefundene Extremum.
- Man erstelle einen Funktionsplot von f im Bereich $[0, 4.5] \times [-1, 1]$.

Aufgabe 18:

Mit $Q := [0, 1] \times [0, 1]$ berechne man für die Funktion

$$f : Q \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x + y$$

- Riemannsche Unter- und Obersumme zu folgender Zerlegung Z von Q

$$Q_{i,j} = [(i-1)/n, i/n] \times [(j-1)/n, j/n], \quad i, j = 1, \dots, n$$

- und das Integral von f über Q nach dem Satz von Fubini.

Aufgabe 19:

Man berechne die folgenden Integrale:

- $\int_1^2 \int_{-1}^0 (x+1)^2 + y \, dx \, dy$ und $\int_{-1}^0 \int_1^2 (x+1)^2 + y \, dy \, dx$,

- $\int_0^1 \int_2^3 \frac{x^2 + y + 1}{xy + x} \, dx \, dy$ und $\int_2^3 \int_0^1 \frac{x^2 + y + 1}{xy + x} \, dy \, dx$,

- $\int_A e^{x-y} \, d(x, y)$ mit $A = [0, \ln 2] \times [0, \ln 3]$,

- $\int_B \frac{y^2}{x} \, d(x, y)$ mit $B = [1, e] \times [0, 1]$,

- $\int_C xy + e^z \, d(x, y, z)$ mit $C = [0, 1] \times [0, 2] \times [0, \ln 2]$.

Aufgabe 20:

Man beschreibe die folgenden Mengen durch Normalbereiche:

- den Halbkreis $H : x^2 + y^2 \leq 1, x \leq y$,
- das durch $\|\mathbf{x}\|_\infty \leq 4$ mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ gegebene Quadrat Q ,
- die von der Höhenlinie $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ eingeschlossene Asteroide A und

d) den durch die Flächen $x + 1 = 0$, $x - 1 = 0$, $y^2 + z^2 = 1$ berandeten Zylinder Z .

Aufgabe 21:

a) Für das Vektorfeld $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} y + \sin x \\ xy^2 \end{pmatrix}$$

berechne man das Kurvenintegral $\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$. Dabei ist die Kurve \mathbf{c} gegeben durch die mathematisch positive durchlaufene Randkurve des durch $x^2 \leq y \leq x$ mit $0 \leq x \leq 1$ eingeschlossenen Gebietes G .

b) Für das Vektorfeld $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -z^2/2 \\ 0 \\ xz \end{pmatrix}$$

berechne man das Kurvenintegral $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$. Dabei ist die Kurve $\mathbf{c} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} 2 \cos^2 t \\ 2 \sin t \cos t \\ 2 \sin t \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 22:

Gegeben sei das Vektorfeld $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3x^2y^4z^5 + 1 \\ 4x^3y^3z^5 + 2y \\ 5x^3y^4z^4 + 3z^2 \end{pmatrix}.$$

- Man zeige, dass \mathbf{f} ein Potential besitzt, ohne es zu berechnen.
- Man berechne ein Potential von \mathbf{f} durch Hochintegrieren und
- mit Hilfe des Hauptsatzes für Kurvenintegrale.
- Längs der Kurve $\mathbf{c} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, \sin t + \cos t)^T$ berechne man für die Fälle $T = \pi$ und $T = 2\pi$ das Kurvenintegral $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$.

Aufgabe 23:

Es sei $D \subset \mathbb{R}^3$ der von den Ebenen

$$x = 1, \quad y = 1, \quad y = -1, \quad z = 0 \quad \text{und} \quad z = x$$

eingeschlossene Bereich. Man skizziere D und berechne den Schwerpunkt von D bei einer Massenverteilung $\rho(x, y, z) = x$.

Aufgabe 24:

Man berechne die Masse des folgenden elliptischen Zylinders

$$Z := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 4y^2 \leq 17, 1 \leq z \leq 11 \right\}$$

mit der Dichte $\rho(x, y, z) = x^2 z$.

Tipp: Man benutze den Transformationssatz unter Verwendung geeigneter Koordinaten.

Aufgabe 25:

Man verifiziere den Satz von Green für das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(x, y) = (-xy - 2y, 2x + 4y^2)^T$$

und das durch die Kurve $x^2 + 4y^2 = 4$ eingeschlossene Gebiet E .

Aufgabe 26:

Gegeben sei die Teilfläche eines parabolischen Zylinders

$$N = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq y \leq x \leq 1, z = 1 - x^2\}.$$

- Man zeichne N ,
- parametrisiere N und
- berechne den Flächeninhalt von N .

Aufgabe 27:

Gegeben seien der Bereich

$$Z = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq x, 0 \leq z \leq 3\}$$

und das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (x, -4y, z)^T.$$

- Man skizziere Z .
- Man berechne den Fluß bezüglich \mathbf{f} durch jede der drei ebenen Teilflächen E_1, E_2 und E_3 des Randes von Z .
- Man berechne $\int_Z \operatorname{div} \mathbf{f} d(x, y, z)$.
- Man berechne den Fluß von \mathbf{f} durch die nichtebene Teilfläche M des Randes von Z .

Aufgabe 28:

Gegeben seien das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u}(x, y, z) = (x^3, 2xz, xy)^T$ einer turbulenten Strömung sowie die Fläche

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 9 \quad \wedge \quad z = x^2 + y^2 \right\}.$$

a) Man zeichne die Fläche F .

b) Man berechne auf F das Integral über alle Wirbelstärken $\int_F \operatorname{rot} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{o}$.

c) Man berechne die Zirkulation $\oint_{\partial F} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ von \mathbf{u} längs der Randkurve ∂F von F und bestätige damit den Integralsatz von Stokes im \mathbb{R}^3 .