Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2003/04**
Dr. K. Rothe

Anleitungsaufgaben zu

Analysis III

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Aufgabe 1:

a) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 2(x-y) + 2}\,.$$

(i) Man zeichne die Funktion.

(ii) Man weise die Stetigkeit von f in ganz $\mathbb{R}^2$ nach.

(iii) Man berechne die partiellen Ableitungen von f in ganz $\mathbb{R}^2$, sofern dies möglich ist.

b) Man berechne die Gradienten der folgenden Abbildungen

(i) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(x,y) = \sin(x^2 - y^3)$,

(ii) $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $h(x,y,z) = \dfrac{xy}{z^4+1}$.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2$.

a) Man bestimme die Höhenlinie durch den Punkt $(1,1)$.

b) Man berechne grad f im Punkt $(1,1)$.

c) Man zeige, dass grad $f(1,1)$ senkrecht auf dem Tangentialvektor der Höhenlinie im Punkt $(1,1)$ steht.

d) Man zeichne a)-c).

Aufgabe 3:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^4+y^4} & \text{, falls} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, falls} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

a) Man überprüfe, ob f im Nullpunkt stetig ist.

b) Man zeichne die Funktion im Bereich $[-5,5] \times [-1,1]$.

c) Man berechne die ersten partiellen Ableitungen von f

d) und überprüfe, ob diese im Nullpunkt stetig sind.

Aufgabe 4:

a) Man zeige, dass die Wärmeleitungsgleichung $\Delta u - \frac{1}{k} u_t = 0$ mit $k > 0$ für eine Ortsvariable von der Funktion

$$u(x,t) = e^{-t} \sin \frac{x}{\sqrt{k}}$$

gelöst wird.

b) Man zeige, dass mit $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ und $(x,y,z) \neq \mathbf{0}$ die Funktion

$$u(r,t) = \frac{1}{r} \sin(r - ct)$$

die Wellengleichung $\Delta u - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0$ löst.

Aufgabe 5:

a) Man berechne für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = xy$ im Punkt (x_0, y_0) die Ableitung in Richtung $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2)^T$. Welchen Anstieg besitzt die Funktion im Punkt $(x_0, y_0) = (1, -1)$ in den durch die Gerade $3y - 5x = 7$ gegebenen Richtungen.

b) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^4+y^4} & \text{, falls} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, falls} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

(i) Man zeichne die Funktion im Bereich $[-1,1] \times [-1,1]$.

(ii) Man berechne für f im Punkt $(x_0, y_0) = (0,0)$ alle Richtungsableitungen.

(iii) Man überprüfe, ob f im Punkt $(x_0, y_0) = (0,0)$ (vollständig) differenzierbar ist.

Aufgabe 6:

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}(x,y) = (u(x,y), v(x,y))^T = (1, 2x)^T .$$

a) Man berechne div f und rot f.

b) Man skizziere das Vektorfeld und einige Stromlinien, dass sind Lösungen des Differentialgleichungssystems $\dot{x} = u$, $\dot{y} = v$.

Aufgabe 7:

a) Man berechne die Jacobi-Matrix unter Verwendung der Kettenregel und direkt:

$$\begin{array}{ccccccc} \boldsymbol{f}: \mathbb{R}^2 & \stackrel{\boldsymbol{f}_1}{\to} & \mathbb{R}^3 & \stackrel{\boldsymbol{f}_2}{\to} & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} u = \sin(rs) \\ v = e^r + s \\ w = 1 - 2s^3 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} uw \\ vw \end{pmatrix} = \boldsymbol{f}(u(r,s), v(r,s), w(r,s)) . \end{array}$$

b) Man berechne die Jacobi-Matrix von:

$$\begin{array}{ccccc} f: \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \boldsymbol{g}(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} & \mapsto & h(u,v) = f(u(x,y), v(x,y)) . \end{array}$$

Aufgabe 8:

Gegeben seien die Koordinatentransformation $\mathbf{\Phi}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{\Phi}(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} 3r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 4s \end{pmatrix} .$$

a) Man berechne die Jacobi-Matrix $\boldsymbol{J\Phi}$ und deren Inverse $(\boldsymbol{J\Phi})^{-1}$.

b) Man stelle den Laplace-Operator in den Koordinaten (r, φ, s) dar.

c) Man berechne Δu für $u(r, \varphi, s) = \ln r + 8s^2 - \varphi$.

Aufgabe 9:

a) Gegeben sei die Kurve $\mathbf{c}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad t \in [a, b] .$$

Man überprüfe, ob es einen Wert $\theta \in]0,1[$ gibt, für den

$$\mathbf{c}(b) - \mathbf{c}(a) = \mathbf{c}'(a + \theta(b-a))(b-a)$$

gilt, wobei $a = 2$ und $b = 5$ gewählt werden sollen. Für die gleichen Werte von a und b gebe man ein $\theta \in]0,1[$ an, so dass die Mittelwert-Abschätzung

$$||\mathbf{c}(b) - \mathbf{c}(a)||_2 \leq ||\mathbf{c}'(a + \theta(b-a))(b-a)||_2$$

erfüllt ist.

b) In einer Tischlerwerkstatt soll ein Holzkegelstumpf nach den vom Auftraggeber vorgegebenen Maßen r, R und h hergestellt werden. Dabei soll das Volumen

$$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + rR)$$

höchstens um 1 % abweichen dürfen. Mit den vorhandenen Werkzeugen können die Längenmaße bis auf einen Fehler von 0.5 % umgesetzt werden. Kann die Werkstatt die Kundenanforderung bzgl. des Volumens garantieren?

Aufgabe 10:

a) Man berechne das Taylor-Polynom 3.Grades der folgenden Funktion

$$f(x,y) = x\sin(x+y)$$

im Entwicklungspunkt $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ und schätze den Fehler, der dadurch entsteht, wenn man T_3 anstelle von f verwendet, im Rechteck $[-1/2, 1/2] \times [\pi/4, 3\pi/4]$ nach oben ab.

b) Man berechne das Taylor-Polynom 2.Grades von

$$f(x,y,z) = 1 + z + xy + x^2(1-y)^2 + (y+z)^3$$

im Entwicklungspunkt $(0,0,0)$.

Aufgabe 11:

Man berechne alle stationären Punkte der folgenden Funktionen und klassifiziere diese:

a) $f(x,y) = xy - 4x + 3y - 12$,

b) $f(x,y) = 2(x^2+y^2)^2 - x^2 - y^2$,

c) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$,

d) $f(x,y) = x\sin y$.

Aufgabe 12:

Es sei durch

$$f(x,y) := \sin y + \cos x - 1 = 0$$

implizit eine Kurve c in $\mathbb{R}^2$ definiert.

a) Man zeige, dass der Punkt $(0, \pi)$ auf c liegt.

b) Man erstelle einen Höhenlinienplot von f.

c) Man benutze den Satz über implizite Funktionen, um zu zeigen, dass sich obige Gleichung im Punkte $(0, \pi)$ lokal nach einer der Variablen auflösen läßt.

d) Man bestimme die Tangente an die Kurve im Punkt $(0, \pi)$.

Aufgabe 13:

Man untersuche die durch die Niveaumenge

$$f(x, y) := y^4 - 2y^2 + x^4 - 2x^2 = 0$$

implizit gegebene(n) Kurve(n). Im Einzelnen sind gesucht

a) die Symmetrien der Kurve(n),

b) die Kurvenpunkte mit horizontaler und

c) vertikaler Tangente,

d) die singulären Punkte der Kurve mit Klassifikation und

e) eine Zeichnung der Niveaumenge.

Aufgabe 14:

Gegeben sei die Funktion $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x, y, z) = 16z^4 + 4x^2 + y^2 - 8x + 2y + 5 \, .$$

a) Man überprüfe, ob die Niveaumenge $h(x, y, z) = c$, die durch den Punkt $(1, 3, 0)$ festgelegt wird, in der Umgebung dieses Punktes eine glatte Fläche bildet.

b) Man gebe im Punkt $(1, 3, 0)$ die Tangentialebene bezüglich der Fläche aus a) in Parameterform an.

c) Man löse obige Gleichung gegebenenfalls nach einer der Variablen auf, um die Fläche explizit anzugeben.

d) Man zeichne die Fläche.

Aufgabe 15:

Man berechne die Extremwerte der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x + y$ auf dem Kreis $x^2 + y^2 = 1$

a) unter Verwendung der Lagrangeschen Multiplikatorenregel und

b) über Parametrisierung des Kreises durch $\mathbf{c}$ und anschließendes Lösen der Extremalaufgabe in $h(t) := f(\mathbf{c}(t))$.

Aufgabe 16:

Man bestimme absolutes Minimum und Maximum der Funktion

$$f(x, y, z) = x + y + z$$

auf dem Schnitt der Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ mit der Ebene $x + y - 2z = 0$ mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatorenregel.

Aufgabe 17:

Zur Berechnung eines Extremums der Funktion

$$f(x, y) = 0.1x^2 + \cos x + y^2$$

soll das Newton-Verfahren auf

$$\boldsymbol{F}(x, y) \;:=\; (\text{grad } f(x, y))^T \;=\; 0$$

angewendet werden.

a) Man berechne $\boldsymbol{F}(x, y)$ und die Jacobi-Matrix $\boldsymbol{JF}(x, y)$.

b) Man stelle das Newton-Verfahren auf und starte es mit $\boldsymbol{x}^0 = (2, 1)^T$. Als Abbruchkriterium verwende man $||\boldsymbol{x}^{k+1} - \boldsymbol{x}^k||_\infty < 10^{-4}$.

c) Man klassifiziere das gefundene Extremum.

d) Man erstelle einen Funktionsplot von f im Bereich $[0, 4.5] \times [-1, 1]$.

Aufgabe 18:

Mit $Q := [0, 1] \times [0, 1]$ berechne man für die Funktion

$$f : Q \to \mathbb{R}\,, \quad f(x, y) = x + y$$

a) Riemannsche Unter- und Obersumme zu folgender Zerlegung Z von Q

$$Q_{i,j} = [(i-1)/n, i/n] \times [(j-1)/n, j/n]\;,\; i, j = 1, \ldots, n$$

b) und das Integral von f über Q nach dem Satz von Fubini.

Aufgabe 19:

Man berechne die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_1^2 \int_{-1}^0 (x+1)^2 + y\, dx\, dy$ und $\displaystyle\int_{-1}^0 \int_1^2 (x+1)^2 + y\, dy\, dx$,

b) $\displaystyle\int_0^1 \int_2^3 \frac{x^2+y+1}{xy+x}\,dx\,dy$ und $\displaystyle\int_2^3 \int_0^1 \frac{x^2+y+1}{xy+x}\,dy\,dx$,

c) $\displaystyle\int_A e^{x-y}\,d(x,y)$ mit $A = [0, \ln 2] \times [0, \ln 3]$,

d) $\displaystyle\int_B \frac{y^2}{x}\,d(x,y)$ mit $B = [1, e] \times [0, 1]$,

e) $\displaystyle\int_C xy + e^z\,d(x,y,z)$ mit $C = [0,1] \times [0,2] \times [0, \ln 2]$.

Aufgabe 20:

Man beschreibe die folgenden Mengen durch Normalbereiche:

a) den Halbkreis $H:\ x^2+y^2 \le 1,\ x \le y$,

b) das durch $||\boldsymbol{x}||_\infty \le 4$ mit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ gegebene Quadrat Q,

c) die von der Höhenline $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ eingeschlossene Asteroide A und

d) den durch die Flächen $x+1=0,\ x-1=0,\ y^2+z^2=1$ berandeten Zylinder Z.

Aufgabe 21:

a) Für das Vektorfeld $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\boldsymbol{f}(x,y) = \begin{pmatrix} y + \sin x \\ xy^2 \end{pmatrix}$$

berechne man das Kurvenuntegral $\oint_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$. Dabei ist die Kurve $\mathbf{c}$ gegeben durch die mathematisch positive durchlaufene Randkurve des durch $x^2 \le y \le x$ mit $0 \le x \le 1$ eingeschlossenen Gebietes G.

b) Für das Vektorfeld $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -z^2/2 \\ 0 \\ xz \end{pmatrix}$$

berechne man das Kurvenuntegral $\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$. Dabei ist die Kurve $\mathbf{c} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos^2 t \\ 2\sin t \cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 22:

Gegeben sei das Vektorfeld $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2y^4z^5 + 1 \\ 4x^3y^3z^5 + 2y \\ 5x^3y^4z^4 + 3z^2 \end{pmatrix} .$$

a) Man zeige, dass $\boldsymbol{f}$ ein Potential besitzt, ohne es zu berechnen.

b) Man berechne ein Potential von $\boldsymbol{f}$ durch Hochintegrieren und

c) mit Hilfe des Hauptsatzes für Kurvenintegrale.

d) Längs der Kurve $\mathbf{c} : [0,T] \to \mathbb{R}^3$ mit $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, \sin t + \cos t)^T$ berechne man für die Fälle $T = \pi$ und $T = 2\pi$ das Kurvenintegral $\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$.

Aufgabe 23:

Es sei $D \subset \mathbb{R}^3$ der von den Ebenen

$$x = 1\,, \quad y = 1\,, \quad y = -1\,, \quad z = 0 \quad \text{und} \quad z = x$$

eingeschlossene Bereich. Man skizziere D und berechne den Schwerpunkt von D bei einer Massenverteilung $\rho(x,y,z) = x$.

Aufgabe 24:

Man berechne die Masse des folgenden elliptischen Zylinders

$$Z := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + 4y^2 \leq 17\,,\ 1 \leq z \leq 11 \right\}$$

mit der Dichte $\rho(x,y,z) = x^2z$.

Tipp: Man benutze den Transformationssatz unter Verwendung geeigneter Koordinaten.

Aufgabe 25:

Man verifiziere den Satz von Green für das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}(x,y) = (-xy - 2y, 2x + 4y^2)^T$$

und das durch die Kurve $x^2 + 4y^2 = 4$ eingeschlossene Gebiet E.

Aufgabe 26:

Gegeben sei die Teilfläche eines parabolischen Zylinders

$$N = \left\{ (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq y \leq x \leq 1\,,\ z = 1 - x^2 \right\} .$$

a) Man zeichne N,

b) parametrisiere N und

c) berechne den Flächeninhalt von N.

Aufgabe 27:

Gegeben seien der Bereich

$$Z = \left\{ (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \le 4 \, , \; 0 \le x \; , \; 0 \le z \le 3 \right\}$$

und das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = (x, -4y, z)^T \, .$$

a) Man skizziere Z.

b) Man berechne den Fluß bezüglich $\boldsymbol{f}$ durch jede der drei ebenen Teilflächen E_1, E_2 und E_3 des Randes von Z.

c) Man berechne $\displaystyle\int_Z \operatorname{div} \boldsymbol{f} \; d(x,y,z)$.

d) Man berechne den Fluß von $\boldsymbol{f}$ durch die nichtebene Teilfläche M des Randes von Z.

Aufgabe 28:

Gegeben seien das Geschwindigkeitsfeld $\boldsymbol{u}(x,y,z) = (x^3, 2xz, xy)^T$ einer turbulenten Strömung sowie die Fläche

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2 \le 9 \quad \wedge \quad z = x^2+y^2 \right\} .$$

a) Man zeichne die Fläche F.

b) Man berechne auf F das Integral über alle Wirbelstärken $\displaystyle\int\limits_F \operatorname{rot} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \, do$.

c) Man berechne die Zirkulation $\displaystyle\oint\limits_{\partial F} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \, d\boldsymbol{x}$ von $\boldsymbol{u}$ längs der Randkurve ∂F von F und bestätige damit den Integralsatz von Stokes im $\mathbb{R}^3$.