Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2001/02**
Dr. K. Rothe

Anleitungsaufgaben zu

Analysis III

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Die in Klammern angegebenen Nummern beziehen sich auf den Aufgabenband 3 von Oberle, Rothe, Sonar

Aufgabe 1: (vgl.17.1.1)

Für die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ berechne man die Gradienten und erstelle ein Bild, auf dem verschiedene Höhenlinien der Funktion angegeben sind. Dies sind Linien, für die $f(x, y) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$ gilt.

$$\text{a)}\ \ f(x,y) = 2x + 3y\ , \qquad \text{b)}\ \ f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}\ .$$

Aufgabe 2: (vgl.17.1.2)

Gegeben sei die durch $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$ definierte Funktion für $y \neq 0$.

a) Man berechne von f alle partiellen Ableitungen bis zur 2. Ordnung, sowie Δf.

b) Die Tangentialebene an den Graphen einer differenzierbaren Funktion f im Punkt $(x^0, y^0) \in D \subset \mathbb{R}^2$ lautet

$$z = f(x^0, y^0) + f_x(x^0, y^0)(x - x^0) + f_y(x^0, y^0)(y - y^0).$$

Man bestimme die Tangentialebene für das gegebene f im Punkt $(x^0, y^0) = (-1, 2)$.

Aufgabe 3:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & ,\text{falls}\quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,\text{falls}\quad (x,y) = (0,0)\ . \end{cases}$$

a) Man überprüfe, ob f im Nullpunkt stetig ist.

b) Man zeichne die Funktion im Bereich $[-1,1] \times [-1,1]$.

c) Man berechne die ersten partiellen Ableitungen von f

d) und überprüfe, ob diese im Nullpunkt stetig sind.

Aufgabe 4:

Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2$.

a) Man bestimme die Höhenlinie durch den Punkt $(1,1)$.

b) Man berechne grad f im Punkt $(1,1)$.

c) Man zeige, dass grad $f(1,1)$ senkrecht auf dem Tangentialvektor der Höhenlinie im Punkt $(1,1)$ steht.

d) Man zeichne a)-c).

Aufgabe 5:

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f} = (u(x,y), v(x,y))^T = (1, 2x)^T \ .$$

a) Man berechne div f und rot f.

b) Man skizziere das Vektorfeld und einige Stromlinien.

Aufgabe 6:

a) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = (\lambda x^2 + xz, -xy - yz - \lambda y^2, yz)^T = (f_1, f_2, f_3)^T \ .$$

Für welche Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ ist f wirbelfrei und für welche quellenfrei?

b) Gegeben sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $(x,y,z) \mapsto f(x,y,z)$. Man berechne div(grad f) und gebe ein Beispiel an, mit div(grad f) $\neq 0$.

Aufgabe 7: (vgl. 17.2.1)

Man berechne die Jacobi-Matrizen der durch folgende Zuordnungsvorschriften gegebenen Funktionen direkt und unter Verwendung der Kettenregel:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{g}(t) \quad &: \quad t \mapsto \begin{pmatrix} x = \sin t \\ y = \cos t \end{pmatrix} \mapsto (xy, x^3, y^2)^T, \\
h(u,v) \quad &: \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x = uv \\ y = u + v \end{pmatrix} \mapsto 3xy^2 + 2x^2 - y, \\
\boldsymbol{p}(u,v) \quad &: \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x = uv \\ y = v^2 \\ z = v \sin u \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} xz \\ x^2y^2z \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 8:

Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = 4x^2 + y^2 + 8x - 2y + 5\,.$$

a) Man bestimme die Höhenlinie von f durch den Punkt $\boldsymbol{x}^0 = (-1,3)^T$. Von welchem Typ ist der Kegelschnitt?

b) Man berechne die Richtungsableitung $D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{x}^0)$ für $\boldsymbol{v} = (1,1)^T/\sqrt{2}$. Für welches $\boldsymbol{v}$ mit $||\boldsymbol{v}|| = 1$ wird die Richtungsableitung maximal?

Beispiel zu Übungsaufgabe 9:

Das Polynom $p(x,y) = -5x^3 + 2xy^2$ ist homogen vom Grad 3, denn

$$p(tx,ty) = -5(tx)^3 + 2(tx)(ty)^2 = t^3(-5x^3 + 2xy^2) = t^3 p(x,y).$$

Aufgabe 10: (vgl. 17.3.2)

Man berechne das Taylor-Polynom $T_3(\boldsymbol{x};\boldsymbol{x}^0)$ dritten Grades für die Funktion

$$f(x,y) = \cos x \sin y e^{x-y}$$

zum Entwicklungspunkt $\boldsymbol{x}^0 = (0,0)^T$

a) unter Verwendung des Taylorschen Satzes,

b) mit Hilfe der Taylor-Reihen der verwendeten elementaren Funktionen in einer Dimension.

c) Man schätze den Fehler $|T_2(\boldsymbol{x};\boldsymbol{x}^0) - f(\boldsymbol{x})|$ im Punkt $\boldsymbol{x} = (1,1)^T$ nach oben ab.

Anleitung zur Übungsaufgabe 11:

$U = a + b + c \Rightarrow c = U - a - b \Rightarrow f(a,b) = F^2(a,b) = s(s-a)(s-b)(a+b-s) = \max!$

Aufgabe 12: (vgl. 18.1.1)

Man berechne alle stationären Punkte der folgenden Funktionen und klassifiziere diese:

a) $f(x,y) = xy + x - 2y - 2\,,$

b) $f(x,y,z) = -\ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1)\,,$

c) $f(x,y) = x^2y^2 + 4x^2y - 2xy^2 + 4x^2 - 8xy + y^2 - 8x + 4y + 4\,.$

Aufgabe 13:

Gegeben sei die implizite Gleichung $\quad g(x,y) = x^4 - ye^y = 0.$

a) Man zeige, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung $y = f(x)$ mit $y \geq 0$ und $g(x, f(x)) = 0$ existiert.

b) Man zeige, dass f eine gerade Funktion ist und für $x \geq 0$ streng monoton wächst.

c) Man führe zwei Schritte der Fixpunktiteration (18.2.7 Lehrbuch)

$$y_{n+1} = y_n - \left(\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)\right)^{-1} g(x, y_n)$$

aus, um $f(x)$ in der Nähe von $(x_0, y_0) = (0, 0)$ zu approximieren.

Aufgabe 14: (vgl. 18.2.4)

Durch $(x^2 + y^2)^2 - y(3x^2 - y^2) = 0$ ist eine Kurve implizit gegeben. Man bestimme

a) die Symmetrien der Kurve,

b) die Kurvenpunkte mit horizontaler Tangente,

c) die singulären Punkte der Kurve,

d) die Schnittpunkte der Kurve mit der Geraden $y = x$ und die Kurvensteigung in diesen Punkten.

Hinweise zu den Übungsaufgaben 14/15:

a) Die Klassifikation der singulären Punkte ist nach S.60 möglich.

b) $x^4 - x^2 + y^2 = 0$
Steigungsberechnung ist hier durch Auflösen nach y mit anschließendem Ableiten möglich. (Der Satz über implizite Funktionen kann in singulären Punkten nicht angewendet werden.)

c) Symmetrien:
zur x-Achse: $f(x, y) = f(x, -y)$
zur y-Achse: $f(x, y) = f(-x, y)$
zum Ursprung: $f(x, y) = f(-x, -y)$
zur Winkelhalbierenden: $f(x, y) = f(y, x)$

d) Asymptotenberechnung für Beispiel 18.2.12 c)im Buch:

$$g(x, y) = y^2(x - 1) + x^3 = 0$$

Angenommen die Asymptote habe die Form $x = ay + b$

$$\begin{aligned} r(y) &= g(ay + b, y) \\ &= y^2(ay + b - 1) + (ay + b)^3 \\ &= a(1 + a^2)y^3 + (3a^2b + b - 1)y^2 + 3ab^2y + b^3 \end{aligned}$$

$$\lim_{y \to \pm\infty} |r(y)| = \lim_{y \to \pm\infty} \left|a(1 + a^2)y^3 + (3a^2b + b - 1)y^2 + 3ab^2y + b^3\right| < +\infty$$

$\Rightarrow a = 0,\ b = 1 \quad \Rightarrow\ x = 1$ ist Asymptote.

Aufgabe 16:

Gegeben sei die Fläche $\quad x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0.$

a) Man berechne eine Parameterdarstellung für die durch die Flächennormale gegebene Gerade g.

b) Man berechne die Länge der Projektion des Normalenabschnittes zwischen der Fläche und der (x, y)-Ebene auf die (x, y)-Ebene.

c) Man zeige, dass sich $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$ in einer Umgebung des Punktes $\boldsymbol{x}^0 = (0, 0, r)^T$ lokal nach z auflösen läßt, mit $z = u(x, y)$.

d) Man berechne grad $u(x, y)$.

e) Man zeige, dass u die partielle Differentialgleichung $u^3 \Delta u = -(u^2 + x^2 + y^2)$ erfüllt.

f) Man berechne die Funktion $z = u(x, y)$.

Aufgabe 17: (vgl. 18.3.1)

a) Man bestimme mit Hilfe der Lagrange-Multiplikatoren-Regel diejenigen Punkte auf dem Kreisrand
$$x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0 \, ,$$
die vom Punkt $P = (-1, 1)^T$ den kleinsten bzw. den größten Abstand haben. Dabei gehe man wie folgt vor:

   (i) man formuliere die Extremwertaufgabe mit Nebenbedingung,

   (ii) man überprüfe die Regularitätsbedingung,

   (iii) man bestimme die Extremalkandidaten,

   (iv) man klassifiziere die Extremalkandidaten nach der hinreichenden Bedingung 2.Ordnung,

   (v) man gebe den kleinsten bzw. den größten Abstand an und zeige, dass es sich um globale Extrema handelt.

Aufgabe 18: (vgl. 18.3.2)

Man bestimme absolutes Minimum und Maximum der Funktion
$$f(x, y, z) = x^2$$
auf dem Schnitt der Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ mit der Ebene $z = x$.

Dabei gehe man wie folgt vor:

a) man zeige, dass alle zulässigen Punkte die Regularitätsbedingung erfüllen,

b) man stelle die Lagrange-Funktion F auf,

c) man bestimme alle stationären Punkte P_k der Lagrange-Funktion F,

d) man untersuche die Hessematrix $HF(P_k)$ auf Definitheit auf dem Tangentialraum $TG(P_k)$.

Hinweise zu Übungsaufgabe 19:

Man rechne x, y, z aus grad $f + \lambda$ grad $g = 0$ aus und setze das in Ergebnis in $g = 0$ ein. Es ergibt sich ein Polynom 4. Grades in λ, dass mit dem Newton-Verfahren gelöst werden soll.

Aufgabe 20: (vgl. 18.4.1)

Zur Berechnung eines Extremums der Funktion

$$f(x, y) = (x-1)^4 + 2(x-1)^2(y+1)^2 + (y+1)^4 - 2(x-1)^2 - 2(y+1)^2 + 1$$

soll das Newton-Verfahren auf

$$\boldsymbol{F}(x, y) \;:=\; (\text{grad } f(x, y))^T \;=\; 0$$

angewendet werden.

a) Man berechne $\boldsymbol{F}(x, y)$ und die Jacobi-Matrix $\boldsymbol{JF}(x, y)$.

b) Man stelle das Newton-Verfahren auf und starte es mit $\boldsymbol{x}^0 = (1.21, -1.15)^T$. Als Abbruchkriterium verwende man $||\boldsymbol{x}^{k+1} - \boldsymbol{x}^k||_\infty < 10^{-4}$.

c) Man klassifiziere das gefundene Extremum.

d) Man erstelle einen Funktionsplot von f im Bereich $[-0.2, 2.2] \times [-2.2, 0.2]$.

Aufgabe 21: (vgl. 19.1.3)

Man zeichne die Schnittfläche D des Kreises $x^2 + y^2 \leq 1$ mit der Halbebene $y \geq -x$ und der Halbebene $x \leq 0$ und berechne den Flächeninhalt sowie den Schwerpunkt der Schnittfläche D.

Dabei werde eine homogene Massenverteilung $\rho(x, y) = 3$ für alle $(x, y)^T \in D$ angenommen.

Aufgabe 22: (vgl. 19.1.4)

a) Für die Pyramide $D \subset \mathbb{R}^3$ mit den Eckpunkten

$$P_1 = (1, 1, 0)^T,\; P_2 = (-1, 1, 0)^T,$$

$$P_3 = (-1, -1, 0)^T,\; P_4 = (1, -1, 0)^T$$

und der Spitze $S = (0, 0, 1)^T$ berechne man das Trägheitsmoment bezüglich der z-Achse bei homogener Massenverteilung.

b) Man berechne das Trägheitsmoment des Rohres

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \quad \wedge \quad 0 \leq z \leq 1 \right\}$$

mit homogener Massendichte bezüglich der z-Achse unter Verwendung von Zylinderkoordinaten.

Aufgabe 23: (vgl. 19.1.5)

Man berechne den Flächeninhalt des Rechtecks

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -1 \leq x + y \leq 1 \quad \wedge \quad 0 \leq x - y \leq 2 \right\},$$

unter Verwendung der Transformation $u = x + y$ und $v = x - y$.

Man überprüfe dazu alle Voraussetzungen des Transformationssatzes!

Aufgabe 24: (vgl. 19.1.6)

Gegeben sei das Rotationsellipsoid

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 9 \right\}.$$

Man berechne $\int_E x^2 + y + z^2 \, d(x, y, z)$ unter Verwendung von

a) Zylinderkoordinaten und

b) an das Ellipsoid angepasste Kugelkoordinaten.

Aufgabe 25a: (vgl. 19.2.1)

Gegeben seien das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)^T$$

und die Kurven

$$\mathbf{c}_n : [0, 1] \to \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{c}_n(t) = (t, 1 - t^n, t^n)^T \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}.$$

a) Man berechne die Kurvenintegrale $\int\limits_{\mathbf{c}_n} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}$.

b) Man bestimme ein Potential für $\boldsymbol{f}$ und begründe damit, dass die Kurvenintegrale aus a) vom Parameter n unabhängig sind.

c) Man berechne die Arbeit $\int\limits_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$ für die Bewegung eines Massenpunktes von $P_1 = (1,1,1)^T$ nach $P_2 = (2,1,0)^T$ mit einer beliebigen Kurve $\mathbf{c}$.

Aufgabe 25b: (vgl. 19.2.2)

Für das Vektorfeld $\boldsymbol{f}(x,y) = (x^2y^2, y)^T$ mit $(x,y)^T \in \mathbb{R}^2$ berechne man das Kurvenintegral $\oint_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}$ längs des Halbkreises

$$\mathbf{c}(t) := \begin{cases} (t,0)^T & , \quad -1 \le t \le 1\,, \\ (2-t, \sqrt{1-(t-2)^2})^T & , \quad 1 \le t \le 3\,, \end{cases}$$

und bestätige für dieses Beispiel den Integralsatz von Green.

Aufgabe 26: (vgl. 19.3.3)

Gegeben sei folgender Kegelmantel

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2 \le 1 \quad \wedge \quad z = \sqrt{x^2+y^2} \right\}.$$

a) Man berechne die Oberfläche von M unter Verwendung kartesischer oder Polarkoordinaten.

b) Man berechne den Fluss des Vektorfeldes $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (x+y,\ y-x,\ z^2)^T$ durch M.

Aufgabe 27: (vgl. 19.3.6)

Gegeben sei das Vektorfeld $\boldsymbol{f}(x,y,z) = (yz-1, 0, z-1)^T$. Man berechne den Fluss von $\boldsymbol{f}$ durch die Oberfläche der Halbkugel

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (x-2)^2+y^2+(z-1)^2 \le 1 \quad \wedge \quad 1 \le z \right\}.$$

a) Man gebe Parametrisierungen der beiden glatten Teilflächen F_1 und F_2 an, die H beranden.

b) Man berechne $\displaystyle\int\limits_H \operatorname{div} \boldsymbol{f}\, d(x,y,z)$ sowie den Fluss durch F_1 und F_2 und bestätige damit den Gaußschen Integralsatz im $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 28: (vgl. 19.3.7)

Ist $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ ein divergenzfreies C^1-Vektorfeld, so wird zu einem festen Punkt $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ durch

$$\boldsymbol{v}(x,y,z) := \left(\int_{a_3}^{z} u_2(x,y,\zeta)d\zeta - \int_{a_2}^{y} u_3(x,\eta,a_3)d\eta, -\int_{a_3}^{z} u_1(x,y,\zeta)d\zeta, 0 \right)^T$$

ein so genanntes Vektorpotenzial $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ definiert, d.h. es gilt rot $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$.

Gegeben seien das Geschwindigkeitsfeld

$$\boldsymbol{u}(x, y, z) = (z - y, x - z, y - x)^T$$

einer turbulenten Strömung sowie die Fläche

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq 4 \quad \wedge \quad z = xy \right\} .$$

a) Man berechne zu $\boldsymbol{u}$, falls möglich, ein Vektorpotenzial $\boldsymbol{v}$.

b) Man zeichne die Fläche F.

c) Man berechne auf F das Integral über alle Wirbelstärken

$$\int_F \text{rot } \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\, do .$$

d) Man berechne die Zirkulation $\oint_{\partial F} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}$ von $\boldsymbol{u}$ längs der Randkurve ∂F von F und bestätige damit den Integralsatz von Stokes im $\mathbb{R}^3$.