Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2013**

Anleitungsaufgaben zu

Analysis II

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Aufgabe 1:
Für die Zweige der Asteroide $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ berechne man Definitionsbereich, Symmetrie, Nullstellen, Monotoniebereiche, Extrema, Konvexitätsbereiche, Wendepunkte und skizziere die beschriebene Kurve.

Aufgabe 2:
Von einem quadratischen Stück Pappe mit der Seitenlänge a werden an den Ecken Quadrate mit der Seitenlänge x abgeschnitten. Wie ist x zu wählen, damit der Rest eine Schachtel mit möglichst großem Rauminhalt ergibt?

Aufgabe 3:
Man berechne den minimalen (euklidischen) Abstand des Funktionsgraphen von $h(x) = x^3$ zum Punkt $(2, 0)$ unter Verwendung des

a) Bisektionsverfahrens,

b) Newton-Verfahrens.

Aufgabe 4:
Gegeben sei die durch $\Phi(x) = e^{-x^2}$ definierte Funktion.

a) Man zeige, dass Φ genau einen Fixpunkt x^* besitzt.

b) Man gebe ein Intervall D an, in dem die Fixpunktiteration

$$x_{k+1} = \Phi(x_k)\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

für jeden Startwert $x_0 \in D$ auf Grund des Fixpunktsatzes gegen x^* konvergiert.

Wieviele Iterationsschritte n werden nach der a priori-Abschätzung für eine Genauigkeit von $|x_n - x^*| < 10^{-3}$ höchstens benötigt?

c) Man berechne den Fixpunkt mit einem absoluten Fehler von $|x_n - x^*| < 10^{-3}$.

Aufgabe 5:
Man untersuche die Funktionenfolgen

a) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{2 + x^{2n}},$

b) $g_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \qquad g_n(x) = \dfrac{n}{n + 1 + nx^2},$

c) $h_n : [0, \pi] \to \mathbb{R}, \qquad h_n(x) = \cos^n x$

auf Konvergenz und unterscheide gegebenenfalls punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

Aufgabe 6:

a) Man bestimme für folgende Funktionenreihen den maximalen Konvergenzbereich und untersuche welche Art von Konvergenz (punktweise, gleichmäßige) vorliegt.

$$\text{(i)} \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1 + \sqrt{x})^k}\,, \qquad \text{(ii)} \quad g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + x^2}\,.$$

b) Man zeige, dass für $x \in]0, \infty[$

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(x + k)(x + k + 1)}$$

gleichmäßig gegen $h(x) = \dfrac{1}{x}$ konvergiert.

Aufgabe 7: (aus dem Vordiplom Analysis II, SS00+SS05)

a) Für folgende Potenzreihen bestimme man den Entwicklungspunkt und berechne den Konvergenzradius:

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2 + 4}\, x^n \quad , \quad \text{(ii)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{2}{5} \right)^2 x \right)^{2n} \,.$$

b) Man bestimme den Entwicklungspunkt, den Konvergenzradius und das Konvergenzintervall der folgenden Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x + 1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

und untersuche das Konvergenzverhalten in den Randpunkten des Konvergenzintervalls (mit Begründung).

Aufgabe 8:

Gegeben sei die durch $f(x) = \dfrac{2}{3x+4}$ definierte Funktion.

a) Man zeichne die Funktion f.

b) Man beweise über vollständige Induktion, dass für $k \geq 0$ gilt

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k 2 \cdot 3^k \cdot k!}{(3x+4)^{k+1}} .$$

c) Man berechne die Taylorreihe von f allgemein zum Entwicklungspunkt $x_0 \neq -4/3$ und bestimme den Konvergenzradius.

d) Welche Konvergenzintervalle ergeben sich für $x_0 = \pm 1$? Liegt Konvergenz in den Randpunkten vor?

Aufgabe 9:

a) Unter Verwendung der Summenformel für die geometrische Reihe:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

berechne man die Potenzreihe für die durch $f(z) = \dfrac{2}{3z+4}$ definierte Funktion zum Entwicklungspunkt z_0 und bestimme deren Konvergenzradius für $z_0 = 1 + i$.

b) Man berechne die Potenzreihe von $g(x) = \dfrac{1}{(3x+4)^3}$ zum Entwicklungspunkt x_0 und bestimme den zugehörigen Konvergenzradius.

Aufgabe 10:

a) Gegeben sei die durch $f(x) = \dfrac{2}{3x+4}$ definierte Funktion.

Man bestimme die Glieder der Potenzreihenentwicklung von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ über die Rekursionsformel aus dem Cauchy-Produkt von Reihen, sowie den zugehörigen Konvergenzradius.

b) Man berechne die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' = y$$

mit dem Anfangswert $y(0) = 3$ in folgender Potenzreihendarstellung

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k .$$

Aufgabe 11:
Gegeben sei die durch $f(x) = \dfrac{2}{4+x^2}$ definierte Funktion.

a) Man berechne die Potenzreihe von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ mit Konvergenradius unter Verwendung

(i) der geometrischen Reihe und

(ii) der Binomialreihe.

b) Man berechne die Potenzreihe von $\arctan(x/2)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$, bestimme den Konvergenzradius, untersuche das Konvergenzverhalten in den Randpunkten und berechne im Falle der Konvergenz den Wert der entsprechenden Reihen.

Aufgabe 12:

a) Von der Funktion $\sinh(x)$ sind nur die Stützstellen

x_i	0	3	6
$\sinh x_i$	0	10	201.7

gegeben. Man berechne das zugehörige Interpolationspolynom $p_2(x)$.

b) Man berechne $p_2(4)$ als Näherungswert für $\sinh(4)$. Wie groß ist der Fehler höchstens? Man berechne zum Vergleich den tatsächlichen Fehler.

c) Man zeichne $\sinh(x)$ und $p_2(x)$ im Intervall $[0, 6.5]$.

d) Zusätzlich sei noch $\sinh(5) = 74.2$ gegeben. Mit dieser Information führe man a) bis c) bzgl. $p_3(x)$ durch.

Aufgabe 13:
Gegeben sei die Funktion $f : [2,3] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 10 - 3x$.

a) Man berechne für die äquidistante Zerlegung

$$Z_n = \left\{2, 2+\frac{1}{n}, 2+\frac{2}{n}, \cdots, 3\right\}$$

des Intervalls $I = [2,3]$ Unter- und Obersumme zu f.

b) Man weise die Integrierbarkeit von f nach.

c) Man berechne $\displaystyle\int_2^3 10 - 3x\, dx$ über den Hauptsatz.

Aufgabe 14:

a) Man berechne den Flächeninhalt F, der sich im Intervall $[-3,3]$ zwischen x-Achse und der durch $y = x^2 - 4$ gegebenen Funktion befindet.

b) Die Gerade $y = x/2+1$ zerteilt den Kreis $x^2+y^2 = 4$ in zwei Segmente. Wieviel Prozent an Fläche verliert der Kreis durch das Abtrennen des kleineren der beiden Segmente?

Aufgabe 15:
Man berechne die folgenden unbestimmten Integrale

$$\text{a)} \int \frac{3x^6 - 6x^3 + 5x^2 - 4}{\sqrt{x}}\, dx\,, \quad \text{b)} \int \cot x\, dx\,, \quad \text{c)} \int x \ln x\, dx\,,$$

$$\text{d)} \int x\sqrt{1-x^2}\, dx\,, \quad \text{e)} \int \sinh^2 x\, dx\,, \quad \text{f)} \int x^2 \cos x\, dx\,.$$

Aufgabe 16:
Man berechne die folgenden bestimmten Integrale:

$$\text{a)} \int_0^5 \frac{x}{\sqrt{x+4}}\, dx\,, \quad \text{b)} \int_0^2 \frac{x^3+3x^2-7x+11}{x+5}\, dx\,, \quad \text{c)} \int_0^{\pi/3} \cos(x)\sin^4(x)\, dx\,,$$

$$\text{d)} \int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x\, dx\,, \quad \text{e)} \int_0^1 \frac{e^{3x}+2e^x}{e^x+2}\, dx\,.$$

Aufgabe 17:
Man berechne die folgenden unbestimmten Integrale

$$\text{a)} \int \frac{6x^3+5x^2+12x+7}{x^2+2}\, dx\,, \quad \text{b)} \int \frac{8x^3-43x^2+46x-39}{x^4-4x^3+27}\, dx\,,$$

$$\text{c)} \int \frac{2x+11}{(x^2+10x+26)^2}\, dx\,.$$

Aufgabe 18:
Man berechne die folgenden Integrale

a) $\displaystyle\int \frac{4e^{4x} - 6e^{2x}}{2e^{2x} - 5}\, dx$,

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{2 + 2\sin x}$,

c) $\displaystyle\int \frac{2 + \cos(2x)}{2 + \sin(2x)}\, dx$.

Aufgabe 19:
Man untersuche die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz (ohne sie zu berechnen)

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^3 + x^2}\, dx$,

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x^4 + x^3}\, dx$,

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x^{5/4}}\, dx$.

Aufgabe 20:
Man berechne die folgenden uneigentlichen Integrale bzw. deren Cauchyschen Hauptwerte, falls diese existieren:

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 (x^2 + 1)e^x\, dx$,

b) $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{x - 2}$,

c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{|x|^{3/2}}$.

Aufgabe 21:
Gegeben sei die Funktion

$$f \; : \; [0,2] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) = x^3 \, .$$

a) Man berechne das Volumen des Rotationskörpers, wenn der Funktionsgraph von f um die $x-$Achse rotiert.

b) Man berechne das Volumen des Rotationskörpers, wenn der Funktionsgraph von f um die $y-$Achse rotiert.

c) Man berechne die Mantel- und Oberfläche des Rotationskörpers, wenn der Funktionsgraph von f um die $x-$Achse rotiert.

d) Man zeichne die Mantelflächen der Rotationskörper aus a) und b).

Bemerkung: Die Integrale sollen elementar, d.h. ohne Formelsammlung gelöst werden.

Aufgabe 22:

a) Man berechne die Bogenlänge der Kurve $\mathbf{c} : [0, \ln 25] \; \rightarrow \; \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} \cos(e^t) \\ \sin(e^t) \\ e^t \end{pmatrix}$$

und zeichne $\mathbf{c}$.

b) Man zeichne die Epizykloide $\mathbf{c} : [0, 6\pi] \; \rightarrow \; \mathbb{R}^2$

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} 4\cos(t/3) - \cos(4t/3) \\ 4\sin(t/3) - \sin(4t/3) \end{pmatrix}$$

und berechne den überstrichenen Flächeninhalt.

Aufgabe 23:
Durch

$$r(\varphi) = \frac{\varphi}{2\pi}$$

ist eine archimedische Spirale in Polarkoordinaten gegeben.

a) Man zeichne die Kurve für $\varphi \in [0, 50\pi]$.

b) Man berechne den Tangentenvektor der Kurve für $\varphi = 2k\pi$ mit $k \in \mathbb{N}$.

c) Man berechne die von der Spirale für $\varphi \in [0, 2\pi]$ überstrichene Fläche.

Aufgabe 24:
Gegeben sei ein Draht mit der Dichtefunktion $\rho(x,y) = x+y$. Die Form des Drahtes wird beschrieben durch die Kurve $\mathbf{c} : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2$, mit

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} .$$

Man zeichne die Form des Drahtes, berechne seine Gesamtmasse, bestimme seinen Schwerpunkt und ermittle sein Trägheitsmoment bzgl. der x-Achse.

Aufgabe 25:
Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x(x+2) & , \quad -2 \le x \le 0 \quad , \\ x(2-x) & , \quad 0 \le x \le 2 \quad . \end{cases}$$

a) Man zeichne die Funktion.

b) Man berechne die Fourier-Reihe der 4-periodischen direkten Fortsetzung von f.

c) Man zeichne die Fehlerfunktionen $f(x) - S_m(x)$ für $m = 1, 3, 5$, wobei $S_m(x)$ die m-te Partialsumme der Fourier-Reihe darstellt.

d) Man zeige mit Hilfe von b) die Identität $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$.

Aufgabe 26:
Gegeben sei die 2π-periodische direkte Fortsetzung der Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} -\sin x & , \quad -\pi \le x \le 0 \quad , \\ 0 & , \quad 0 \le x \le \pi \quad . \end{cases}$$

a) Man zeichne die direkte Fortsetung im Intervall $[-\pi, 4\pi]$.

b) Man berechne die zugehörige Fourier-Reihe.

c) Man zeichne die Partialsummen $S_0(x), \ldots, S_3(x)$ der berechneten Fourierreihe.

d) Mit Hilfe von b) zeige man die Identität

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} .$$

Aufgabe 27:

Gegeben sei die Funktion $f \, : \, [0, \pi[\to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$.

a) Man zeichne die gerade (2π-periodische) Fortsetzung der Funktion im Intervall $[-3\pi, 5\pi]$.

b) Man berechne die komplexe Fourier-Reihe dieser geraden Fortsetzung.

c) Man gebe die reellen Fourier-Koeffizienten dieser Fourier-Reihe an.

d) Man zeichne die Partialsummen $S_0(x), \ldots, S_4(x)$ der berechneten Fourier-Reihe.

Aufgabe 28:

a) Man bestimme mit Hilfe des Fourierreihenansatzes

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

eine Lösung der Differentialgleichung
$y'(x) = 4y(x) + 11\cos(3x) + 2\sin(3x)$.

b) Man bestimme die Fourier-Koeffizienten der folgenden 2π-periodischen Funktionen:

(i) $3 - 4\sin(2x) + 7\sin(5x) + 6\cos(3x)$,

(ii) $\sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x + \sin^2 x - \cos^2 x$.

Tipp: Die Theoreme für trigonometrische Funktionen führen hier zu Vereinfachungen.