**Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg** **SoSe 2000**
©Dr. K. Rothe

# Anleitungsaufgaben zu

# Analysis II

# für Studierende der Ingenieurwissenschaften

**Die in Klammern angegebenen Nummern beziehen sich auf den Aufgabenband 3 von Oberle, Rothe, Sonar**

**Aufgabe 1:** (vgl. 10.5.3)

Für die durch $f(x) = \cos x - 2x$ beschriebene Funktion $f$ sollen alle Nullstellen mit dem Fixpunktverfahren bestimmt werden.

a) Wie viele Nullstellen besitzt $f$?

b) Man überprüfe die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes bei der verwendeten Verfahrensfunktion.

c) Man berechne $x_5$ und führe eine A-priori- und eine A-posteriori-Fehlerabschätzung durch.

**Aufgabe 2:**

Man untersuche die Funktionenfolgen

a) $f_n : [0, \pi] \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \sin^n x$ ,

b) $g_n : [0, \infty[ \to \mathbb{R}, \qquad g_n(x) = \dfrac{nx}{2 + (nx)^2}$ ,

c) $h_n : [2, \infty[ \to \mathbb{R}, \qquad h_n(x) = \dfrac{nx}{2 + (nx)^2}$ ,

d) $k_n : [0, \frac{\pi}{2}[ \to \mathbb{R}, \qquad k_n(x) = \dfrac{3 \sin x}{n}$ ,

e) $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad p_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(k^2 x)}{k^{1.5}}$

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

**Aufgabe 3:**

Man berechne die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen und untersuche die Konvergenz in den Randpunkten des Konvergenzintervalls:

$$\text{a)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}\,, \qquad \text{b)}\quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2x}{3}\right)^n \,.$$

**Aufgabe 4:**

Man bestimme die Konvergenzradien der Potenzreihen

$$\text{a)}\quad \sum_{n=0}^{\infty} \sinh n\, x^n \;, \qquad \text{b)}\quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^{2n}\,,$$

$$\text{c)}\quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \qquad \text{mit} \quad a_k = \begin{cases} -k, & \text{falls } k \text{ Quadratzahl} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \,.$$

**Aufgabe 5:** (vgl. 11.2.4)

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{4-2x}{1+\cos x} \,.$$

a) Man zeichne die Funktion und begründe, warum der Konvergenzradius der Potenzreihe nicht größer als $\pi$ sein kann.

b) Man bestimme die ersten fünf Glieder der Potenzreihe von $f$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

**Aufgabe 6:**

a) Man zeige, dass für $k \geq 1$ gilt:

$$\binom{-1}{k} = (-1)^k \,.$$

b) Man berechne die Ableitung von $\arctan x$.

c) Man berechne die Potenzreihe von $\arctan x$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

d) Man bestimme den Konvergenzradius zu der unter c) berechneten Potenzreihe.

**Aufgabe 7:**

a) Von der Funktion $\exp x$ seien nur die Stützstellen

| $x_i$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $\exp x_i$ | $0.367$ | $1$ | $2.718$ |

bekannt. Man stelle das Interpolationspolynom $p$ niedrigsten Grades auf.

b) Man berechne $p(0.5)$ als Näherungswert für $\exp 0.5$ . Wie groß ist der Fehler höchstens und wie groß mindestens?

**Aufgabe 8:**

Zu der Funktion $f(x) := x^3$ und den Gitterpunkten $x_i := \frac{i}{n}, \quad i = 0, 1, \ldots, n$ des Intervalls $[0, 1]$ (mit $n \in \mathbb{N}$) seien die folgenden Summen definiert:

$$O_n := \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x),$$

$$U_n := \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x).$$

Man untersuche die Folge $(O_n - U_n)$ auf Konvergenz und ermittle ggf. ihren Grenzwert.

**Aufgabe 9:**

Gegeben sei die durch

$$f(x) = \cos\left(\frac{x^2}{2} + x\right)$$

definierte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ .

a) Man berechne das Taylor-Polynom 2. Grades zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

b) Man zeichne $f$ und das in a) berechnete Taylor-Polynom.

c) Man schätze den bei der Approximation von $f$ durch das Taylor-Polynom gemachten Fehler im Punkt $x = \frac{1}{3}$ ab.

d) Man bestimme die Potenzreihenentwicklung von $f$ bis zum Glied mit $x^2$ und zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ unter Verwendung der bekannten Potenzreihenentwicklung von cos.

**Aufgabe 10:**

Gegeben sei $y(t) = \sqrt{e^{-4t} + \frac{1}{8} - \frac{t}{2}}$ . Man bestätige die Gültigkeit der Differentialgleichung

$$y(t) \cdot y'(t) + 2y^2(t) + t = 0 \, .$$

**Aufgabe 11:**

Gegeben sei die Gleichung

$$x = \frac{1}{(x+3)^2} \, .$$

a) Man verschaffe sich graphisch durch Zeichnen der Funktionen $f(x) = x$ und $g(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$ einen Überblick über die Anzahl der Schnittpunkte von $f$ und $g$ und begründe anschließend auch theoretisch, warum es nur eine Lösung $x^*$ der obigen Gleichung geben kann.

b) Man gebe ein Intervall $D$ an, so dass die Fixpunktiteration

$$x_{n+1} = \frac{1}{(x_n+3)^2}$$

für alle Startwerte aus $D$ gegen $x^*$ konvergiert.

c) Wieviele Iterationen $N$ benötigt man ausgehend vom Startwert $x_0 = 0.25$, um den Fixpunkt $x^*$ mit einem absoluten Fehler von höchstens $10^{-5}$ zu berechnen?

d) Man berechne für das unter c) a priori bestimmte $N$ die Iterierte $x_N$ und überprüfe die Genauigkeit der Iterierten mit Hilfe der A-posteriori-Fehlerabschätzung.

**Aufgabe 12:** (vgl. 12.2.2)

Man gebe das Interpolationspolynom $p(z)$ niedrigsten Grades an, das durch folgende Daten gegeben ist:

| $z_i$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $i$ | $2i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | $3$ | $3+i$ | $1+2i$ | $5-2i$ | $35-11i$ |

.

**Aufgabe 13:** (vgl. 13.3.1/2)

Man berechne die folgenden unbestimmten Integrale

a) $\displaystyle\int \frac{x^5+x^3+x+1}{\sqrt[5]{x}}\,dx$ , b) $\displaystyle\int \tan x\,dx$ , c) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx$ ,

d) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$ , e) $\displaystyle\int e^x \cosh x\,dx$ , f) $\displaystyle\int x \sin x\,dx$ .

**Aufgabe 14:**

Man berechne die Flächeninhalte der drei endlichen Teilflächen zwischen $y = x^2 - 1$ und $x^2 + y^2 = 1$.

**Aufgabe 15:**

Für den Abfluss $w(t)$ eines aperen Gletschers gilt unter vereinfachenden Annahmen die Beziehung

$$w(t) = \nu \cdot \int_{t-\sigma}^{t} E(\tau)\, d\tau \quad ,$$

wobei $\nu$ einen Proportionalitätsfaktor, $E(t)$ die zur Zeit $t$ zur Verfügung stehende Schmelzenergie und $\sigma$ die maximale Abflussdauer bezeichnet. Alle Zeiten sind in Stunden angegeben. Für

$$E(t) = \begin{cases} -\cos\left(\dfrac{2\pi t}{24}\right) & \text{für} \quad 6 \le t \le 18\,, \\ 0 & \text{für} \quad -6 \le t \le 6 \quad \text{und} \quad 18 \le t \le 24\,, \end{cases}$$

$\nu = 1$ und $\sigma = 6$ berechne man den Abfluss $w(t)$ im Zeitraum $0 \le t \le 24$.

**Aufgabe 16:**

Eine zweistufige Rakete hat die Kenndaten

| | Leermasse | Treibstoffmasse | Verbrauch | Schubkraft $F$ |
|---|---|---|---|---|
| 1. Stufe | 5000kg | 125000kg | 1000kg/s | $2.45 \cdot 10^6$N |
| 2. Stufe | 2000kg | 16000kg | 80kg/s | $2.48 \cdot 10^5$N |

Die Rakete startet senkrecht. Wenn der Treibstoff der 1. Stufe verbraucht ist, so wird deren Hülle abgestoßen. Setzt man unabhängig von der Höhe vereinfachend $g = 9.81\text{m/s}^2$, so gilt für die Beschleunigung der Rakete

$$\ddot{h}(t) = \dot{v}(t) = b(t) = \frac{F}{m(t)} - g \qquad (m(t) = \text{ Gesamtmasse zum Zeitpunkt } t) \quad .$$

a) Man bestimme die Funktion $m(t)$.

b) Welche Geschwindigkeit $v$ hat die Rakete 125s bzw. 325s nach dem Start?

c) Welche Höhe $h$ wird nach 125s bzw. 325s erreicht?

**Aufgabe 17:** (vgl. 13.4.1)

Man berechne die folgenden unbestimmten Integrale:

a) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^5 - x^4 + 8x^3 - 8x^2 + 16x - 16}\, dx\,,$

b) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-4x+8}\,dx$ ,

c) $\displaystyle\int \frac{2x^6+x^5+12x^3-7x^2+5x-2}{2x^5-x^4+2x^3-x^2}\,dx$ .

**Aufgabe 18:** (vgl. 13.4.5)

Man berechne die folgenden unbestimmten Integrale:

a) $\displaystyle\int \frac{2e^{2x}+3e^x-2}{e^{2x}-e^x-2}\,dx$ , b) $\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\,dx$ .

**Aufgabe 19:** (vgl. 13.5.2)

Man untersuche die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz (ohne sie zu berechnen):

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{x^4+2x^2+1}\,dx$ ,

b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x+1}{\sqrt{x^4+1}}\,dx$ .

**Aufgabe 20:** (vgl. 13.5.2)

Man berechne die folgenden uneigentlichen Integrale bzw. deren Cauchyschen Hauptwerte, falls diese existieren:

a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}}$ ,

b) $\displaystyle\int_0^3 \frac{x+1}{x^2-1}\,dx$ .

**Aufgabe 21:** (vgl. 13.6.1)

Man berechne das Integral $\displaystyle\int_0^b x^2e^x\,dx$

a) durch partielle Integration und

b) durch Differenzieren der Funktion $F(y) := \displaystyle\int_0^b e^{xy}\,dx$ .

**Aufgabe 22:** (vgl. 14.1.3)

Die Parabeln $p(x) = 3 - x^2$ und $q(x) = x^2 + 1$ schließen im Intervall $[-1, 1]$ eine Fläche ein.

a) Man berechne das Volumen und

b) die Oberfläche und

c) fertige eine Zeichnung an,

des Körpers, der entsteht, wenn diese Fläche um die $x$-Achse rotiert.

**Aufgabe 23:** (vgl. 14.2.1/2)

a) Man berechne die Bogenlängen der folgenden Kurve:

$$\mathbf{c} : [0, \infty[ \to \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad \mathbf{c}(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix},$$

b) Für $t \in [-2, 2]$ sei die Strophoide mit

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \\[2ex] \dfrac{t(t^2 - 1)}{t^2 + 1} \end{pmatrix}$$

gegeben.

(i) Man skizziere die Strophoide.

(ii) Man berechne die von der Kurve $\mathbf{c}$ umschlossene Fläche für $t \in [-1, 1]$.

**Aufgabe 24:** (vgl. 14.3.1)

a) Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = x$. Man berechne das Kurvenintegral 1. Art von $f$ längs der Ellipse $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

b) Durch $\mathbf{c}(t) = (\cos^3 t,\ \sin^3 t)$ mit $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sei ein Draht parametrisiert. Er besitze die Massendichte $\rho(\mathbf{c}(t)) = \sin t$. Man berechne die Gesamtmasse des Drahtes.

**Aufgabe 25:** (vgl. 16.2.3)

Gegeben sei die Funktion $f : ]-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$. Man berechne die Fourier-Reihe der 2-periodischen Fortsetzung der Funktion.

**Aufgabe 26:** (vgl. 16.2.2)

Gegeben sei die 2-periodische Funktion $f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad -1 \le x \le 0 \quad , \\ 1 - x & , \quad 0 \le x < 1 \quad . \end{cases}$

a) Man berechne die Fourier-Reihe der Funktion.

b) Man zeige mit Hilfe von a) die Identität $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ .

**Aufgabe 27:** (vgl. 16.2.4)

a) Man bestimme die Fourier-Koeffizienten der folgenden $2\pi$-periodischen Funktionen:

(i) $\sin^4(2x)$ ,

(ii) $\cos^4(3x)$ ,

(iii) $\sin x \cos x$ ,

(iv) $3\sin(5x) - 4\sin^3(7x)$ ,

(v) $\cos^2(3x) - \sin^2(3x)$ ,

(vi) $1 + 2\sin(9x) + 3\cos(5x)$ .

b) Man bestimme die Lösung der Gleichung $y'(x) = y(x) + \cos(x)$ mit Hilfe von (16.2.5) im Lehrbuch.

**Aufgabe 28:** (vgl. 16.2.5)

Gegeben sei die Funktion $f : [0, \pi[ \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ .

a) Man berechne die komplexe Fourier-Reihe der ungeraden ($2\pi$-periodischen) Fortsetzung.

b) Man gebe die reellen Fourier-Koeffizienten der Reihe aus a) an.