

# Hörsaalübungsaufgaben zu Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

## Aufgabe 1:

- a) Man zeige, dass folgende Aussage eine Tautologie ist

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A).$$

- b) Man beweise:

Für reelle Zahlen  $a, b$  mit  $0 < a < b$  gilt die Ungleichung

$$\sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{b-a},$$

- (i) indirekt und  
(ii) direkt.

## Aufgabe 2:

Man stelle die folgenden Mengen durch Aufzählung ihrer Elemente dar

- a)  $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 9 < 0\}$ ,  
b)  $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{4x+20} \leq 6\}$ ,  
c)  $C = \{x \in \mathbb{N} \mid -3 \leq \ln x < 3\}$ ,  
d) Man bilde die Mengen  $A \cup B$ ,  $A \cap C$ ,  $C \setminus B$ ,  $(C \setminus B) \cap A$ .

## Aufgabe 3:

Man beweise durch vollständige Induktion

- a) für  $q \neq 1$  und alle  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt  $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ ,  
b) für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \geq \frac{1}{n+1}$ ,  
c)  $a_n := 11^{n+1} + 12^{2n-1}$  ist für alle  $n \in \mathbb{N}$  durch 133 teilbar.

**Aufgabe 4:**

- a) Für die Binomialkoeffizienten mit  $n, m \in \mathbb{N}$  und  $m \leq n$  weise man folgende Beziehungen nach:

$$\binom{n}{m} \cdot \frac{n+1}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}.$$

- b) Man bestimme für die Zahlen 96135 und 84854 die Primfaktorzerlegung, den ggT und das kgV.
- c) Man wandle die rationale Zahl  $r$  mit der periodischen Zifferndarstellung  $r = 4.\overline{321}$  um in einen Bruch.
- d) Man beweise indirekt, dass  $\sqrt{14}$  irrational ist.

**Aufgabe 5:**

- a) Für die Funktion  $f$  mit

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 13x$$

zeichne man den Funktionsgraphen und berechne alle Nullstellen  $x \in \mathbb{C}$ .

- b) Man berechne die folgenden Ausdrücke und gebe sie in kartesischer Darstellung an

- (i)  $z_1 = 3 - 4i - (5 + 6i)$ ,
- (ii)  $z_2 = 3i^7 - 2i^5 + 6i^4 + 5i^2 + 4$ ,
- (iii)  $z_3 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ ,
- (iv)  $z_4 = (3 - 4i)(5 + 6i)$ ,
- (v)  $z_5 = \frac{3 - 4i}{5 + 6i}$ .

- c) Gegeben seien die komplexen Zahlen

$$z_1 = 1 + i, \quad z_2 = -1 + i, \quad z_3 = i.$$

- (i) Man berechne

$$\bar{z}_1 + z_2, \quad \operatorname{Re}(\bar{z}_2 + 3z_3), \quad \operatorname{Im}(2z_1 + z_2), \quad |z_1 + z_3|.$$

- (ii) Man bestimme die Polarkoordinatendarstellung von

$$z_1, \quad z_2, \quad z_3, \quad \bar{z}_1^6, \quad z_2^{12}, \quad \frac{\bar{z}_1^6 z_3}{z_2^{12}}.$$

**Aufgabe 6:**

a) Für die Funktion

$$f : ]-\infty, c] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad y = f(x) := x^2 + 8x + 15$$

bestimme man die größte Zahl  $c$ , so dass  $f$  eine Umkehrfunktion  $f^{-1}$  besitzt. Man berechne die Umkehrfunktion, gebe deren Definitions- und Wertebereich an und zeichne den Funktionsgraphen von  $f^{-1}$ .

b) Man entscheide, welche der folgenden Funktionen injektiv, surjektiv und bijektiv sind und zeichne die zugehörigen Funktionsgraphen:

(i)  $f_1 : [-5, 5] \rightarrow [-2, 2]$ ,  $f_1(x) = 1 - |2 - |x||$ ,

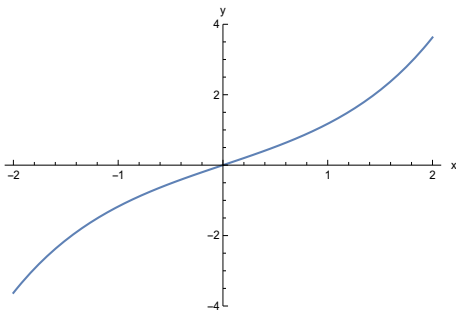
(ii)  $f_2 : [0, 1] \rightarrow [0, 2]$ ,  $f_2(x) = x^4$ ,

(iii)  $f_3 : [0, \pi/2] \rightarrow [0, 1/2]$ ,  $f_3(x) = \sin x \cos x$ ,

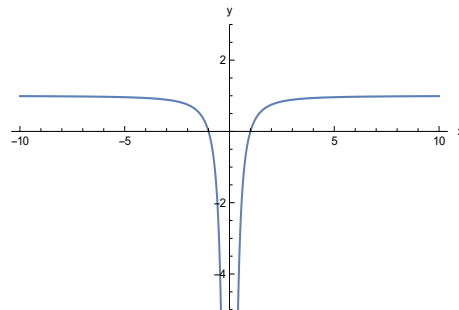
(iv)  $f_4 : \mathbb{R} \rightarrow ]0, \infty[$ ,  $f_4(x) = e^x$ .

**Aufgabe 7:**

Zu den Abbildungsvorschriften  $f(x)$  und  $g(x)$  seien die folgenden Funktionsgraphen gegeben:



$$f(x) = ?$$



$$g(x) = ?.$$

a) Man begründe, welche der Abbildungsvorschriften

$$f_1(x) = x + x^3, \quad f_2(x) = 1 - \frac{1}{x^2}, \quad f_3(x) = \sinh x, \quad f_4(x) = \ln(|x|)$$

mit  $f(x)$  und welche mit  $g(x)$  übereinstimmt.

b) Man untersuche, ob es sich bei  $f$  und  $g$  um gerade, ungerade oder beschränkte Funktionen handelt.

c) Anhand der Funktionsgraphen von  $f$  und  $g$  gebe man die Bereiche an, in denen die Funktion monoton wächst oder fällt und konkav oder konvex (von unten) ist.

**Aufgabe 8:**

a) Man vereinfache die folgende Abbildungsvorschrift

$$f(x) = \ln \frac{x^2 + 4x + 4}{x} - \ln(x + 2) + \ln(x).$$

b) Für die unecht gebrochen rationale Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 3x - 31}{x^2 + 6x + 11}.$$

spalte man den polynomialen Anteil durch Polynomdivision ab.

c) Mit Hilfe der Eulerschen Formel und unter Verwendung von  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$  bestätige man die Gültigkeit der Additionstheoreme

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x,$$

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x.$$

**Aufgabe 9:**

a) Man bestimme für folgende Mengen die Menge aller Häufungspunkte  $M'$  und aller inneren Punkte  $M^0$ , und kläre, ob die Menge abgeschlossen oder offen ist.

$$M_1 = (]-3, 5] \cap ]2, 8]) \cup \left\{ a_n \in \mathbb{R} \mid a_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$M_2 = \{0\} \cup [3, 4] \cup \left\{ a_n \in \mathbb{R} \mid a_n = 1 + \frac{1}{2n}, n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$M_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < |x| < 1 \right\}.$$

b) Man berechne die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren

(i)  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \cos x \tan x,$

(ii)  $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x+1}{\sqrt{x-1}},$

(iii)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (2 - \cosh x + \sinh x).$

**Aufgabe 10:**

- a) Man untersuche die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls die Grenzwerte

$$a_n = \left( \frac{3n^2 + 1}{2n^2 - n - 7} \right)^3, \quad b_n = \sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - 2n},$$

$$c_n = \frac{\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{4n^2 + 3}}{n}, \quad d_n = \frac{2^{n+1} + 3^n}{3^{n+1} + 2^n}.$$

- b) Man untersuche die folgenden rekursiv definierten Folgen auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert:

$$e_1 = 0, \quad e_{n+1} = 1 - \frac{e_n}{3}, \quad f_1 = 3, \quad f_{n+1} = \frac{f_n^2 + 8}{6},$$

$$g_1 = 1, \quad g_{n+1} = 2g_n + 1.$$

**Aufgabe 11:**

- a) Für die Funktionen mit den Abbildungsvorschriften

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , \quad x \neq 0 \\ 2 & , \quad x_0 = 0 \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} 3 & , \quad x \leq 1 = x_0 \\ e^x & , \quad 1 < x \end{cases},$$

$$f_3(x) = \frac{x^2 - 2x - 15}{x - 5}, \quad x_0 = 5, \quad f_4(x) = \begin{cases} 2x/\pi & , \quad x \leq \pi/2 = x_0 \\ \sin x & , \quad \pi/2 < x \end{cases}$$

zeichne man die Funktionsgraphen und berechne in  $x_0$  links- und/oder rechtsseitige Grenzwerte und überprüfe damit, ob Stetigkeit oder stetige Ergänzbarkeit in  $x_0$  vorliegt oder sich eine Unstetigkeit in  $x_0$  beheben lässt.

- b) Für die Funktion  $g$  mit

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - a & , \quad x < 1 \\ \ln x & , \quad 1 \leq x \end{cases}$$

bestimme man, falls dies möglich ist,  $a \in \mathbb{R}$ , so dass  $f$  in  $x_0 = 1$  stetig wird.

**Aufgabe 12:**

Für die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit der Abbildungsvorschrift

$$f(x) = x^4 + \frac{113}{44}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - \frac{113}{22}x + 1$$

berechne man mit Hilfe des Intervallhalbierungsverfahrens Näherungen  $\tilde{x}$  für alle Nullstellen  $x^*$  bis auf einen absoluten Fehler von  $|\tilde{x} - x^*| \leq 0.001$ .

**Aufgabe 13:**

a) Man berechne die für alle  $x \in \mathbb{R}$  stetige Funktion, für die gilt

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \\ f'(x) &= -2 \quad \text{für } -\infty < x < -1, \\ f'(x) &= 2x \quad \text{für } -1 < x < 2, \\ f'(x) &= 1 \quad \text{für } 2 < x < \infty \end{aligned}$$

und zeichne die Funktion. Ist  $f$  auch differenzierbar?

b) Für die Funktion  $f$  mit

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & x < 1 \\ \ln x, & 1 \leq x \end{cases}$$

bestimme man  $a, b \in \mathbb{R}$ , sodass  $f$  in  $x_0 = 1$  stetig differenzierbar wird und zeichne  $f$ .

c) Man berechne die Tangentengleichung zu  $f(x) = \cos x$  im Punkt  $x_0 = \frac{\pi}{2}$  und fertige eine Zeichnung an.

**Aufgabe 14:**

a) Man berechne die erste Ableitung der folgenden Funktionen

$$\text{i) } f(x) = \frac{x + \sin x \cos x}{2}, \quad \text{ii) } g(x) = (2x + 1)^{\sin x}.$$

b) Man berechne die ersten beiden Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$\text{i) } h(x) = \frac{x + 2}{x^3 + 8}, \quad \text{ii) } k(x) = \ln(x^2 - 1).$$

c) Man berechne die ersten drei Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$\text{i) } u(x) = 2(1 - 3x)^2 + 4(5x - 2) - 7, \quad \text{ii) } v(x) = \sqrt[3]{(5x + 1)^2}.$$

**Aufgabe 15:**

a) Gegeben sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = x^3 - x - \frac{4}{5} + \cos x .$$

- (i) Man zeige mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass die Funktion  $f$  mindestens drei Nullstellen besitzt.
- (ii) Man zeige mit Hilfe des Satzes von Rolle, dass  $f$  höchstens drei und damit dann genau zwei Nullstellen besitzt.
- (iii) Man berechne die drei Nullstellen  $x^*$  mit Hilfe des Bisektionsverfahrens aus Aufgabe 16 bis auf einen absoluten Fehler von  $|\tilde{x} - x^*| \leq 10^{-10}$ .

b) Gegeben sei die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \\ x^2 & \text{für } 0 < x. \end{cases}$$

- (i) Man berechne  $f'(x)$  und  $f''(x)$ .
- (ii) Ist der Mittelwertsatz

$$g'(x_0) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} \quad \text{mit } x_0 \in ]a, b[$$

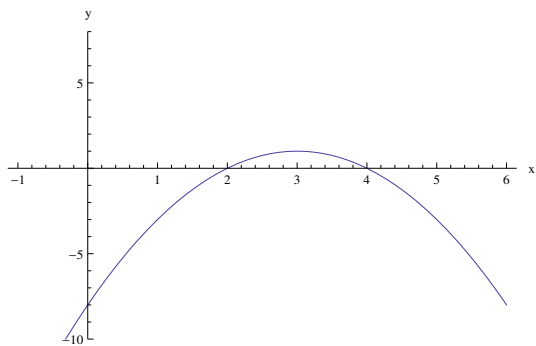
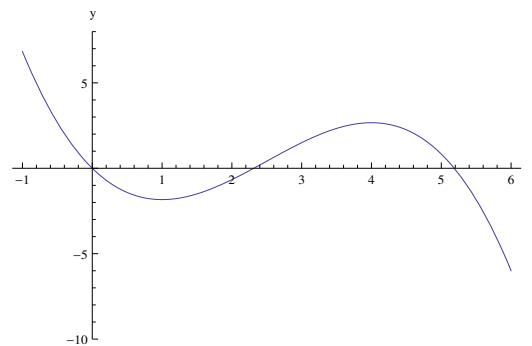
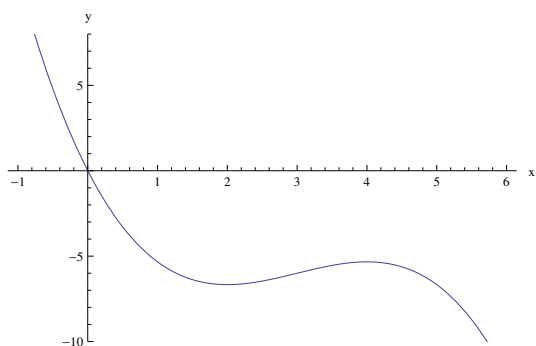
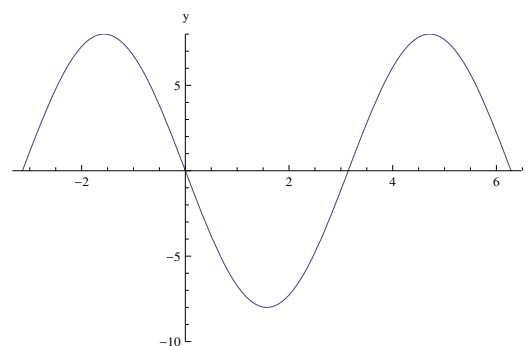
für  $a = -1$  und  $b = 1$  auf  $f(x)$  und  $f'(x)$  anwendbar?  
Man bestimme gegebenenfalls die Zwischenstelle(n)  $x_0$ .

**Aufgabe 16:**

a) Man berechne die folgenden Grenzwerte

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1}{x^2}, \quad (ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x} - \frac{6}{e^{2x} - 1}.$$

- b) Nur die Ableitung  $g'(x) = -x^2 + 6x - 8$  ist von der reellwertigen Funktion  $g$  bekannt. Man gebe die Monotoniebereiche von  $g$  an und klassifiziere alle Extremwerte. Anschließend begründe man, welcher der unten angegebenen Funktionsgraphen  $g_i$  mit dem von  $g$  übereinstimmt.

Funktion  $g_1$ Funktion  $g_2$ Funktion  $g_3$ Funktion  $g_4$ **Aufgabe 17:**

- a) Für das Polynom  $p_2(x) = 5x^2 - 16x + 6$  berechne man das Taylor-Polynom  $T_2(x)$  zum Entwicklungspunkt  $x_0 = 3$  unter Verwendung
- (i) des Horner-Schemas und
  - (ii) der Ableitungsregeln für die Koeffizienten.
- b) Man berechne das Taylor-Polynom vom Grad 3 für die durch

$$f(x) = e^{(x-\pi/2)} \sin x$$

gegebene Funktion zum Entwicklungspunkt  $x_0 = \frac{\pi}{2}$  und schätze den maximalen Approximationsfehler  $|f(x) - T_3(x)|$  für  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  mit Hilfe der Restgliedformel von Lagrange nach oben ab.



**Aufgabe 18:**

- a) Für die durch  $f(x) = (x-1)^2\sqrt{x}$  gegebene Funktion gebe man im maximalen Definitionsbereich das Monotonieverhalten an, bestimme und klassifiziere alle Extremwerte und zeichne den Funktionsgraphen von  $f$ .
- b) Man bestimme für die durch

$$g(x) = x^4 - 2x^3 + 2x$$

gegebene Funktion im Intervall  $[-4, 4]$  alle Wendepunkte und die Bereiche in denen  $g$  konvex bzw. konkav ist und zeichne den Funktionsgraphen von  $g$ .

**Aufgabe 19:**

Gegeben sei die durch  $\Phi(x) = e^{-x^2}$  definierte Funktion.

- a) Man zeige, dass  $\Phi$  genau einen Fixpunkt  $x^*$  besitzt.
- b) Man gebe ein Intervall  $D$  an, in dem die Fixpunktiteration

$$x_{k+1} = \Phi(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

für jeden Startwert  $x_0 \in D$  auf Grund des Fixpunktsatzes gegen  $x^*$  konvergiert.

Wieviele Iterationsschritte  $n$  werden nach der a priori-Abschätzung für eine Genauigkeit von  $|x_n - x^*| < 10^{-3}$  höchstens benötigt?

- c) Man berechne den Fixpunkt mit einem absoluten Fehler von  $|x_n - x^*| < 10^{-3}$ .

**Aufgabe 20:**

Gegeben sei die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = x(2 - x),$$

sowie die Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , die sich aus dem Newton-Verfahren zur Nullstellenberechnung von  $f$  mittels Startwert  $x_0 \leq 0$  ergibt.

- a) Man zeige, dass  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen eine Nullstelle  $x^*$  konvergiert und berechne diese.
- b) Man zeige, dass die Folge (lokal) quadratisch konvergiert, d.h. es gibt eine Konstante  $c \in \mathbb{R}$  mit

$$|x_{n+1} - x^*| \leq c|x_n - x^*|^2.$$