Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2018/19**
©Dr. K. Rothe

Hörsaalübungsaufgaben zu
Analysis I
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Aufgabe 1:

a) Man gebe für folgende Aussage die Wahrheitswerttafel an:

(i) $B \Leftrightarrow \neg C$,

(ii) $\neg A \Rightarrow (A \vee B)$.

b) Man zeige, dass folgende Aussage eine Tautologie ist:

$$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C) .$$

Aufgabe 2:
Man gebe die Zahlen x an, für die die folgenden Aussageformen wahr sind:

a) $A(x) := \; x^2 - 9 < 0 \;$ mit $\; x \in \mathbb{Z}$,

b) $B(x) := \; \sqrt{4x + 20} \leq 6 \;$ mit $\; x \in \mathbb{Z}$,

c) $C(x) := \; -3 \leq \ln x < 3 \;$ mit $\; x \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3:
Man beweise:
Für reelle Zahlen a, b mit $0 < a < b$ gilt die Ungleichung

$$\sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{b - a} ,$$

a) direkt und

b) indirekt.

Aufgabe 4:

a) Man beweise indirekt, dass $\sqrt{14}$ irrational ist.

b) Man entscheide und begründe ohne Verwendung eines Taschenrechners, welche der beiden Zahlen größer ist: $\sqrt{15}+\sqrt{18}$ oder $\sqrt{14}+\sqrt{19}$.

Aufgabe 5:

a) Gegeben seien die Mengen

$$A = [-2,2] \times [0,1]\,, \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leq 4\}.$$

Man stelle folgende Mengen graphisch dar: $A,\ B,\ A \cup B,\ A \cap B,\ A \setminus B$.

b) Eine Funktion heißt *gerade*, wenn $f(x) = f(-x)$ gilt, bzw. *ungerade*, wenn $f(-x) = -f(x)$ gilt. Welche der folgenden Funktionen sind gerade bzw. ungerade (man zeichne die Funktionsgraphen):

(i) $f(x) = x^2 + \sin(\ln|x|)$,

(ii) $g(x) = x^3 + \sin(2x)$.

Aufgabe 6:

a) Man entscheide, welche der folgenden Funktionen injektiv, surjektiv und bijektiv sind und zeichne die zugehörigen Funktionsgraphen:

(i) $f_1 : [-5,5] \to [-2,2]\,, \quad f_1(x) = 1 - |2 - |x||,$

(ii) $f_2 : [0,1] \to [0,2]\,, \quad f_2(x) = x^4,$

(iii) $f_3 : [0,\pi/2] \to [0,1/2]\,, \quad f_3(x) = \sin x \cos x,$

(iv) $f_4 : \mathbb{R} \to (0,\infty)\,, \quad f_4(x) = e^x.$

b) Für die Funktion f mit dem Definitionsbereich $D = (-\infty,-2]$ und der Funktionswertzuweisung $f(x) = -x^2 - 4x + 5$ gebe man den Wertebereich W an, berechne, falls dies möglich ist, die Umkehrfunktion f^{-1} und zeichne f und f^{-1}.

Aufgabe 7:
Man beweise durch vollständige Induktion

a) für $q \neq 1$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$,

b) $a_n := 11^{n+1} + 12^{2n-1}$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 133 teilbar.

Aufgabe 8:

a) Man beweise, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ folgende Ungleichung gilt

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \geq \frac{1}{n+1}.$$

b) Zur Berechnung von $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(2 + \frac{2}{k+1}\right)$ finde man eine Formel (notfalls durch Probieren) und beweise diese (ggf. durch vollständige Induktion).

Aufgabe 9:

a) Für die Binomialkoeffizienten mit $n, m \in \mathbb{N}$ und $m \leq n$ weise man folgende Beziehungen nach:

$$\binom{n}{m} \cdot \frac{n+1}{m+1} = \binom{n+1}{m+1} .$$

b) Man bestimme für die Zahlen 96135 und 84854 den ggT und das kgV

(i) unter Verwendung des Euklidischen Algorithmus,

(ii) mit Hilfe der Primfaktorzerlegung.

Aufgabe 10:

a) Man überprüfe, ob folgende Mengen nach unten bzw. oben beschränkt sind und bestimme gegebenenfalls Infimum und Supremum

(i) $M_1 = [-2,8] \cap]5,15]$,

(ii) $M_2 =]-\infty, 2] \cup \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{5n}{2n+1} \, , \; n \in \mathbb{N} \right\}$.

b) Man zeige, dass die rekursiv definierte Folge

$$x_0 = a \, , \quad x_1 = b \, , \quad x_{n+1} = x_n + 6x_{n-1}$$

folgende explizite Darstellung besitzt:

$$x_n = \frac{(2 \cdot 3^n + 3 \cdot (-2)^n)\, a + (3^n - (-2)^n)\, b}{5} \, .$$

Hinweis: Für den Beweis eignet sich die vollständige Induktion.

Aufgabe 11:
Man untersuche die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls die Grenzwerte

$$a_n = \sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2-2n} \, , \qquad b_n = \left(\frac{3n^2+1}{2n^2-n-7} \right)^3 \, ,$$

$$c_n = \frac{\sqrt{n^2+2} - \sqrt{4n^2+3}}{n} \, , \qquad d_n = \frac{2^{n+1}+3^n}{3^{n+1}+2^n} \, ,$$

Aufgabe 12:
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x(2-x) \, ,$$

sowie die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die sich aus dem Newton-Verfahren zur Nullstellenberechnung von f mittels Startwert $x_0 \le 0$ ergibt.

a) Man zeige, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine Nullstelle x^* konvergiert und berechne diese.

b) Man zeige, dass die Folge (lokal) quadratisch konvergiert, d.h. es gibt eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit

$$|x_{n+1} - x^*| \le c|x_n - x^*|^2 \, .$$

Aufgabe 13:
Man untersuche die folgenden rekursiv definierten Folgen auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert:

a) $a_1 = 0\,, \quad a_{n+1} = 1 - \dfrac{a_n}{3}\,,$

b) $b_1 = \dfrac{1}{2},\ b_{n+1} = \dfrac{b_n^2 + 3}{4}\,,$

c) $c_1 = 1,\ c_{n+1} = 2c_n + 1\,,$

d) $d_1 = 3\,, \quad d_{n+1} = \sqrt{3d_n - 2}\,.$

Aufgabe 14:
Man untersuche die Konvergenz folgender Folgen

a) $\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} n^2/2^n \\ 1 + 1/n \end{pmatrix}\,, \quad n \in \mathbb{N},$

b) $\boldsymbol{a}_{n+1} := \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_n - y_n)/\sqrt{3} \\ (x_n + y_n)/\sqrt{3} \end{pmatrix}\,, \quad n \in \mathbb{N}$ und $\boldsymbol{a}_1 \in \mathbb{R}^2$

Tipp: Eine geeignete Norm erleichtert das Leben.

Aufgabe 15:

a) Man stelle die reelle Zahl $x = 3.1\overline{415}$ beispielsweise unter Verwendung der Summenformel der geometrischen Reihe als Bruch dar.

b) Man berechne den Wert der folgenden Reihen, falls sie konvergieren:

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^{n+1}},$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{2^n},$

(iii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{n-1} - \frac{2}{n}\right),$ (iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+1}{2n-1}.$

Aufgabe 16:

a) Man zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2 \cdot (-1)^n}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

alterniert und dass $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ für $b_n := \dfrac{2 \cdot (-1)^n}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ gilt.
Warum ist das Leibniz-Kriterium nicht anwendbar?

b) Gegeben sei die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n+2} \cdot \frac{n+1}{n+3} \right)$.

(i) Man zeige, dass die Reihe konvergiert.

(ii) Ab welchem Index k unterscheiden sich die Partialsummen

$$S_k = \sum_{n=0}^{k} \left(\frac{(-1)^n}{n+2} \cdot \frac{n+1}{n+3} \right)$$

vom Grenzwert S der Reihe um weniger als 0.001?

(iii) Wie lauten die ersten drei Nachkommastellen des Grenzwertes S?

Aufgabe 17:
Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n \right)^n$,

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$,

c) $\displaystyle\frac{1}{16} + \frac{3}{32} + \frac{9}{64} + \frac{27}{128} + \frac{81}{256} + \cdots$,

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^2+1}$.

Aufgabe 18:

a) Man bestimme für folgende Mengen die Menge aller Häufungspunkte M' und aller inneren Punkte M^0, und kläre, ob die Menge abgeschlossen oder offen ist.

$$\begin{aligned} M_1 &= (]-3,5] \cap]2,8]) \cup \left\{ a_n \in \mathbb{R} \mid a_n = \frac{1}{n} \ , \ n \in \mathbb{N} \right\} \ , \\ M_2 &= \{0\} \cup [3,4] \cup \left\{ a_n \in \mathbb{R} \mid a_n = 1 + \frac{1}{2n} \ , \ n \in \mathbb{N} \right\} \ , \\ M_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ \middle| \ 0 < y < |x| < 1 \right\} \ . \end{aligned}$$

b) Man berechne die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren

(i) $\lim\limits_{x \to \pi/2} \cos x \tan x \ ,$

(ii) $\lim\limits_{x \to 1+} \dfrac{x+1}{\sqrt{x-1}} \ .$

Aufgabe 19:

a) Man zeichne die durch

$$f(x) = x \cos^2\left(\frac{1}{x}\right)$$

gegebene Funktion und untersuche mit Hilfe des ε-δ-Kriteriums, ob sie in $x_0 = 0$ durch $f(0) = 0$ stetig ergänzt werden kann.

b) Man zeichne die durch

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für} \quad x \geq 0 \\ e^x & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}$$

gegebene Funktion und überprüfe, ob sie in $x_0 = 0$ stetig ist.

Aufgabe 20:

a) Man berechne die für alle $x \in \mathbb{R}$ stetige Funktion, für die gilt

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 && , \\ f'(x) &= -2 && \text{für} \quad -\infty < x < -1 \ , \\ f'(x) &= 2x && \text{für} \quad -1 < x < 2 \ , \\ f'(x) &= 1 && \text{für} \quad 2 < x < \infty \end{aligned}$$

und zeichne die Funktion. Ist f auch differenzierbar?

b) Für die Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} ax + b\,, & x < 1 \\ \ln x\,, & 1 \leq x \end{cases}$$

bestimme man $a, b \in \mathbb{R}$, sodass f in $x_0 = 1$ stetig differenzierbar wird und zeichne f.

c) Man berechne die Tangentengleichung zu $f(x) = \cos x$ im Punkt $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ und fertige eine Zeichnung an.

Aufgabe 21:

a) Man berechne die erste Ableitung der folgenden Funktionen

$$\text{i) } f(x) = (2x+1)^{\sin x}\,, \qquad \text{ii) } g(x) = \frac{x + \sin x \cos x}{2}\,.$$

b) Man berechne die ersten beiden Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$\text{i) } h(x) = \frac{x+2}{x^3+8}\,, \qquad \text{ii) } k(x) = \ln(x^2-1)\,.$$

c) Man berechne die ersten drei Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$\text{i) } u(x) = 2(1-3x)^2 + 4(5x-2) - 7\,, \qquad \text{ii) } v(x) = \sqrt[3]{(5x+1)^2}\,.$$

Aufgabe 22:

Gegeben sei die durch $f(x) = \cos(x^2 - \pi^2)$ definierte Funktion.

a) Man berechne für f die Taylor-Polynome vom Grad 1 und 2 zum Entwicklungspunkt $x_0 = \pi$.

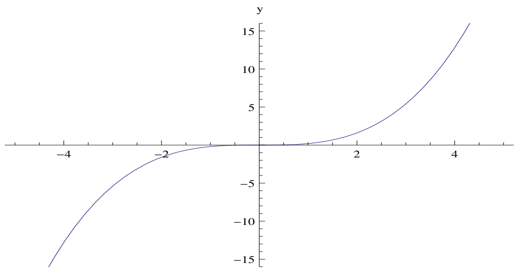
b) Man schätze die Approximationsfehler $|f(3) - T_i\,(3;\pi)|\,,\ i = 1, 2$ mit Hilfe der Restgliedformel von Lagrange nach oben ab.

Aufgabe 23:

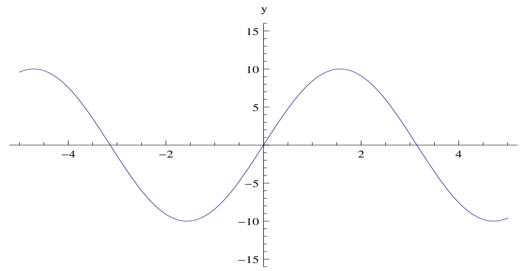
a) Man berechne die folgenden Grenzwerte

$$\text{(i) } \lim_{x\to 0} \frac{e^{(x^2)} - 1}{1 - \cos x}\,, \quad \text{(ii) } \lim_{x\to\infty} x \ln\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)\,.$$

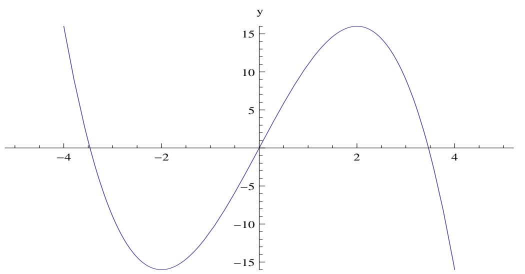
b) Nur die Ableitung $g'(x) = 3x^2 - 9$ ist von der reellwertigen Funktion g bekannt. Man gebe die Monotoniebereiche von g an und klassifiziere alle Extremwerte. Anschließend begründe man, welcher der unten angegebenen Funktionsgraphen g_i mit dem von g übereinstimmt.



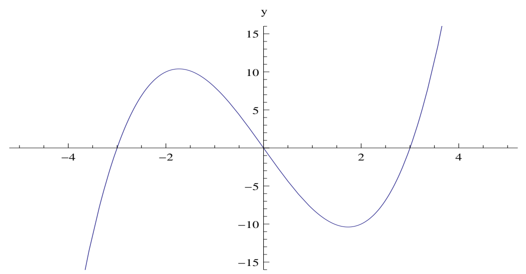
Funktion g_1



Funktion g_2



Funktion g_3



Funktion g_4

Aufgabe 24:
Man diskutiere die reellwertige Funktion

$$f(x) = \frac{11x - x^3}{x^2 - 9} \,.$$

Dazu untersuche man im Einzelnen:

a) Definitionsbereich,

b) Symmetrien,

c) Pole,

d) Verhalten im Unendlichen und Asymptoten,

e) Nullstellen,

f) lokale Extrema und Monotonie,

g) Wendepunkte und Konvexität.

h) Abschließend skizziere man den Graphen von $f(x)$.