Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2008/09**

Anleitungsaufgaben zu

Analysis I

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Die in Klammern angegebenen Nummern beziehen sich auf den Aufgabenband 3 von Oberle, Rothe, Sonar

Aufgabe 1:

a) Man gebe für folgende Aussage die Wahrheitswerttafel an:

$$A \wedge \neg B\,.$$

b) Man zeige, dass folgende Aussagen Tautologien sind:

(i) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$,

(ii) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$.

Aufgabe 2: (vgl. 1.1.3 c))

a) Man beweise:
Für reelle Zahlen a, b mit $0 < a < b$ gilt die Ungleichung

$$\sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{b-a}\,,$$

(i) direkt und

(ii) indirekt.

b) Man beweise indirekt die Behauptung B: $\sqrt{23}$ ist irrational.

Aufgabe 3:
Man berechne die Lösungsmengen von

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4 \leq 0\}$,

b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 4 \leq 0\}$,

c) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 4 \leq 0\}$,

d) $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq e^x \leq 27\}$

und bestimme $A \cup D$, $D \backslash C$ sowie $B \cap D$.

Aufgabe 4:
Gegeben seien die Mengen

a) $A = [-2, 2] \times [0, 1]$,

b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + 4y^2 \leq 4\}$.

Man stelle folgende Mengen graphisch dar: $A,\ B,\ A \cup B,\ A \cap B,\ A \setminus B$.

Aufgabe 5:

a) Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$ für die gilt: $x^2 \leq |3 - 2|x||$.

b) Man entscheide, welche der folgenden Funktionen injektiv, surjektiv und bijektiv sind und zeichne die zugehörigen Funktionsgraphen:

(i) $f_1 : \ [-4, 4] \to [0, 5]\,, \quad f_1(x) = |3 - 2|x||$,

(ii) $f_2 : \ [1, \infty[\to [0, \infty[\,, \quad f_2(x) = \ln x$,

(iii) $f_3 : \ [-\pi/4, \pi/4] \to [-1, 1]\,, \quad f_3(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$,

(iv) $f_4 :]-1, 1[\to \ [-1, 1]\,, \quad f_4(x) = x^3$.

c) Welche der folgenden Funktionen sind gerade bzw. ungerade (man zeichne die Funktionsgraphen):

(i) $f_5(x) = x^2 + \sin(\ln|x|)$,

(ii) $f_6(x) = (x - 2)^3 + 4$.

Aufgabe 6: (vgl. 2.1.3)
Man beweise die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n + 1)! - 1$,

b) die Bernoullische Ungleichung $(1 + x)^n \geq 1 + nx \quad (\forall x \geq -1, n \in \mathbb{N})$,

c) $a_n = 5^n - 1$ ist durch 4 teilbar.

Aufgabe 7:

a) Man entscheide ohne Zuhilfenahme eines (Taschen-)Rechners, welche der beiden Zahlen $\sqrt{7}+\sqrt{17}$ und $\sqrt{11}+\sqrt{13}$ größer ist (Hinweis: indirekter Beweis).

b) Zur Berechnung von

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k^2}{k^2-1}$$

finde man eine Formel (notfalls durch Probieren) und beweise diese (ggf. durch vollständige Induktion).

Aufgabe 8: (vgl. 2.1.1)

a) Für die Zahlen 2210 und 2145 bestimme man ggT und kgV.

b) Für die Binomialkoeffizienten weise man folgende Beziehungen nach:

(i) $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} \cdot \frac{n-m}{m+1} = \begin{pmatrix} n \\ m+1 \end{pmatrix}$ mit $n, m \in \mathbb{N}$,

(ii) $\sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j} \begin{pmatrix} j \\ k \end{pmatrix} = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ für festes $k \in \mathbb{N}$ und $n \geq k$.

Aufgabe 9: (vgl. 8.2.1)
Man untersuche die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls die Grenzwerte

$$\begin{aligned}
a_n &= \sqrt{n+4}-\sqrt{n+2}, & b_n &= \left(\frac{5n}{2n+1}\right)^4, \\
c_n &= \frac{n^2-1}{n+3}-\frac{n^3+1}{n^2+1}, & d_n &= \left(1-\frac{1}{3n}\right)^{7n}, \\
e_n &= \frac{2^n-5^{n+1}}{3^{n+1}+5^n}, & f_n &= \frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2n} \quad (\in \mathbb{C}) .
\end{aligned}$$

Aufgabe 10: (vgl. 8.2.3)
Man untersuche die folgenden rekursiv definierten Folgen auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls die Grenzwerte:

a) $a_1 := 0, \quad a_{n+1} := \frac{1}{4}(a_n - 3), \quad n \geq 1,$

b) $b_1 = 5\,, \quad b_{n+1} = \sqrt{b_n} + 6, \quad n \geq 1,$

c) $c_1 := 2, \quad c_{n+1} := \frac{3}{4-c_n}, \quad n \geq 1,$

d) $d_1 := 0, \quad d_{n+1} := 3d_n + 2, \quad n \geq 1.$

Aufgabe 11:
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 - x - 6,$ sowie die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die sich aus dem Newton-Verfahren zur Nullstellenberechnung von f mittels Startwert $x_0 \geq 3$ ergibt.

a) Man zeige, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine Nullstelle x^* konvergiert und berechne diese.

b) Man zeige, dass die Folge (lokal) quadratisch konvergiert, d.h. es gibt eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit
$$|x_{n+1} - x^*| \leq c|x_n - x^*|^2 \, .$$

Aufgabe 12:
Man zeige, dass die rekursiv definierte Folge

$$x_0 = a \, , \quad x_1 = b \, , \quad x_{n+1} = x_n + 6x_{n-1}$$

folgende explizite Darstellung besitzt:

$$x_n = \frac{(2 \cdot 3^n + 3 \cdot (-2)^n) \, a + (3^n - (-2)^n) \, b}{5} \, .$$

Hinweis: Für den Beweis eignet sich die vollständige Induktion.

Aufgabe 13:
Man untersuche die Konvergenz folgender Folgen

a) $\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} n^2/2^n \\ 1 + 1/n \end{pmatrix} \, , \quad n \in \mathbb{N},$

b) $\boldsymbol{a}_{n+1} := \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_n - y_n)/\sqrt{3} \\ (x_n + y_n)/\sqrt{3} \end{pmatrix} \, , \quad n \in \mathbb{N}$ und $\boldsymbol{a}_1 \in \mathbb{R}^2$

Tipp: Eine geeignete Norm erleichtert das Leben.

Aufgabe 14:
Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$,

b) $\displaystyle\frac{3}{5} + \frac{6}{9} + \frac{9}{13} + \frac{12}{17} + \frac{15}{21} + \cdots$,

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2 \cdot 6^n}{5^n}$,

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot 4^{n+1}}{5^{n+1}}$,

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n \cdot 7^{n+2}}{36^{n+1}}$.

Aufgabe 15:

a) Man zeige, dass die Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n} \right)$$
alterniert und dass für $b_n := \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{(-1)^n}{n}$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Warum ist das Leibniz-Kriterium nicht anwendbar?

b) Warum konvergiert die Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{(n+1)^2} \ ?$$
Ab welchem Index N unterscheiden sich die Partialsummen s_N vom Grenzwert der Reihe um weniger als 10^{-2}?

Aufgabe 16: (vgl. 9.1.1)

a) Man gebe für die folgenden Mengen D_k die Menge aller Häufungspunkte D_k' und die Menge aller inneren Punkte D_k^0 an:

$$D_1 \;=\; \left\{ \frac{n+1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} \cup [0,1]\,, \quad D_2 \;=\;]-\infty, 0[\,, \quad D_3 \;=\; [1,2[\, \times [0,\infty[\,.$$

Welche der Mengen D_k sind abgeschlossen bzw. offen?

b) Man berechne die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$,

(ii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{|x|+|y|}$.

c) Man zeige, dass der Grenzwert

$$\lim_{x\to 0+} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

nicht existiert und berechne alle Häufungspunkte.

Aufgabe 17: (vgl. 9.1.5)
Man untersuche mit der ε-δ-Charakterisierung die folgenden reellen Funktionen auf Stetigkeit im Punkt x_0:

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{für} \quad x_0 = 0 \\ 0 & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{für} \quad x \geq 1 \\ x-1 & \text{für} \quad x < 1 \end{cases} \qquad \text{mit} \qquad x_0 = 1$

c) $h(x) = \begin{cases} x \cdot \cos\frac{1}{x} & \text{für} \quad x > 0 \\ x & \text{für} \quad x \leq 0 \end{cases} \qquad \text{mit} \qquad x_0 = 0 \quad .$

Aufgabe 18: (vgl. 9.2.2)

a) Gesucht ist eine für alle $x \in \mathbb{R}$ stetige Funktion, für die gilt:

$$\begin{array}{rll} f(0) = -1 & , & \\ f'(x) = -1 & \text{für} & -\infty < x < -3\,, \\ f'(x) = 0 & \text{für} & -3 < x < 1\,, \\ f'(x) = 2 & \text{für} & 1 < x < \infty\,. \end{array}$$

b) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{für} \quad x \notin [-1, 1], \\ a\sin(\pi x) + b\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) & \text{für} \quad x \in [-1, 1]\,. \end{cases}$$

Man bestimme die reellen Konstanten a und b so, dass f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar wird.

Aufgabe 19:
Man stelle für die folgenden Funktionen im Punkte x_0 die Gleichung der Tangente auf:

a) $f(x) \;=\; \tan x \quad \text{mit} \quad x_0 = \dfrac{\pi}{4}\,,$

b) $g(x) \;=\; \begin{vmatrix} x & 1 \\ -1 & x-2 \end{vmatrix} \quad \text{mit} \quad x_0 = 0\,,$

c) $\boldsymbol{h}(x) \;=\; \begin{pmatrix} x - 2\sin x \\ 1 - 2\cos x \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad x_0 = \dfrac{5\pi}{3} \quad .$

Aufgabe 20:

a) Man berechne die Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$\text{i) } f(x) = 10^{x^2-1}\,, \qquad \text{ii) } g(x) = -x + \tan x\,.$$

b) Man berechne die ersten beiden Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$\text{i) } h(x) = \tan\sqrt{x}\,, \qquad \text{ii) } k(x) = \ln(x^3 + 2x + 1)\,.$$

c) Man berechne die ersten drei Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$\text{i) } u(x) = \cosh^3 x - \sinh^2 x \cosh x\,, \qquad \text{ii) } v(x) = \sqrt[3]{x^4 - 5}\,.$$

Aufgabe 21:

a) Gegeben sie die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{1}{4}(4x+3)(2x-1) - \frac{1}{2}e^x \,. \end{aligned}$$

(i) Man zeige mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass die Funktion mindestens drei Nullstellen besitzt und

(ii) mit Hilfe des Satzes von Rolle, dass sie höchstens drei und damit dann genau zwei Nullstellen besitzt.

b) Man berechne die folgenden Grenzwerte

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \arctan(x)}{x^3}$,

(ii) $\lim\limits_{x\to 0+} \ln(x)\sinh(x)$.

Aufgabe 22:
Gegeben sei die Funktion f mit

$$f(x) = (1+2x)^{-1/2} \text{ und } x > -\frac{1}{2} \,.$$

a) Man gebe eine allgemeine Darstellung für die Ableitungen $f^{(k)}(x)$ mit $k \in \mathbb{N}$ an.

b) Wie lautet die Taylor-Entwicklung von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$?

c) Zur Approximation von $f\left(\frac{1}{4}\right)$ wird die Taylor-Entwicklung nach dem Term vierter Ordnung abgebrochen. Man gebe eine Abschätzung für den absoluten Fehler an und berechne zum Vergleich $f\left(\frac{1}{4}\right)$ und $T_4\left(\frac{1}{4};0\right)$.

Aufgabe 23: (aus dem Vordiplom Analysis I, WS99/00)
Gegeben sei die durch

$$f(x) = \ln\left|x + \frac{1}{x}\right|$$

definierte reellwertige Funktion.

Man diskutiere die Funktion f. Dazu bestimme man im Einzelnen: Definitionsbereich, Symmetrie, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, Verhalten im Unendlichen, Nullstellen, Monotonieverhalten, Extrema, Konvexität und Wendepunkte. Abschließend skizziere man den Graphen von f.

Aufgabe 24:
Man diskutiere die reellwertige Funktion $f(x) = x + \dfrac{x}{|x| - 2}$.

Dazu untersuche man im Einzelnen:

a) Definitionsbereich,

b) Symmetrien,

c) Pole,

d) Verhalten im Unendlichen und Asymptoten,

e) Nullstellen,

f) Extrema und Monotonie,

g) Wendepunkte und Konvexität.

h) Abschließend zeichne man den Graphen von $f(x)$.