Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2006/07**
©Dr. K. Rothe

Anleitungsaufgaben zu

Analysis I

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Die in Klammern angegebenen Nummern beziehen sich auf den Aufgabenband 3 von Oberle, Rothe, Sonar

Aufgabe 1:

a) Man zeige, dass folgende Aussagen Tautologien sind:

(i) $\neg(A \wedge \neg A)$,

(ii) $\neg(A \wedge B) \Longleftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$.

b) Man gebe für folgende Aussageform die Wahrheitswerttafel an:

$$(A \Longrightarrow B) \wedge (B \vee C) .$$

Aufgabe 2: (vgl. 1.1.3 c) + 1.1.4 a))

a) Man beweise:
Für reelle Zahlen a, b mit $0 < a < b$ gilt die Ungleichung

$$\sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{b-a} \,,$$

(i) direkt und

(ii) indirekt.

b) Man beweise indirekt, dass für ungerade Zahlen a, b und c

$$ax^2 + bx + c = 0$$

keine rationale Lösung x besitzt.

Aufgabe 3:

Man berechne die Lösungsmengen von

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4 \leq 0\}$,

b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 4 \leq 0\}$,

c) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 4 \leq 0\}$,

d) $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq e^x \leq 27\}$

und bestimme $A \cup D$, $D \backslash C$ sowie $B \cap D$.

Aufgabe 4: (vgl. 1.2.2 + 1.2.4)
In der x-y-Ebene skizziere man die folgenden Mengen

a) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \quad |y-2| \leq x \ \wedge \ |y-2| < 1 \right\}$,

b) $B = \bigcup\limits_{j=0}^{3} \, [\, 2j, 2j+1 \,[\ \times \ \bigcup\limits_{j=1}^{4} \,]\, 2(j-1), 2j-1 \,]$.

Aufgabe 5:

a) Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|4 - |x|| \leq x$.

b) Man bestimmme die Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ für die gilt: $|y| \leq \sqrt{|4 - x^2|}$.

Aufgabe 6: (vgl. 2.1.3)

Man beweise die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion:

a) $\sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$,

b) die Bernoullische Ungleichung $(1+x)^n \geq 1 + nx \quad (\forall x \geq -1, n \in \mathbb{N})$,

c) $a_n = 5^n - 1$ ist durch 4 teilbar.

Aufgabe 7:

a) Man entscheide und begründe ohne Verwendung eines Taschenrechners, welche der beiden Zahlen $\sqrt{7} + \sqrt{11}$ und $\sqrt{8} + \sqrt{10}$ größer ist.

b) Zur Berechnung von

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{2}{k}\right)$$

finde man eine Formel (notfalls durch Probieren) und beweise diese (ggf. durch vollständige Induktion).

Aufgabe 8: (vgl. 2.1.1)

a) Für die Zahlen 2210 und 2145 bestimme man ggT und kgV.

b) Für die Binomialkoeffizienten weise man folgende Beziehungen nach:

(i) $\binom{n}{m} \cdot \frac{n-m}{m+1} = \binom{n}{m+1}$ mit $n, m \in \mathbb{N}$,

(ii) $\sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j} \binom{j}{k} = \frac{1}{k} \binom{n}{k}$ für festes $k \in \mathbb{N}$ und $n \geq k$.

Aufgabe 9: (vgl. 8.2.1)

Man untersuche die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls die Grenzwerte

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n+4} - \sqrt{n+2}, & b_n &= \left(\frac{5n}{2n+1}\right)^4, \\ c_n &= \frac{n^2-1}{n+3} - \frac{n^3+1}{n^2+1}, & d_n &= \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^{7n}, \\ e_n &= \frac{2^n - 5^{n+1}}{3^{n+1} + 5^n}, & f_n &= \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2n} \quad (\in \mathbb{C}) . \end{aligned}$$

Aufgabe 10: (vgl. 8.2.3)

Man untersuche die folgenden rekursiv definierten Folgen auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls die Grenzwerte:

a) $a_1 := 0, \quad a_{n+1} := \frac{1}{4}(a_n - 3), \quad n \geq 1,$

b) $b_1 = 5\,, \quad b_{n+1} = \sqrt{b_n} + 6, \quad n \geq 1,$

c) $c_1 := 2, \quad c_{n+1} := \frac{3}{4 - c_n}, \quad n \geq 1,$

d) $d_1 := 0, \quad d_{n+1} := 3d_n + 2, \quad n \geq 1.$

Aufgabe 11:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x(2 - x) ,$$

sowie die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die sich aus dem Newton-Verfahren zur Nullstellenberechnung von f mittels Startwert $x_0 \leq 0$ ergibt.

a) Man zeige, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine Nullstelle x^* konvergiert und berechne diese.

b) Man zeige, dass die Folge (lokal) quadratisch konvergiert, d.h. es gibt eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit

$$|x_{n+1} - x^*| \leq c|x_n - x^*|^2 .$$

Aufgabe 12:

Man zeige, dass die rekursiv definierte Folge

$$x_0 = a\,, \quad x_1 = b\,, \quad x_{n+1} = \frac{1}{3}\,(16x_n - 5x_{n-1})$$

folgende explizite Darstellung besitzt:

$$x_n = \frac{15\,(1 - 15^{n-1})\,a + 3\,(15^n - 1)\,b}{14 \cdot 3^n} .$$

Hinweis: Für den Beweis eignet sich die vollständige Induktion.

Aufgabe 13:

Man untersuche die Konvergenz folgender Folgen

a) $\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} n^2/2^n \\ 1 + 1/n \end{pmatrix} , \quad n \in \mathbb{N},$

b) $\boldsymbol{a}_{n+1} := \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_n - y_n)/\sqrt{3} \\ (x_n + y_n)/\sqrt{3} \end{pmatrix} , \quad n \in \mathbb{N}$ und $\boldsymbol{a}_1 \in \mathbb{R}^2$

Tipp: Eine geeignete Norm erleichtert das Leben.

Aufgabe 14: (vgl. 8.4.1)

Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}$,

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2 + k + 1}$,

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^3}{4^k}$,

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-9k - 10}{10k}\right)^k$.

Aufgabe 15:

a) Man zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+3\cdot(-1)^n}{n+1}$$

alterniert und dass für $b_n := \dfrac{2+3\cdot(-1)^n}{n+1}$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Warum ist das Leibniz-Kriterium nicht anwendbar?

b) Warum konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n+2} \cdot \frac{n+1}{n+3} \right) ?$$

Ab welchem Index N unterscheiden sich die Partialsummen s_N vom Grenzwert der Reihe um weniger als 0.003?

Aufgabe 16: (vgl. 9.1.1)

a) Man gebe für die folgenden Mengen D_k die Menge aller Häufungspunkte D_k' und die Menge aller inneren Punkte D_k^0 an:

$$D_1 = \left\{ \frac{n+1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} \cup [0,1]\,, \quad D_2 = \,]-\infty, 0[\,, \quad D_3 = [1,2[\times [0,\infty[\,.$$

Welche der Mengen D_k sind abgeschlossen bzw. offen?

b) Man berechne die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren

(i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1}$,

(ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{|x|+|y|}$.

c) Man zeige, dass der Grenzwert

$$\lim_{x\to 0+} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

nicht existiert und berechne alle Häufungspunkte.

Aufgabe 17: (vgl. 9.1.5)

Man untersuche mit der ε-δ-Charakterisierung die folgenden reellen Funktionen auf Stetigkeit im Punkt x_0:

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x > 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{für} \quad x_0 = 0 \\ 0 & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{für} \quad x \geq 1 \\ x-1 & \text{für} \quad x < 1 \end{cases} \qquad \text{mit} \qquad x_0 = 1$

c) $h(x) = \begin{cases} x \cdot \cos \dfrac{1}{x} & \text{für} \quad x > 0 \\ x & \text{für} \quad x \leq 0 \end{cases} \qquad \text{mit} \qquad x_0 = 0 \quad .$

Aufgabe 18: (vgl. 9.2.2)

a) Gesucht ist eine für alle $x \in \mathbb{R}$ stetige Funktion, für die gilt:

$$\begin{aligned} f(0) &= -1 & , \\ f'(x) &= -1 & \text{für} \quad -\infty < x < -3\,, \\ f'(x) &= 0 & \text{für} \quad -3 < x < 1\,, \\ f'(x) &= 2 & \text{für} \quad 1 < x < \infty\,. \end{aligned}$$

b) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{für} \quad x \notin [-1,1], \\ a\sin(\pi x) + b\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) & \text{für} \quad x \in [-1,1]\,. \end{cases}$$

Man bestimme die reellen Konstanten a und b so, dass f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar wird.

Aufgabe 19:

Man stelle für die folgenden Funktionen im Punkte x_0 die Gleichung der Tangente auf:

a) $f(x) = \tan x \qquad \text{mit} \qquad x_0 = \dfrac{\pi}{4}\,,$

b) $g(x) = \begin{vmatrix} x & 1 \\ -1 & x-2 \end{vmatrix} \qquad \text{mit} \qquad x_0 = 0\,,$

c) $\boldsymbol{h}(x) = \begin{pmatrix} x - 2\sin x \\ 1 - 2\cos x \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad x_0 = \dfrac{5\pi}{3} \quad .$

Aufgabe 20:

a) Man berechne die Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$\text{i) } f(x) = 10^{x^2-1}\,, \qquad \text{ii) } g(x) = -x + \tan x\,.$$

b) Man berechne die ersten beiden Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$\text{i) } h(x) = \tan\sqrt{x}\,, \qquad \text{ii) } k(x) = \ln(x^3 + 2x + 1)\,.$$

c) Man berechne die ersten drei Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$\text{i) } u(x) = \cosh^3 x - \sinh^2 x \cosh x\,, \qquad \text{ii) } v(x) = \sqrt[3]{x^4 - 5}\,.$$

Aufgabe 21: (vgl. 10.1.1)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für} \quad x \geq 0 \\ -x^2 & \text{für} \quad x < 0 \end{cases} .$$

Ist der Mittelwertsatz

$$g'(x_0) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} \quad \text{mit} \quad x_0 \in]a, b[$$

für $a = -1$ und $b = 1$ auf f anwendbar? Man bestimme gegebenenfalls die Zwischenstelle(n) x_0.

Aufgabe 22:

a) Man berechne die folgenden Grenzwerte

(i) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{3x^2}{2 + x/2 - \sqrt{4 + 2x}}$,

(ii) $\displaystyle\lim_{x \to \pi/2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \tan x$.

b) Gegeben sei die durch $f(x) = \cos(x^2 - \pi^2)$ definierte Funktion.

(i) Man berechne das Taylorpolynom $T_2(x; x_0)$ von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = \pi$.

(ii) Man schätze den Fehler zwischen $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ und $T_2\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ nach oben ab.

Aufgabe 23:

Gegeben sei die durch

$$f(x) = \exp\left(x + \frac{9}{x - 4}\right)$$

definierte reellwertige Funktion. Dabei bezeichnet exp die e-Funktion, d.h. $\exp(x) = e^x$.

a) Man gebe den maximalen Definitionsbereich D von f an.

b) Wie viele Nullstellen besitzt f.

c) Man berechne $\displaystyle\lim_{x \to 4+} f(x)$ und $\displaystyle\lim_{x \to 4-} f(x)$.

d) Man untersuche das Verhalten von f im Unendlichen.

e) Man untersuche das Monotonieverhalten von f im Definitionsbereich D.

f) Man bestimme alle lokalen Extrema von f.

g) Wie lautet das Taylor-Polynom $T_1(x; x_0)$ von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = 13$.

Aufgabe 24: (vgl. 10.3.3)

Man diskutiere die reellwertige Funktion

$$f(x) = \frac{7x + 5}{x^2 + 4x + 3} \, .$$