

Variationsrechnung und Optimale Steuerung

Skript zur Vorlesung
Hans Joachim Oberle

Inhalt

1. Einführung
2. Die Euler–Lagrange Gleichungen
3. Klassische Variationsaufgaben
4. Das Lemma von du Bois-Reymond
5. Hinreichende Bedingungen, Konvexität
6. Allgemeine Variationen
7. Nichtglatte Extremalen, Aufg. der optimalen Steuerung
8. Restringierte Optimierungsaufgaben
9. Klassische restringierte Variationsaufgaben
10. Mehrpunkt-Randwertaufgaben, BNDSCO
11. Die Legendre Bedingung
12. Legendre-Bedingung für Aufg. der optimalen Steuerung
13. Aufgaben mit kompaktem Steuerbereich
14. Das Minimumprinzip
15. Hinreichende Bedingungen

1. Einführung

In dieser Vorlesung werden die grundlegenden Begriffe und Methoden der klassischen Variationsrechnung und der neueren Theorie und Numerik der optimalen Steuerungen behandelt, wobei die Optimalsteuerungstheorie gerade ihre Wurzeln in der klassischen Variationsrechnung hat.

Die Variationsrechnung wurde im 18. Jahrhundert von JOHANN UND JAKOB BERNOULLI, von LEONHARD EULER, JOSEPH LAGRANGE, ADRIEN-MARIE LEGENDRE begründet und ist später von CARL WEIERSTRASS, DAVID HILBERT, CONSTANTINE CARATHÉODORY und anderen weiter entwickelt worden. Den entscheidenden Anstoß gab JOHANN BERNOULLI im Jahr 1696 mit seinem berühmten *Problem der Brachistochrone*. Damit ist die Aufgabe gemeint, eine Kurve kürzester Fallzeit zu bestimmen. Bernoulli veröffentlichte diese Aufgabe in der Zeitschrift *acta eruditorum* und rief dabei die damalige gelehrte Welt zur Lösung dieser neuen Aufgabenstellung emphatisch auf. Die Variationsrechnung ist also nahezu so alt wie die Differential- und Integralrechnung selbst; die Entwicklungen dieser beiden Gebiete sind eng miteinander verknüpft und erfolgten weitgehend parallel.

Ein Grund für das frühe intensive Interesse an Variationsproblemen liegt darin, dass sich viele physikalische Fragestellungen durch so genannte *Extremalprinzipien* beschreiben lassen. So nimmt beispielsweise ein mechanisches System einen Zustand an, der die potentielle Energie minimiert. Ein anderes Beispiel ist als *Fermatsches Prinzip* bekannt: Licht durchläuft zwischen zwei vorgegebenen Punkten eine Bahn, für die die Durchlaufzeit (zumindest lokal) minimiert wird. Eine Darstellung der Geschichte der Variationsrechnung findet man in GOLDSTEIN (1980).

In den 60er Jahren des letzten Jahrhunderts begründeten die Schulen um HESTENES und PONTRYAGIN die Theorie der optimalen Steuerung. Grob gesagt handelt es sich hierbei um Variationsaufgaben mit Nebenbedingungen in Form von Differentialgleichungen. Die gesuchten Funktionen werden dabei in zwei Klassen unterteilt, nämlich in die so genannten *Steuervariablen*, die zumeist innerhalb gewisser Schranken frei wählbar sind, und in die *Zustandsvariablen*, die durch gewisse Differentialgleichungen, die so genannten Zustandsgleichungen, festgelegt werden. Die historische Entwicklung der Theorie optimaler Steuerungen wird in PLAIL (1998) beschrieben.

Die ersten Anwendungen der optimalen Steuerung sind zunächst mit Methoden der Variationsrechnung gelöst worden. Ein frühes Beispiel aus dem Bereich der Raumfahrt ist das bekannte *Problem von GODDARD* (1919). Eine frühe Anwendung aus den Wirtschaftswissenschaften geht auf RAMSEY (1928) zurück .

Anwendungen aus dem Bereich der Luft- und Raumfahrt haben in den fünfziger und sechziger Jahren einen ganz wesentlichen Impuls für die Entwicklung der Optimalsteuerungstheorie geliefert. Eine Vielzahl weiterer Anwendungen aus der Technik,

den Ingenieur- und Wirtschaftswissenschaften, aber auch aus der Medizin sind inzwischen hinzugekommen.

Die Problemstellungen.

Sowohl die Variationsrechnung wie auch die Theorie optimaler Steuerungen sind Teilgebiete der *mathematischen Optimierung* und lassen sich daher unter die folgende allgemeine Aufgabenstellung einordnen.

Allgemeines Optimierungsproblem (1.1)

Gegeben sei ein reeller normierter Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$, eine nichtleere Teilmenge *zulässiger Punkte* $X \subset V$, und ein *Zielfunktional* $I : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Gesucht ist ein (optimaler) zulässiger Punkt $y_0 \in X$ mit der Eigenschaft

$$I(y_0) \leq I(y) \quad \text{für alle } y \in X.$$

Für das allgemeine Optimierungsproblem (1.1) lassen sich nun – wie üblich – die Begriffe *globales Minimum*, *striktes globales Minimum*, *lokales Minimum* und *striktes lokales Minimum* erklären; vgl. (1.2) des Optimierungsskripts.

Im Fall einer Variationsaufgabe bzw. einer Aufgabe der optimalen Steuerung ist V ein Funktionenraum, beispielsweise der Raum $C^1[a, b]$ aller reellwertigen, stetig differenzierbaren Funktionen auf einem kompakten Intervall $[a, b]$, versehen mit einer geeigneten Norm. Der gesuchte optimale Punkt y_0 ist damit selbst eine *Funktion*. Im einfachsten Fall, den wir in dieser Vorlesung ausschließlich betrachten wollen, ist dies eine Funktion einer Variablen t , die zumeist als Zeit interpretiert wird.

In der Variationsrechnung wird die Problemstellung noch weiter eingeschränkt: Man betrachtet Zielfunktionale, die in integraler Form von der gesuchten Funktion y abhängen, sowie Nebenbedingungen in Form vorgeschriebener Randbedingungen an die Komponenten von y . Man erhält so die folgende Problemstellung.

Variationsproblem (1.2)

Zu einer vorgegebenen Funktion $f \in C^2([a, b] \times \mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$, Indexmengen $I_a, I_b \subset \{1, \dots, n\}$, sowie Randdaten $y_{ia}, y_{jb} \in \mathbb{R}$, $i \in I_a, j \in I_b$ ist eine Funktion $y_0 \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ gesucht, die das Funktional

$$I(y) := \int_a^b f(t, y(t), y'(t)) dt \tag{1.3}$$

minimiert unter den Nebenbedingungen

$$y_i(a) = y_{ia}, \quad y_j(b) = y_{jb}, \quad i \in I_a, j \in I_b. \tag{1.4}$$

Beispiel (1.5) Das Problem der Brachistochrone.¹

Der Baseler Mathematiker JOHANN BERNOULLI ² formulierte im Jahr 1696 im Juniheft der Zeitschrift *Acta Eruditorum* (Leipzig) eine „neue Aufgabe, zu deren Lösung alle Mathematiker eingeladen werden“:

Gegeben seien im homogenen Schwerfeld zwei Punkte A und B ; A liege höher als B , jedoch nicht senkrecht über B . Ein Massenpunkt, der anfänglich in A ruht, bewege sich unter dem Einfluss der Schwerkraft von A nach B längs einer vorgegebenen Kurve (Rinne), auf der er reibungslos geführt wird. Welche Gestalt muss dieser Bahn nun gegeben werden, damit der Weg von A nach B in kürzester Zeit durchlaufen wird? Man vergleiche dazu die Abbildung 1.1.

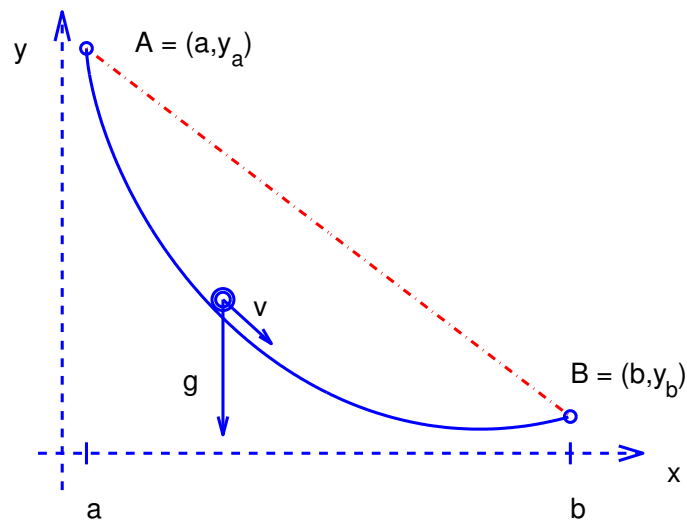


Abb.1.1 Das Problem der Brachistochrone.

Da sich der Massenpunkt in einem konservativen (sogar konstanten) Kraftfeld bewegt, gilt der Energiesatz: Der Zugewinn an kinetischer Energie entspricht genau dem Verlust an potentieller Energie. Damit folgt

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(y_a - y) \implies v = \sqrt{2g} \cdot \sqrt{y_a - y}.$$

Andererseits ist der Geschwindigkeitsbetrag v gerade die Ableitung der Bogenlänge nach der Zeit. Setzt man voraus, dass das x -Intervall $[a, b]$ streng monoton durchlaufen wird, genauer dass $dx/dt > 0$ für $t > 0$ gilt, so ergibt sich:

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + y'^2} \frac{dx}{dt}$$

und damit

¹griechisch: brachistos = kürzeste, chronos = Zeit

²Johann Bernoulli (1667–1748); Groningen, Basel

$$\implies \frac{dt}{dx} = \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{v} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y_a-y}}.$$

Durch Integration erhält man hieraus:

$$t_b = \int_0^{t_b} dt = \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \int_a^b \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y_a-y}} dx.$$

Damit können wir das Problem nun als eine Variationsaufgabe formulieren:

Gesucht ist eine stetige und auf $]a, b]$ differenzierbare Funktion $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derart, dass das Integral

$$I(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \int_a^b \sqrt{\frac{1+(y')^2}{y_a-y}} dx \quad (1.6)$$

minimiert wird unter den Nebenbedingungen:

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b. \quad (1.7)$$

Das Funktional I nach (1.6) beschreibt also die Zeit, die ein Massenpunkt benötigt, um auf der Kurve $y = y(x)$ reibungsfrei und nur unter dem Einfluss der Schwerkraft von $A = (a, y_a)$ nach $B = (b, y_b)$ zu „fallen“.

Es ist anzumerken, dass die Glattheitsvoraussetzungen, die wir an Variationsproblem (1.2) gestellt haben, für das Problem der Brachistochrone *nicht* erfüllt sind. Der Integrand in (1.6) wird gerade wegen der Randbedingung (1.7) in $x = a$ singular. Genauer: Es sind nur diejenigen Funktionen $y \in C^1[a, b]$, $y \leq y_a$ für das Variationsproblem zulässig, für die das Integral (1.6) (im uneigentlichen Sinn) existiert. Trotzdem lassen sich die Techniken, die wir zur Lösung von (1.2) entwickeln werden, formal auf die obige Problemstellung anwenden und es lässt sich tatsächlich zeigen, dass die hiermit ermittelte Funktion ein striktes Minimum des Brachistochronenproblems liefert.

Aufgrund der Aufgabenstellung von JOHANN BERNOULLI gingen verschiedene Lösungen zum Brachistochronenproblem ein, unter anderem von JAKOB BERNOULLI (dem älteren Bruder Johanns), ISAAK NEWTON (anonym), GOTTFRIED LEIBNIZ, MARQUIS DE L'HOSPITAL und von JOHANN BERNOULLI selbst. JOHANN BERNOULLI hat seinen Beweis mittels einer Analogie zu einem Problem der Optik erhalten, nämlich der Bestimmung eines Lichtstrahlengangs durch ein optisch brechendes Medium. Jahre später (1718) hat er einen zweiten Beweis veröffentlicht, mit dem er zusätzlich auch die Optimalität der berechneten Kurve zeigen konnte (hinreichende Bedingung).

Wie schon erwähnt wurde, sind Nebenbedingungen in Form von Differentialgleichungen für viele Anwendungen von besonderem Interesse. Zumeist werden für gewisse der gesuchten Funktionen explizite Differentialgleichungen vorgeschrieben. Diese Variablen heißen *Zustandsvariablen*, sie werden zu einem *Zustandsvektor* $x(t)$ zusammengefasst. Die anderen, frei wählbaren Variablen heißen *Steuervariable* und werden mit $u(t)$ bezeichnet. Es ergibt sich die folgende Form einer Optimalsteuerungsaufgabe.

Problem der optimalen Steuerung (1.8).

Gegeben sei ein nichtleerer, konvexer und abgeschlossener Steuerbereich $U \subset \mathbb{R}^m$. Zu vorgegeben (hinreichend glatten) Funktionen $g \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $f_0 \in C^2([a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$, $f \in C^2([a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und $r \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ ist eine stetige und stückweise stetig differenzierbare Funktion $x_0 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ (Zustandsfunktion) sowie eine stückweise stetige Funktion $u_0 : [a, b] \rightarrow U$ (Steuerfunktion) so zu bestimmen, dass das Zielfunktional

$$I(x, u) := g(x(a), x(b)) + \int_a^b f_0(t, x(t), u(t)) dt \quad (1.9)$$

minimiert wird unter den Nebenbedingungen

$$x'(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad (1.10)$$

$$r(x(a), x(b)) = 0. \quad (1.11)$$

Aufgrund des Existenz- und Eindeutigkeitsatzes für gewöhnliche Differentialgleichungen lässt sich die Zustands-Differentialgleichung (1.10) zu einer vorgegebenen stückweise stetigen Steuerfunktion u und zu vorgegebenen Anfangsdaten x_a für die Zustandsvariablen auf einem Intervall der Form $[a, a + \varepsilon[$ eindeutig lösen. An den Sprungstellen der Steuerfunktion liegen dann natürlich nur einseitige Ableitung der Zustandsgrößen vor. Man beachte hierzu die geforderte Stetigkeit der Zustandsgrößen. Auch ist a priori nicht klar, ob $a + \varepsilon \geq b$ gilt.

Ein Anfangswert $x_a \in \mathbb{R}^n$ und eine stückweise stetige Steuerung $u : [a, b] \rightarrow U$ heißen *zulässig*, wenn die Lösung der entsprechenden Anfangswertaufgabe (1.10) mit $x(a) = x_a$, auf dem gesamten Zeitintervall $[a, b]$ existiert und die Randbedingungen (1.11) erfüllt werden. Die Aufgabe der optimalen Steuerung besteht also darin, unter allen zulässigen Paaren (x_a, u) ein solches mit minimalem Zielfunktionalwert $I(x, u)$ zu bestimmen.

Im Folgenden betrachten wir als weiteres Beispiel ein einfaches aber typisches Optimalsteuerungsproblem aus dem Bereich *Bahnoptimierung für Flugzeuge*.

Die zweidimensionale Bewegung eines Flugzeugs in einer vertikalen Ebene wird beschrieben durch die Zustandsgrößen x : Entfernung auf Erde (Reichweite), h : Höhe über der Erdoberfläche, v : Geschwindigkeitsbetrag, γ : Bahnneigungswinkel und m : Masse des Flugzeugs. Die Steuerungen sind der Auftrieb (Lift) L und der (beschränkte) Massendurchsatz β . Die Zustandsdifferentialgleichungen lauten

$$\begin{aligned}x' &= v \cos \gamma \\h' &= v \sin \gamma \\v' &= \frac{T - D}{m} - g \sin \gamma \\ \gamma' &= \frac{1}{mv} (L - m g \cos \gamma) \\m' &= -\beta.\end{aligned}\tag{1.12}$$

Hierbei bezeichnet T den Schub (Betrag), der über eine Relation

$$T = c \beta\tag{1.13}$$

mit dem Massendurchsatz β zusammenhängt. Vereinfachend wird c als konstant angenommen.

Für den Luftwiderstand D und den Auftrieb L wird üblicherweise der folgende Ansatz verwendet:

$$D = \frac{1}{2} \rho v^2 F C_D, \quad L = \frac{1}{2} \rho v^2 F C_L,\tag{1.14}$$

mit der (konstanten) *Bezugsfläche* F und der höhenabhängigen *Luftdichte* $\rho = \rho(h)$.

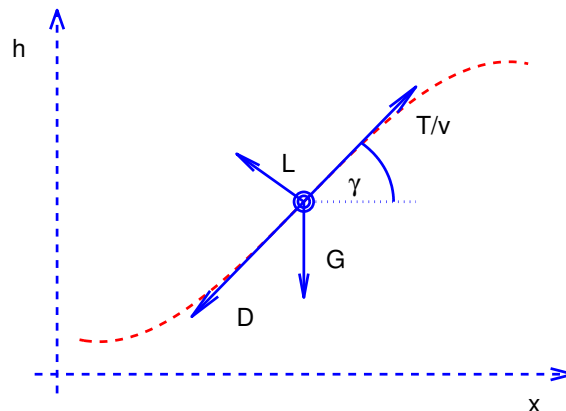


Abb.1.2 Kräfte diagramm in vertikaler Ebene.

Die Faktoren C_D bzw. C_L heißen *Widerstands-* bzw. *Auftriebsbeiwert*. Diese beiden Größen hängen von einer weiteren Steuerfunktion, dem so genannten *Anstellwinkel* α , ab.

Denkt man sich diese Steuerfunktion nun aus den entsprechenden Relationen $C_D = C_D(\alpha)$ und $C_L = C_L(\alpha)$ eliminiert, so lässt sich der Auftriebsbeiwert C_L als eine (unabhängig wählbare) Steuerfunktion ansehen, während der Widerstandsbeiwert C_D über die entstandene Relation, der so genannten *Polaren*, von der Steuerung C_L abhängt.

In der einfachsten Form wird für diese Polare ein quadratischer Ansatz verwendet (*Quadratische Polare*):

$$C_D = \alpha_0 + \alpha_1 C_L^2 \quad (1.15)$$

mit (vom speziellen Flugzeug abhängigen) Konstanten α_0 und α_1 .

Resümee: Das Differentialgleichungssystem (1.12) beschreibt zusammen mit den Relationen (1.13-15) die zweidimensionale Bewegung eines Flugzeugs in der Atmosphäre. Das System ist gerade von der Form einer Zustandsgleichung (1.10) mit der Zustandsfunktion $\mathbf{x} := (x, h, v, \gamma, m)^T$ und der Steuerung $\mathbf{u} := (\beta, C_L)^T$.

Wir betrachten nun als Anwendung das Problem der Reichweitenoptimierung für einen Horizontalflug in vorgegebener Höhe, bei vorgegebenem Treibstoffverbrauch und vorgegebenen Anfangs- und Endgeschwindigkeiten.

Aufgrund der Annahme eines Horizontalfluges folgt aus den Bewegungsgleichungen (1.12)

$$h = \text{const} \quad \Rightarrow \quad h' = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad L = G := m g \quad (\text{Gewicht} = \text{Auftrieb})$$

Hieraus lässt sich nun die Steuerung C_L eliminieren und man erhält mittels der Polaren (1.15) eine Darstellung

$$D = A v^2 + B \left(\frac{mg}{v} \right)^2, \quad (1.16)$$

mit (höhenabhängigen) Konstanten A, B .

Insgesamt haben wir damit die folgende Aufgabe der optimalen Steuerung hergeleitet:

Problem der Bahnoptimierung (1.17).

Man bestimme eine Steuerfunktion $\beta(t) \in [0, \beta_{\max}]$, $0 \leq t \leq t_b$, so dass das Zielfunktional

$$I(x, v, m, \beta) = -x(t_b) \quad (1.18)$$

minimiert wird unter den Zustandsgleichungen:

$$\begin{aligned}x' &= v, \\v' &= \frac{1}{m} \left(c\beta - Av^2 - B \left(\frac{mg}{v} \right)^2 \right), \\m' &= -\beta,\end{aligned}\tag{1.19}$$

und den Randbedingungen:

$$\begin{aligned}x(0) &= 0, \\m(0) &= m_0, \quad m(t_b) = m_1, \\v(0) &= v_0, \quad v(t_b) = v_1.\end{aligned}\tag{1.20}$$

Die Problemstellung (1.17) hat offenbar genau die Form einer allgemeinen Optimalsteuerungsaufgabe – mit einer kleinen Ausnahme: Die Endzeit t_b ist für unser konkretes Problem nicht fest vorgeschrieben, sondern als ein freier Parameter zu betrachten. Dieser ist ebenfalls zu optimieren. Man spricht daher von einem *Optimalsteuerungsproblem mit freier Endzeit*. Wir werden in Zukunft auch bei der allgemeinen Problemstellung (1.8) diesen Fall mit zu bedenken haben.

Nach LEITMANN (1981) kann man das obige Problem auch in eine klassische Variationsaufgabe umformen:

Dazu nimmt man an, dass für eine optimale Lösung des Problem stets $\beta > 0$ gewählt wird. Dann ist die Masse $m = m(t)$ eine streng monoton fallende Funktion der Zeit, und man kann m als neue unabhängige Variable einführen. Es gilt dann mit der Kettenregel:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dm} &= \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{dm} = -\frac{v}{\beta}, \\ \frac{dv}{dm} &= \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dt}{dm} = -\frac{1}{m\beta} (c\beta - D).\end{aligned}$$

Eliminiert man hieraus die Steuerfunktion β , so ergibt sich:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dm} &= -\frac{v}{D} \left(c + m \frac{dv}{dm} \right) \\ \Rightarrow \quad x(t_b) - x(0) &= -\int_{m_0}^{m_1} \frac{v}{D} \left(c + m \frac{dv}{dm} \right) dm\end{aligned}$$

Damit ist das Optimalsteuerungsproblem (1.17) äquivalent zu:

Variationsproblem (1.21).

Bestimme die Funktion $v = v(m)$ auf dem Intervall $m_1 \leq m \leq m_0$, so dass

$$\tilde{I}(v) = - \int_{m_1}^{m_0} \frac{v}{D} \left(c + m \frac{dv}{dm} \right) dm$$

unter den Randbedingungen $v(m_1) = v_1$ und $v(m_0) = v_0$ minimal wird.

Hierin ist der Widerstand D gemäß (1.16) einzusetzen. Das Optimalsteuerungsproblem (1.17) ist damit in eine klassische Variationsaufgabe vom Typ (1.2) transformiert worden.

Das generelle Ziel der vorliegenden Ausführungen ist es, für die beiden Problemstellungen (1.2) und (1.8) notwendige und hinreichende Bedingungen herzuleiten. Die notwendigen Bedingungen stehen hierbei im Vordergrund, da sie – analog zu den finiten Optimierungsproblemen – den Schlüssel für eine numerische Lösung dieser Aufgaben bilden. Allgemein gelangt man über die notwendigen Bedingungen zu einer Randwertaufgabe für gewöhnliche Differentialgleichungen, die sodann mit Hilfe numerischer Verfahren gelöst werden kann.

2. Die Euler–Lagrange Gleichung

In diesem Abschnitt werden wir die erste notwendige Bedingung für ein klassisches Variationsproblem (1.2) herleiten. Wir lassen uns hierbei von dem historischen Lösungsweg nach LAGRANGE⁵ leiten. Die Grundidee besteht darin, die (als existent vorausgesetzte) Lösung y_0 in eine eindimensionale Schar von Vergleichsfunktionen $y(t; \varepsilon)$ einzubetten, wobei ε ein reeller (eindimensionaler) Scharparameter ist. Für $\varepsilon = 0$ ergebe sich gerade die Lösung y_0 , also $y(t; 0) = y_0(t)$.

Setzt man diese Vergleichsschar in das Zielfunktional ein, so erhält man eine auf der reellen Achse \mathbb{R} definierte reellwertige Funktion $J(\varepsilon) := I(y(\cdot, \varepsilon))$, die in $\varepsilon = 0$ ein Minimum besitzt. Man kann also alle Methoden der endlichdimensionalen (in diesem Fall sogar eindimensionalen) Optimierung einsetzen, um notwendige Bedingungen für y_0 herzuleiten.

Zunächst werden wir für allgemeine Optimierungsprobleme von der Form (1.1) einen entsprechenden Differenzierbarkeitsbegriff (Richtungsableitung) herleiten.

Sei also $(V, \|\cdot\|)$ sei also ein reeller normierter Vektorraum, X eine nichtleere Teilmenge von V und $I : X \rightarrow \mathbb{R}$ ein Funktional. Zu $y_0 \in X$, $v \in V$ betrachten wir die lineare Einbettung (Vergleichsschar) $y(\varepsilon) := y_0 + \varepsilon v$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

Definition (2.1)

Ein Funktional $I : X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt in einem Punkt $y_0 \in X$ in Richtung $v \in V$ GÂTEAUX-differenzierbar, falls es ein $\varepsilon_0 > 0$ gibt, so dass $y(\varepsilon) := y_0 + \varepsilon v \in X$ für alle $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ und die Abbildung $J(\varepsilon) := I(y(\varepsilon))$ in $\varepsilon = 0$ differenzierbar ist.

Die Ableitung

$$\delta I(y_0; v) := J'(0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [I(y_0 + \varepsilon v) - I(y_0)] \quad (2.2)$$

heißt die GÂTEAUX-Ableitung oder *erste Variation* des Funktionals I .

Analog sagt man, dass I im Punkt $y_0 \in X$ in Richtung v *rechtsseitig* GÂTEAUX-differenzierbar ist, falls $y(\varepsilon) \in X$ gilt, für alle hinreichend kleinen $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, und die Abbildung $J(\varepsilon) := I(y(\varepsilon))$ in $\varepsilon = 0$ rechtsseitig differenzierbar ist. Für die rechtsseitige GÂTEAUX-Ableitung schreibt man

$$\delta_+ I(y_0; v) := J'(0^+) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [I(y_0 + \varepsilon v) - I(y_0)] . \quad (2.3)$$

Mit diesen Definitionen ergeben sich sofort die folgenden notwendigen Bedingungen für ein lokales Minimum von I .

⁵Joseph Louis Lagrange (1736–1813); Turin, Berlin, Paris

Satz (2.4)

a) Ist $y_0 \in X$ ein lokales Minimum des Funktionals I auf X , so ist $\delta I(y_0, v) = 0$ für alle Richtungen $v \in V$, in die das Funktional I in y_0 GÂTEAUX-differenzierbar ist.

b) Ferner gilt $\delta_+ I(y_0, v) \geq 0$ für alle Richtungen $v \in V$, in die das Funktional I in y_0 rechtsseitig GÂTEAUX-differenzierbar ist.

Beweis: Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus den obigen Definitionen. □

Beispiele (2.5)

a) Eine C^1 -Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ ist in jedem Punkt $y_0 \in D$ in allen Richtungen $v \in \mathbb{R}^n$ GÂTEAUX-differenzierbar und mit der Kettenregel folgt

$$\delta f(y_0; v) = \nabla f(y_0)^T v.$$

Ist y_0 also lokales Minimum von f auf D , so folgt aus Satz (2.4): $\nabla f(y_0) = 0$.

b) Wir betrachten das Funktional $I(y) := \int_0^1 y(t)^2 dt$ auf der zulässigen Menge $X = V = C[0, 1]$.

Offenbar ist $y_0 + v \in X$ für jede Funktion $v \in V$. Ferner haben wir

$$I(y_0 + \varepsilon v) - I(y_0) = 2\varepsilon \int_0^1 y_0(t) v(t) dt + \varepsilon^2 \int_0^1 v(t)^2 dt, \quad (2.6)$$

so dass sich $\delta I(y_0; v) = 2 \int_0^1 y_0(t) v(t) dt$ ergibt. Die notwendige Bedingung (2.4) für ein Minimum von I ist also nur für $y_0 = 0$ erfüllt.

An der Beziehung (2.6) erkennt man auch umgekehrt, dass y_0 tatsächlich das (eindeutig bestimmte) globale Minimum von I auf M ist (hinreichende Bedingung).

c) Über dem Vektorraum $V := C^1[a, b]$ betrachten wir das Funktional

$$I(y) := \int_a^b (y(t)^2 + y'(t)^2) dt$$

und die zulässige Menge $X := \{y \in V : y(a) = y_a, y(b) = y_b\}$.

Für die Variationen sind genau solche Funktionen $v \in C^1[a, b]$ zugelassen, für die $y_0 + \varepsilon v \in X$ ist für alle hinreichend kleinen $|\varepsilon|$, d.h. v muss zur Menge

$$X_0 := \{v \in C^1[a, b] : v(a) = v(b) = 0\}$$

gehören. Analog zu Beispiel b) findet man dann

$$I(y_0 + \varepsilon v) - I(y_0) = 2\varepsilon \int_a^b (y_0 v + y_0' v') dt + \varepsilon^2 \int_a^b (v^2 + (v')^2) dt, \quad (2.7)$$

so dass sich $\delta I(y_0; v) = 2 \int_a^b (y_0(t) v(t) + y_0'(t) v'(t)) dt = 0$ ergibt. Wie sich hieraus das gesuchte Minimum y_0 ermitteln lässt, werden wir sogleich sehen.

- d) Gegeben sei das Funktional $I(y) := \int_0^1 \rho(t) \sqrt{1 + y'(t)^2} dt$ sowie die zulässige Menge $X := \{y \in C^1[0, 1] : y(0) = y_a, y(1) = y_b\}$. Hierbei sei $\rho \in C[0, 1]$ eine vorgegebene stetige Funktion. Für die zulässigen Variationen ergibt sich wieder die Menge

$$X_0 := \{v \in C^1[0, 1] : v(0) = v(1) = 0\}.$$

Die Berechnung der GÂTEAUX-Ableitung ergibt

$$\delta I(y_0; v) = \int_0^1 \frac{\rho(t) y_0'(t) v'(t)}{\sqrt{1 + y_0'(t)^2}} dt. \quad (2.8)$$

Wie wir später zeigen werden (Lemma von du Bois-Reymond), verschwindet $\delta I(y_0; v)$ genau dann für alle $v \in X_0$, wenn

$$\frac{\rho(t) y_0'(t)}{\sqrt{1 + y_0'(t)^2}} = C = \text{const.}$$

ist. Diese Relation zusammen mit den vorgegebenen Randbedingungen liefert eine Randwertaufgabe, die - zumindest im Prinzip - einer numerischen Lösung zugänglich ist.

Aufgrund des Satzes (2.4) ist jede Funktion, die das Funktional über X minimiert, zugleich eine Lösung dieser Randwertaufgabe. Allerdings ist die Umkehrung diese Aussage im Allg. nicht richtig.

Wir wenden nun Satz 2.4 an, um notwendige Bedingungen für die Variationaufgabe (1.2) herzuleiten. Hier nochmals die Aufgabenstellung:

Variationsaufgabe (1.2)

Zu einer vorgegebenen C^2 -Funktion $f : [a, b] \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ und Indexmengen $I_a, I_b \subset \{1, \dots, n\}$ sowie Randdaten $y_{ia}, y_{jb} \in \mathbb{R}$, $i \in I_a, j \in I_b$ ist eine Funktion $y_0 \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ gesucht, die dass das Funktional

$$I(y) := \int_a^b f(t, y(t), y'(t)) dt$$

unter folgenden Nebenbedingungen minimiert

$$y_i(a) = y_{ia}, \quad y_j(b) = y_{jb}, \quad i \in I_a, j \in I_b.$$

Der zugrunde liegende Vektorraum ist also $V = C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$. Die Menge X der zulässigen Funktionen ist lediglich durch die Randbedingungen eingeschränkt:

$$X := \{y \in V : y_i(a) = y_{i_a}, y_j(b) = y_{j_b} \ (i \in I_a, j \in I_b)\}. \quad (2.9)$$

Als Variationen sind diejenigen Funktionen $v \in V$ zugelassen, für die mit $y_0 \in X$ auch $y_0 + \varepsilon v$ in X liegt (für alle hinreichend kleinen $|\varepsilon|$). Die Menge der zulässigen Variationen lautet daher

$$X_0 := \{v \in V : v_i(a) = 0, v_j(b) = 0 \ (i \in I_a, j \in I_b)\}. \quad (2.10)$$

In den Abbildungen 2.1 sind mögliche Vergleichskurven $y_0 + \varepsilon v$ einmal im Fall vorgeschriebener Randdaten und einmal ohne Randbedingungen dargestellt.

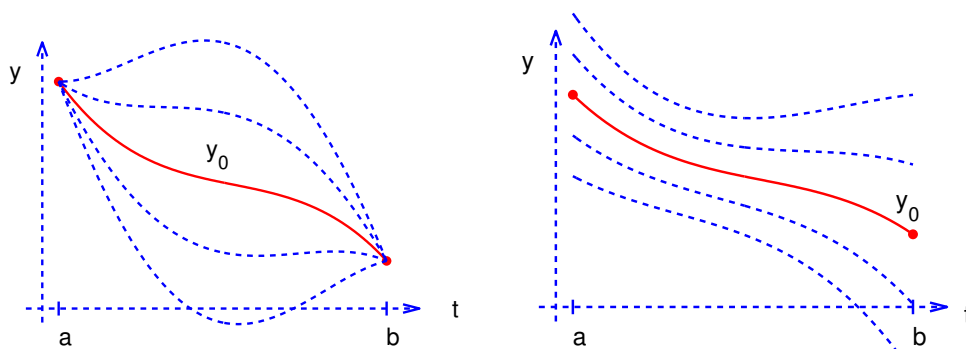


Abb. 2.1 Vergleichsfunktionen bei festen und freien Rändern.

Zu $y_0 \in X$ und $v \in X_0$ bilden wir nun die GÄTEAUX-Ableitung des Funktionals I . Zunächst ist

$$J(\varepsilon) := I(y_0 + \varepsilon v) = \int_a^b f(t, y_0(t) + \varepsilon v(t), y_0'(t) + \varepsilon v'(t)) dt$$

Differentiation nach ε und anschließendes Einsetzen von $\varepsilon = 0$ ergibt

$$\delta I(y_0; v) = J'(0) = \int_a^b (f_y[t]^T v(t) + f_{y'}[t]^T v'(t)) dt. \quad (2.11)$$

Hierbei steht f_y bzw. $f_{y'}$ abkürzend für den Vektor der partiellen Ableitungen $f_y = (\partial f / \partial y_1, \dots, \partial f / \partial y_n)^T$ bzw. $f_{y'} = (\partial f / \partial y_1', \dots, \partial f / \partial y_n')^T$. Ferner wird $[t]$ abkürzend für das Argument $(t, y_0(t), y_0'(t))$ verwendet.

Nun sei $y_0 \in X$ ein lokales Minimum der vorgegebenen Variationsaufgabe. Nach 2.4 verschwindet die erste Variation $\delta I(y_0; v)$ des Funktionals für alle $v \in X_0$. Wie können wir hieraus Aussagen über y_0 gewinnen?

Zunächst ist es naheliegend, den Ausdruck in (2.11) durch partielle Integration so umzuformen, dass nur noch die Variation v (und nicht mehr v') auftritt. Dazu muss allerdings $f_{y'}[t]$ als Funktion der Zeit t differenzierbar sein. Da f bereits als C^2 -Funktion vorausgesetzt war, erreichen wir dies durch die folgende

Zusatzvoraussetzung (2.12): $y_0 \in C^2([a, b], \mathbb{R}^n)$.

Später werden wir zeigen, dass die resultierenden notwendigen Bedingungen im Wesentlichen auch ohne diese Zusatzvoraussetzung gültig bleiben, dass (2.12) sogar in den meisten Fällen bewiesen werden kann!

Unter der obigen Voraussetzung wird der zweite Summand in (2.11) mittels partieller Integration umgeformt:

$$\delta I(y_0; v) = (f_{y'}[t]^T v(t)) \Big|_a^b + \int_a^b \left(f_y[t] - \frac{d}{dt} f_{y'}[t] \right)^T v(t) dt. \quad (2.13)$$

Schränken wir zunächst die Variationen auf die kleinere Menge

$$\tilde{X}_0 := \{v \in V : v_i(a) = 0, v_j(b) = 0 \quad (\forall i, j = 1, \dots, n)\} \quad (2.14)$$

ein, so verschwinden die ausintegrierten Bestandteile in (2.13) und mit 2.4 folgt

$$\int_a^b \left(f_y[t] - \frac{d}{dt} f_{y'}[t] \right)^T v(t) dt = 0, \quad \text{für alle } v \in \tilde{X}_0. \quad (2.15)$$

Diese Beziehung kann aber offensichtlich nur dann gelten, wenn die bei den v_i auftretenden Faktoren $(f_{y_i} - \frac{d}{dt} f_{y'_i})$ sämtlich identisch verschwindet.

Dies ist der Inhalt des so genannten *Fundamentallemmas der Variationsrechnung*.

Satz (2.16) (Fundamentallemma der Variationsrechnung)

Durch $X_0^\infty := \{v \in C^\infty[a, b] : v(a) = v(b) = 0\}$ werde der Vektorraum der C^∞ -Testfunktionen erklärt. Für eine stetige Funktion $F \in C[a, b]$ sind dann die folgenden Aussagen äquivalent:

- a) Für alle $v \in X_0^\infty$ gilt: $\int_a^b F(t) v(t) dt = 0$.
- b) $F = 0$.

Beweis: b) \Rightarrow a) ist klar. Zum Beweis von a) \Rightarrow b) nehmen wir an, dass F nicht identisch verschwindet. Dann gibt es ein $t_0 \in]a, b[$ mit $F(t_0) \neq 0$. O.B.d.A. sei $F(t_0) > 0$. Aus Stetigkeitsgründen existiert dann auch ein Intervall $[t_1, t_2] \subset [a, b]$ mit $t_1 := t_0 - \varepsilon$, $t_2 := t_0 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ und eine positive Konstante c mit $F(t) \geq c > 0$ für alle t aus diesem Intervall.

Eine Testfunktion lässt sich nun folgendermaßen konstruieren: Es sei

$$\varphi(t) := \begin{cases} \exp(-1/t), & \text{falls } t > 0 \\ 0, & \text{falls } t \leq 0 \end{cases}$$

und hiermit

$$v(t) := \frac{\varphi(t-t_1) \cdot \varphi(t_2-t)}{\varphi(t-t_1) \cdot \varphi(t_2-t) + \varphi(t-t_0) + \varphi(t_0-t)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Da φ eine C^∞ -Funktion auf \mathbb{R} ist mit $\varphi(t) > 0 \Leftrightarrow t > 0$, ist auch v eine auf ganz \mathbb{R} wohldefinierte C^∞ -Funktion mit den Eigenschaften: $0 \leq v(t) \leq 1$, $v(t) = 0 \Leftrightarrow |t-t_0| \geq \varepsilon$, $v(t_0) = 1$ und $v(t) \in]0, 1[$ für $0 < |t-t_0| < \varepsilon$.

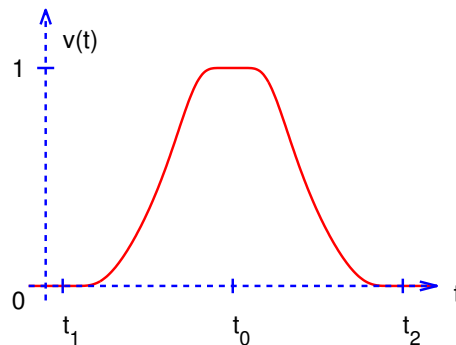


Abb. 2.2 Testfunktion $v(t)$.

Berechnet man nun mit dieser Testfunktion das Integral aus a), so folgt

$$\int_a^b F(t) v(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} F(t) v(t) dt \geq c \cdot \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt > 0,$$

im Widerspruch zu a). Damit ist das Fundamentallemma bewiesen. \square

Wir wenden das Fundamentallemma nun komponentenweise auf (2.15) an und erhalten hiermit die sogenannten **Euler⁶–Lagrange–Differentialgleichungen** der Variationsrechnung

$$f_y(t, y_0, y'_0) - \frac{d}{dt} f_{y'}(t, y_0, y'_0) = 0. \quad (2.17)$$

Jede Lösung dieses Differentialgleichungssystems heißt eine *Extremale* der Variationsaufgabe (1.2).

Mit diesem Ergebnis gehen wir nun zurück in die erste Variation. Nach (2.13) und (2.17) bleibt

$$\delta I(y_0; v) = (f_{y'}[t]^T v(t)) \Big|_a^b = 0, \quad \text{für alle } v \in X_0.$$

⁶Leonhard Euler (1707–1783); Basel, St. Petersburg, Berlin

Da $v \in X_0$ beliebig gewählt werden kann, muss die Minimallösung y_0 den folgenden so genannten *natürlichen Randbedingungen* genügen:

$$\begin{aligned} f_{y'_i}(a, y_0(a), y'_0(a)) &= 0, \quad \text{für alle } i \in \{1, \dots, n\} \setminus I_a \\ f_{y'_j}(b, y_0(b), y'_0(b)) &= 0, \quad \text{für alle } j \in \{1, \dots, n\} \setminus I_b. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Umgekehrt ist auch klar, dass für jede C^2 -Funktion $y_0 \in X$, die die EULER-LAGRANGE-Gleichung (2.17) und die natürlichen Randbedingungen (2.18) erfüllt, auch die erste Variation (2.13) für alle $v \in X_0$ verschwindet.

Wir fassen das Ergebnis zusammen:

Satz (2.19) (Notwendige Bedingungen erster Ordnung I)

Jede lokale C^2 -Lösung y_0 der Variationsaufgabe (1.2) ist zugleich eine Lösung der folgenden Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} f_y(t, y_0, y'_0) - \frac{d}{dt} f_{y'}(t, y_0, y'_0) &= 0, \\ y_i(a) &= y_{i a} \quad (i \in I_a), \quad f_{y'_i}(a, y_0(a), y'_0(a)) = 0 \quad (i \notin I_a), \\ y_j(b) &= y_{j b} \quad (j \in I_b), \quad f_{y'_j}(b, y_0(b), y'_0(b)) = 0 \quad (j \notin I_b). \end{aligned}$$

Die Lösungen der Randwertaufgabe (2.19) beschreiben genau die Funktionen, für die die erste Variation verschwindet. Sie heißen daher *stationäre Lösungen* der Variationsaufgabe.

Führt man in der EULER-LAGRANGE-Gleichung die Differentiation nach der Zeit aus, so ergibt sich (die Argumente sind stets $(t, y_0(t), y'_0(t))$)

$$0 = f_y - \frac{d}{dt} f_{y'} = f_y - f_{t y'} - f_{y' y} \cdot y'_0 - f_{y' y'} \cdot y''_0. \quad (2.20)$$

Unter der Annahme, dass die Minimallösung y_0 die **Regularitätsbedingung**

$$f_{y' y'}(t, y_0, y'_0) \in \mathbb{R}^{(n, n)} \quad \text{regulär, für alle } t \in [a, b], \quad (2.21)$$

erfüllt, lässt sich dieses Differentialgleichungssystem nach y''_0 auflösen. Die EULER-LAGRANGE-Gleichungen bilden dann das folgende explizite Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung

$$y''_0 = f_{y' y'}(t, y_0, y'_0)^{-1} [f_y(t, y_0, y'_0) - f_{t y'}(t, y_0, y'_0) - f_{y' y}(t, y_0, y'_0) y'_0]. \quad (2.22)$$

Unter der obigen Regularitätsvoraussetzung lässt sich die EULER-LAGRANGE-Gleichung also mit Hilfe klassischer numerischer Verfahren für Anfangswert- bzw.

Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen lösen. Ist die Regularitätsbedingung dagegen nicht erfüllt, so fällt die EULER-LAGRANGE-Gleichung in die Klasse der quasilinearen differentiell-algebraischen Gleichungen. Auch für diese Klasse sind in den letzten Jahren numerische Lösungsverfahren entwickelt worden, allerdings sind diese - verglichen mit den klassischen Anfangswertproblemlösern - erheblich aufwendiger.

Natürlich liefert (2.19) lediglich eine notwendige Bedingung. Es ist im Allg. weder a priori klar, dass die Randwertaufgabe eine Lösung besitzt (die Variationsaufgabe muss ja auch nicht lösbar sein), noch dass eine Lösung der Randwertaufgabe auch zugleich eine Lösung der Variationsaufgabe ist.

Beispiel (2.23)

Wir greifen nochmals das Beispiel (2.5)c) auf. Zu minimieren ist das Funktional

$$I(y) := \int_a^b (y(t)^2 + y'(t)^2) dt$$

über der zulässigen Menge $X := \{y \in C^1[a, b] : y(a) = y_a, y(b) = y_b\}$.

Die zugehörige EULER-LAGRANGE-Gleichung lautet

$$f_y - \frac{d}{dt} f_{y'} = 2(y - y'') = 0$$

und besitzt die allgemeine Lösung $y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$. Für $a < b$ lassen sich die Parameter C_1 und C_2 eindeutig aus den Randbedingungen bestimmen. Es gibt also genau eine Lösung y_0 der notwendigen Bedingungen (2.19). Mittels (2.7) sieht man auch, dass y_0 das eindeutig bestimmte globale Minimum der Variationsaufgabe liefert.

Ändert man die obige Variationsaufgabe dadurch ab, dass man die zweite Randbedingung $y(b) = y_b$ weglässt, so erhält man nun mittels der natürlichen Randbedingung die Randwertaufgabe

$$y'' = y, \quad y(a) = y_a, \quad y'(b) = 0.$$

Auch diese Randwertaufgabe ist eindeutig lösbar und liefert das eindeutig bestimmte globale Minimum der Variationsaufgabe.

Ein einfaches Beispiel für eine Variationsaufgabe, die keine C^1 -Lösung besitzt, hat WEIERSTRAß angegeben.

Beispiel (2.24) (WEIERSTRAß ⁷)

Gesucht sei eine Funktion $y \in C^1[-1, 1]$, die das Funktional $I(y) := \int_{-1}^1 t^2 y'(t)^2 dt$ unter den Nebenbedingungen $y(-1) = -1$ und $y(1) = 1$ minimiert.

⁷Karl Weierstraß (1815–1897); Münster, Braunschweig, Berlin

Offensichtlich ist $I(y) \geq 0$ für alle zulässigen Vergleichsfunktionen. $I(y) = 0$ kann nur für konstantes y erreicht werden. Aufgrund der geforderten Randbedingungen ist daher für jede zulässige C^1 -Funktion $I(y) > 0$.

Dennoch gilt $\inf\{I(y) : y \in X\} = 0$, wie man sich beispielsweise anhand der folgenden einparametrischen Schar von zulässigen Vergleichsfunktionen

$$y(t, \varepsilon) = \frac{\arctan(t/\varepsilon)}{\arctan(1/\varepsilon)}, \quad -1 \leq t \leq 1, \quad \varepsilon > 0,$$

überzeugen kann.

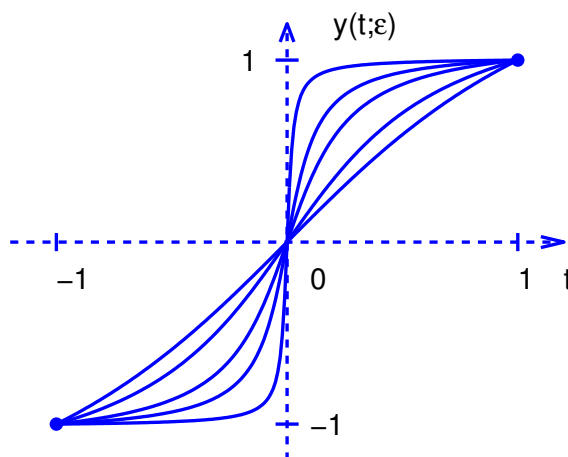


Abb. 2.3 Vergleichsfunktionen $y(t, \varepsilon)$.

Eine Abschätzung des Zielfunktional für diese Funktionenschar ergibt nämlich

$$\begin{aligned} I(y(\cdot, \varepsilon)) &= \frac{\varepsilon^2}{\arctan^2(1/\varepsilon)} \cdot \int_{-1}^1 \frac{t^2}{(t^2 + \varepsilon^2)^2} dt \leq \frac{\varepsilon^2}{\arctan^2(1/\varepsilon)} \cdot \int_{-1}^1 \frac{1}{t^2 + \varepsilon^2} dt \\ &= \frac{\varepsilon}{\arctan^2(1/\varepsilon)} \cdot \arctan(t/\varepsilon) \Big|_{-1}^1 = \frac{2\varepsilon}{\arctan(1/\varepsilon)} \rightarrow 0 \quad \text{für } \varepsilon \downarrow 0. \end{aligned}$$

Für das WEIERSTRAßsche Beispiel hat das Randwertproblem aus (2.19) keine C^1 -Lösung. Man wird also bei naiver Anwendung des Satzes nicht in die Irre geführt. dagegen sieht dies bei dem folgenden Variationsproblem jedoch ganz anders aus.

Beispiel (2.25)

Gesucht sei eine Funktion $y \in C^1[0, 4]$, die das Funktional

$$I(y) := \int_0^4 (y(t)^2 - 4y'(t)^2) dt$$

unter den Nebenbedingungen $y(0) = y(4) = 0$ minimiert.

Das zugehörige Randwertproblem gemäß (2.19) lautet

$$4y'' + y = 0, \quad y(0) = y(4) = 0$$

und besitzt damit die (eindeutig bestimmte) Lösung $y_0 = 0$.

Diese ist jedoch keineswegs ein globales Minimum der Variationsaufgabe, wie ein Vergleich mit der Parabel $y(t) = t(4 - t)$ belegt. Der Grund für das „Versagen“ liegt darin, dass eine weitere notwendige Bedingung (nämlich die Bedingung von JACOBI) für dieses Beispiel nicht erfüllt ist. Übrigens ist in diesem Beispiel y_0 auch kein *lokales* Minimum der Variationsaufgabe (bzgl. der Maximumsnorm).

Wir sehen uns abschließend zwei wichtige Spezialfälle von Variationsaufgaben an, bei denen man unmittelbar ein so genanntes *erstes Integral* der EULER-LAGRANGE-Gleichung angeben kann. Damit lässt sich das Randwertproblem im Wesentlichen auf die Lösung eines Differentialgleichungssystems *erster* Ordnung reduzieren.

Spezialfall (2.26): $f = f(t, y')$.

Der Integrand der Variationsaufgabe möge von y explizit unabhängig sein. Aus der EULER-LAGRANGE-Gleichung folgt dann unmittelbar durch Integration:

$$f_{y'}(t, y'_0(t)) = C = \text{const.} \quad (2.27)$$

Dies ist eine implizite Differentialgleichung erster Ordnung, die sich nach dem Satz über implizite Funktionen unter der Regularitätsvoraussetzung (2.21) lokal (eindeutig) nach y'_0 auflösen lässt. Die Lösung und der (unbekannte) Parameter C werden durch die Randbedingungen festgelegt.

Beispiel (2.28)

Wir betrachten nochmals das Funktional aus Beispiel (2.5)d)

$$I(y) := \int_0^1 \rho(t) \sqrt{1 + y'(t)^2} dt$$

mit einer stetigen Funktion $\rho \in C[0, 1]$.

Die zugehörige EULER-LAGRANGE-Gleichung besitzt nach (2.26) das erste Integral

$$f_{y'}(t, y'_0) = \frac{\rho(t) y'_0(t)}{\sqrt{1 + y'_0(t)^2}} = C = \text{const.}$$

Dieses Ergebnis hatten wir bereits in (2.5) ohne Beweis angegeben.

Spezialfall (2.29): $f = f(y, y')$.

Der Integrand der Variationsaufgabe möge von der Zeit t explizit unabhängig sein. Man spricht dann von einer *autonomen* Variationsaufgabe.

Hier empfiehlt es sich, die sogenannte HAMILTON-Funktion⁸ $H : [a, b] \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ zu

⁸William Rowan Hamilton (1805–1865); Dublin

betrachten. Diese wird - auch bei allgemeiner Problemstellung - wie folgt definiert:

$$H(t, y, y') := f(t, y, y') - (y')^T f_{y'}(t, y, y'). \quad (2.30)$$

Für autonome Variationsaufgaben ergibt sich dann mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(f(y, y') - (y')^T f_{y'}(y, y') \right) &= \left(f_y^T y' + f_{y'}^T y'' \right) - \left((y'')^T f_{y'} + (y')^T \frac{d}{dt} f_{y'} \right) \\ &= (y')^T \left(f_y - \frac{d}{dt} f_{y'} \right) = 0. \end{aligned}$$

Damit folgt also, dass die HAMILTON-Funktion $H = H(y, y')$ ein erstes Integral der EULER-LAGRANGE-Gleichung ist.

Für jede C^2 -Extremale gilt also

$$H(y_0(t), y'_0(t)) = C = \text{const}. \quad (2.31)$$

(2.31) ist wiederum eine Differentialgleichung erster Ordnung, die sich unter der Regularitätsvoraussetzung (2.21) und der Annahme $y'_0(t) \neq 0$ (für alle t) lokal (eindeutig) nach y'_0 auflösen lässt.

3. Klassische Variationsaufgaben

Wir sehen uns drei Beispiele an, die für die Entwicklung der Variationsrechnung wesentliche Anstöße gegeben haben.

Beispiel (3.1) (Brachistochrone)

Wir betrachten als erstes JOHANN BERNOULLIS berühmtes Brachistochronenproblem.

Zu vorgegebenen Randdaten (a, y_a) , (b, y_b) mit $a < b$, $y_b < y_a$ wird eine auf $[a, b]$ stetige und auf $]a, b]$ stetig differenzierbare Funktion y gesucht, die das Funktional

$$I(y) = \int_a^b \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{y_a - y}} dx$$

minimiert unter den Nebenbedingungen $y(a) = y_a$ und $y(b) = y_b$.

Da das Variationsproblem autonom ist, verwenden wir (2.31) und stellen hierzu die HAMILTON-Funktion auf. Wir finden

$$f_{y'} = \frac{2 \cdot y' / (y_a - y)}{2 \cdot \sqrt{(1 + y'^2) / (y_a - y)}} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2} \cdot \sqrt{y_a - y}},$$

$$H = f - y' f_{y'} = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2} \cdot \sqrt{y_a - y}} = C_1.$$

Es ist $C_1 \neq 0$. Wir quadrieren die obige Gleichung und lösen sie nach y' auf. Es ergibt sich:

$$y' = - \sqrt{\frac{2C - (y_a - y)}{y_a - y}} \quad \text{mit} \quad 2C := \frac{1}{C_1^2} > 0.$$

Mittels Trennung der Variablen und Integration folgt hieraus

$$- \int_{y_a}^y \sqrt{\frac{y_a - \eta}{2C - (y_a - \eta)}} d\eta = x - a.$$

Zur Lösung des Integrals empfiehlt sich nun die Substitution:

$$y_a - \eta = 2C \sin^2(\theta/2) = C(1 - \cos \theta).$$

Man erhält hiermit

$$x - a = 2C \int_0^\theta \sin^2(\tilde{\theta}/2) d\tilde{\theta} = C(\theta - \sin\theta).$$

Insgesamt erhalten wir also für die gesuchte Extremale $y = y(x)$ die folgende Parameterdarstellung:

$$x - a = C(\theta - \sin\theta), \quad y - y_a = -C(1 - \cos\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \theta_f.$$

Dies ist bekanntlich die Parameterdarstellung einer *Zykloiden* oder *Radkurve*. Die (noch unbekannt) Parameter C und θ_f sind durch die Endbedingungen

$$b - a = C(\theta_f - \sin\theta_f), \quad y_b - y_a = -C(1 - \cos\theta_f)$$

eindeutig festgelegt (Übungsaufgabe).

In der Abbildung 3.1 sind die verbindenden Zykloiden für einen gemeinsamen Anfangspunkt $A = (a, y_a)$ und verschiedene Endpunkte aufgetragen. Man spricht hier von einem (uneigentlichen) *Zykloidenfeld*.

Es ist natürlich anzumerken, dass der obige „naive“ Lösungsweg mathematisch unvollständig ist, da die Voraussetzungen der allgemeinen Problemstellung (1.2) nicht erfüllt sind. Wie schon früher erwähnt ist das Integrand des Zielfunktional in $t = a$ singular. Die berechnete Lösung ist allerdings korrekt und der Lösungsweg lässt sich auch durch eine geschickte Transformation richtigstellen, vgl. etwa KOSMOL(1992).

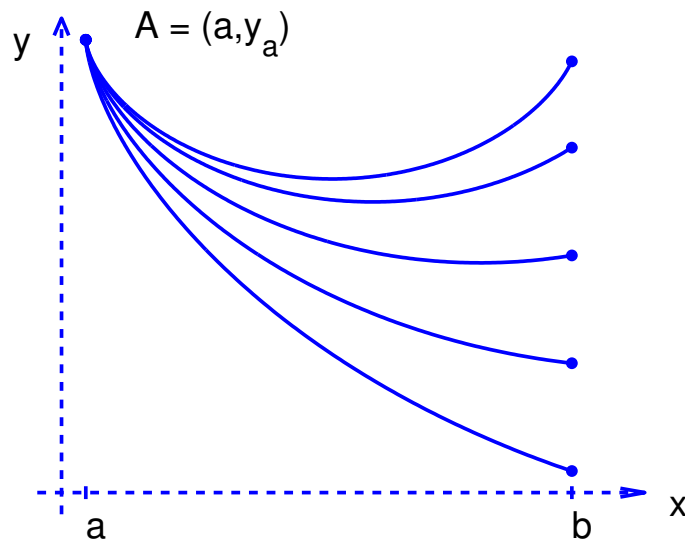


Abb. 3.1 Zykloidenfeld.

Ausführliche Informationen zum Brachistochronenproblem und seiner Geschichte findet man auch in GOLDSTEIN (1980), FUNK (1970) und DOMBROWSKI (1999).

Beispiel (3.2) (Rotationssymmetrische Minimalfläche)

Auch dieses Beispiel ist für die Entwicklung der Variationsrechnung von großem Nutzen gewesen. Es wurde ausführlich in den Vorlesungen von WEIERSTRAB behandelt. PLATEAU hat zu diesem Problem Versuche mit Seifenhäuten durchgeführt (PLATEAUSches Experiment), die später von SCHWARZ⁹, einem WEIERSTRAB-Schüler, verfeinert wurden.

Zu vorgegebenen Randpunkten $A = (a, y_a)$ und $B = (b, y_b)$ mit $a < b$, $y_a, y_b > 0$ ist eine verbindende Funktion $y \in C^1[a, b]$ gesucht, so dass der Rotationskörper, der durch Rotation des Funktionsgraphen um die t -Achse entsteht, eine minimale Mantelfläche besitzt.

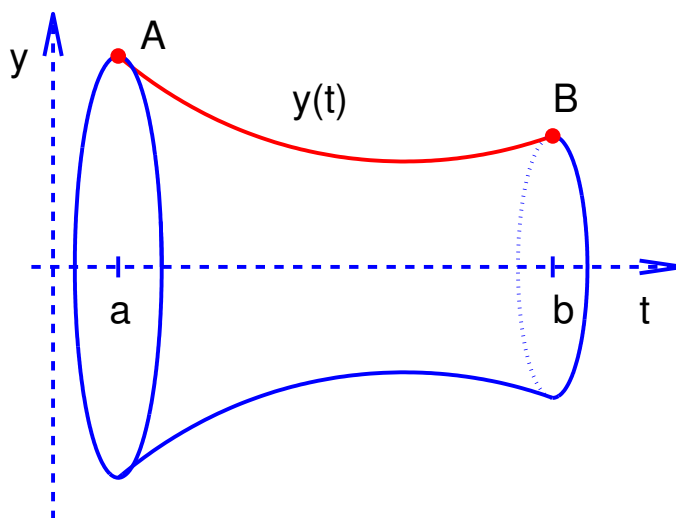


Abb.3.2 Rotationssymmetrische Minimalfläche.

Mathematisch lautet die Aufgabe: Man bestimme eine Funktion $y \in C^1[a, b]$, die das Zielfunktional

$$I(y) = \int_a^b y(t) \sqrt{1 + y'(t)^2} dt$$

unter den Nebenbedingungen $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$ minimiert.

Da das Problem autonom ist, verwenden wir zur Lösung wieder (2.31). Für die HAMILTON-Funktion erhalten wir

$$H = f - y' f_{y'} = \frac{y}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_1 > 0.$$

Diese Gleichung nach y' aufgelöst liefert

⁹Hermann Amandus Schwarz (1843–1921); Halle, Zürich, Berlin

$$y' = \frac{1}{C_1} \sqrt{y^2(t) - C_1^2}$$

und hieraus mittels Trennung der Variablen:

$$y(t) = C_1 \cosh\left(\frac{t}{C_1} + C_2\right).$$

Die gesuchte Funktion hat also die Gestalt einer *Kettenlinie*. Die Parameter C_1 und C_2 müssen durch die vorgeschriebenen Randbedingungen festgelegt werden. Anders als in Beispiel (2.38) ist dies jedoch keineswegs immer möglich. Sieht man sich alle möglichen Kettenlinien durch den linken Randpunkt an, so stellt man fest, dass diese einparametrische Extremalenschar einen Teilbereich K des Quadranten $t > a$, $y > 0$ doppelt überdeckt; vgl. Abb 3.3.

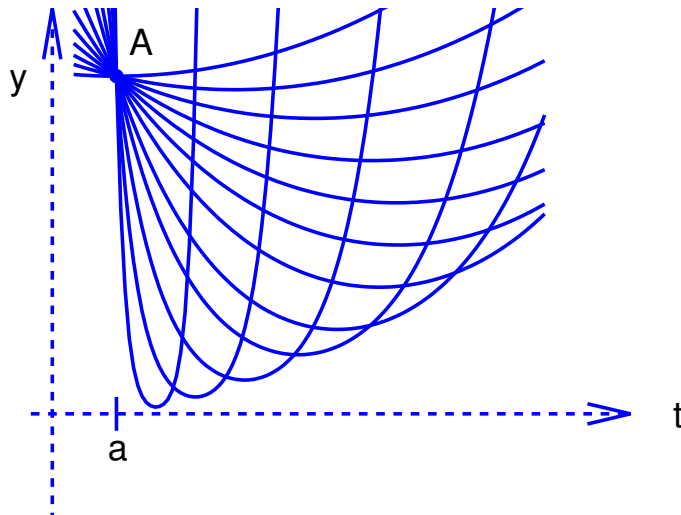


Abb.3.3 Kettenlinien durch den Anfangspunkt A .

Liegt der Endpunkt B nun im Innern von K , so existieren genau zwei verbindende Extremalen. Die untere dieser beiden Extremalen berührt die Einhüllende (*Envelope*) der Extremalenschar (Dies ist der untere Teil des Randes von K) und kann deshalb, wie wir später sehen werden, keine Lösung des Variationsproblems sein; sie verletzt die notwendige Bedingung von JACOBI. Die obere Lösung liefert dagegen tatsächlich die gesuchte Minimalfläche. Liegt der Endpunkt B unterhalb der Enveloppe, also außerhalb von K , so existiert keine C^2 -Lösung der Variationsaufgabe. Allerdings konnte GOLDSCHMIDT (1831) für diesen Fall eine unstetige, verallgemeinerte Lösung angeben.

Beispiel (3.3) (Fermatsches Prinzip ¹⁰)

Licht breitet sich in einer Ebene ortsabhängig mit einem Geschwindigkeitsbetrag $v(x, y)$ aus, der durch den (variablen) Brechungsindex des optischen Mediums an der Stelle (x, y) gegeben ist. Nach dem *Fermatschen Prinzip* verläuft der Lichtweg (Photonenbahn) zwischen zwei, nicht zu weit voneinander entfernten Punkten $P = (a, y_a)$ und $Q = (b, y_b)$ so, dass die zur Durchlaufung benötigte Zeit minimiert wird.

Nehmen wir an, dass der Lichtweg als eine C^1 -Funktion $y = y(x)$ darstellbar ist, wobei $x = x(t)$ mit der Zeit t streng monoton wachsend und stetig differenzierbar durchlaufen wird. Für die Bogenlänge s gilt dann bekanntlich $ds/dx = \sqrt{1 + y'^2}$ und damit ergibt sich für die Geschwindigkeit mittels Kettenregel

$$v(x, y) = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \sqrt{1 + y'^2} \frac{dx}{dt}$$

Für die Durchlaufungszeit erhält man damit die Darstellung

$$I(y) := t_f = \int_0^{t_f} dt = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v(x, y)} dx. \quad (3.4)$$

Die Aufgabe ist es also, eine Funktion $y \in C^1[a, b]$ zu bestimmen, die das Zielfunktional I unter den Nebenbedingungen $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$ minimiert.

Betrachten wir nun den Fall eines in y -Richtung isotropen optischen Mediums mit $v(x, y) = v_0 + v_1 x$ und $v_1 \neq 0$. Ferner sei $y_a \neq y_b$. Der Integrand des Zielfunctionals ist dann von y unabhängig, es liegt also der Spezialfall (2.29) vor. Aus der notwendigen Bedingung (2.30) ergibt sich die Differentialgleichung

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_1 (v_0 + v_1 x), \quad \text{mit konstantem } C_1 \neq 0.$$

Die Lösungen hiervon erhält man mittels der Substitution $y' = \tan u$. Es ergibt sich die folgende Parameterdarstellung

$$x = \frac{1}{v_1 C_1} \sin u - \frac{v_0}{v_1}, \quad y = -\frac{1}{v_1 C_1} \cos u + C_2.$$

Die Lösungen des obigen Variationsproblems sind also die Punkte P und Q verbindende Kreisbögen. Für $v_1 = 0$ ergibt sich als Grenzfall die Verbindungsgerade.

¹⁰Pierre de Fermat (1601–1665); Toulouse

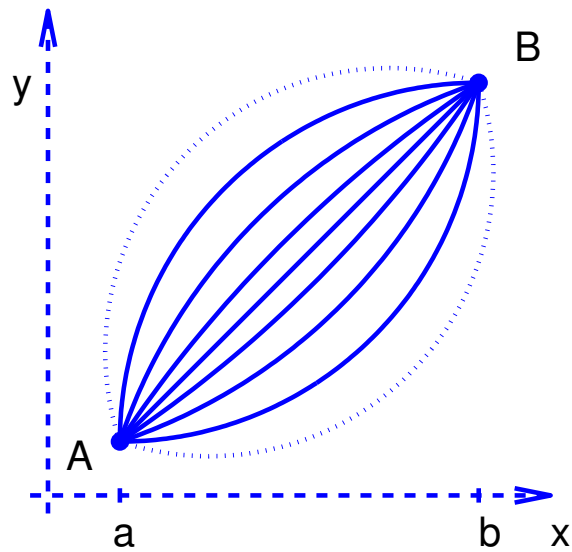


Abb. 3.4 Lichtstrahlen für verschiedene variable Brechungsindizes.

Man erkennt an dem gepunktet gezeichneten Kreisbogen in der Abbildung 3.4, dass die von uns postulierte Annahme, es handele sich um eine Variationsaufgabe für *Funktionen* durchaus nicht immer erfüllt ist. Die Lösung ist eben i. Allg. keine Funktion $y = y(x)$, sondern eine *Kurve* $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$. Man hat daher die allgemeinen Problemformulierungen auf den Fall von Kurven als Variable der Optimierungsaufgabe zu erweitern.

Wir werden diese Idee aber momentan nicht weiter verfolgen, sondern beschäftigen uns im folgenden Abschnitt mit der etwas willkürlich erhobenen Zusatzvoraussetzung (2.12).

4. Das Lemma von du Bois-Reymond ¹¹

Die in Abschnitt 2 angegebene Herleitung der EULER-LAGRANGE- Gleichung kann im Hinblick auf den Wunsch nach minimalen Voraussetzungen nicht zufriedenstellen. Wir hatten die Existenz eines Minimums y_0 der Variationsaufgabe annehmen müssen, aber darüber hinaus sogar die C^2 -Eigenschaft des Minimums. Diese letzte Voraussetzung ist lediglich durch unsere Beweistechnik notwendig geworden, damit die partielle Integration von (2.11) zu (2.13) durchführbar ist. Es ist naheliegend nach einem Beweisverfahren zu suchen, dass diese Zusatzvoraussetzung entbehrlich werden lässt.

Die Grundidee hierzu besteht darin, in dem in (2.11) auftretenden Integral $\int f_y v + f_{y'} v' dt$ den *ersten* Summanden durch partielle Integration umzuformen. Man erhält dann eine Relation der Form $\int F(t)v'(t)dt = 0$ und muss sich nun überlegen, welche Folgerungen sich hieraus für F ergeben. Hierzu hat zunächst DU BOIS-REYMOND eine Aussage geliefert, die später von von ZERMELO und HAAR verallgemeinert wurde. Es ist dies eine zum Fundamentallemma (2.16) analoge Aussage.

Satz (4.1) (Lemma von du Bois-Reymond)

Für ein $m \in \mathbb{N}$ werde durch

$$X_{m-1}^m := \{v \in C^m[a, b] : v^{(k)}(a) = v^{(k)}(b) = 0 \text{ für } k = 0, \dots, m-1\}$$

der Vektorraum der C^m -Testfunktionen erklärt, vgl. auch (2.16).

Für eine stetige Funktion $F \in C[a, b]$ sind dann die folgenden Aussagen äquivalent:

- a) Für alle $v \in X_{m-1}^m$ gilt: $\int_a^b F(t) v^{(m)}(t) dt = 0$.
- b) $F \in \Pi_{m-1}$, d.h. F ist ein Polynom höchstens $(m-1)$ -ten Grades.

Beweis b) \implies a): Mit der Voraussetzung b) liefert m -fache partielle Integration

$$\begin{aligned} \int_a^b F(t) v^{(m)}(t) dt &= F v^{(m-1)} \Big|_a^b - \int_a^b F'(t) v^{(m-1)}(t) dt \\ &= \dots = (-1)^m \int_a^b F^{(m)}(t) v(t) dt = 0. \end{aligned}$$

¹¹Paul du Bois-Reymond (1831–1889); Freiburg, Tübingen, Berlin

a) \implies b): Wir definieren $v^{(m)}$ als Differenz zwischen F und der orthogonalen Projektion von F auf den Raum Π_{m-1} der Polynomfunktionen vom Grad kleiner oder gleich $m-1$.

Dazu sei $\langle u, v \rangle := \int_a^b u(t)v(t) dt$ das Standard-Skalarprodukt auf $C[a, b]$ und $P_j \in \Pi_j$, $j = 0, 1, \dots$ seien zugehörige Orthogonalpolynome, die sich mit Hilfe des GRAM-SCHMIDT-Orthogonalisierungsverfahrens aus der kanonischen Basis $1, t, t^2, \dots$ ergeben. Insbesondere gilt $\langle P_j, P_k \rangle = 0$ für $j \neq k$ und $\langle P_k, P_k \rangle \neq 0$, $j, k \in \{0, \dots, m-1\}$.

Wir setzen also

$$v^{(m)}(t) := F(t) - \sum_{k=0}^{m-1} a_k P_k(t), \quad a_k := \langle F, P_k \rangle / \langle P_k, P_k \rangle.$$

Damit ist $v^{(m)}$ eine stetige Funktion auf $[a, b]$ und es gilt die *Projektionseigenschaft*

$$\langle v^{(m)}, P_k \rangle = \langle F - \sum_{j=0}^{m-1} a_j P_j, P_k \rangle = \langle F, P_k \rangle - a_k \langle P_k, P_k \rangle = 0, \quad k = 0, \dots, m-1.$$

Nun werden die $v^{(k)}$, $k = m-1, \dots, 0$ rekursiv als Stammfunktionen definiert

$$v^{(k)}(t) := \int_a^t v^{(k+1)}(\tau) d\tau; \quad k = m-1, m-2, \dots, 0.$$

Wir haben zu zeigen, dass $v := v^{(0)}$ eine zulässige Testfunktion ist, dass also v in X_{m-1}^m liegt. Unmittelbar aus der Definition folgt $v \in C^m[a, b]$ und $v^{(k)}(a) = 0$, $k = 0, \dots, m-1$. Die noch fehlende Eigenschaft $v^{(k)}(b) = 0$, $k = 0, \dots, m-1$ beweisen wir induktiv mittels der Projektionseigenschaft – beginnend bei $k = m-1$:

$$v^{(m-1)}(b) = \int_a^b v^{(m)}(t) dt = \langle v^{(m)}, P_0 \rangle / P_0(a) = 0,$$

da P_0 konstant ist und nicht verschwindet.

Gilt nun für ein $k \geq 1$: $v^{(m-1)}(b) = \dots = v^{(m-k)}(b) = 0$, so folgt mittels partieller Integration

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b v^{(m)}(t) P_k(t) dt = \underbrace{v^{(m-1)} P_k \Big|_a^b}_{=0} - \int_a^b v^{(m-1)}(t) P_k^{(1)}(t) dt = \dots \\ &= (-1)^k \int_a^b v^{(m-k)}(t) P_k^{(k)}(t) dt = (-1)^k P_k^{(k)}(a) \left(v^{(m-k-1)}(b) - v^{(m-k-1)}(a) \right), \end{aligned}$$

da $P_k^{(k)}$ konstant ist und nicht verschwindet. Hieraus folgt, dass auch $v^{(m-k-1)}(b) = 0$ ist. Damit ist der Induktionsbeweis beendet und wir haben gezeigt, dass $v \in X_{m-1}^m$.

Mit der Voraussetzung a) und der Projektionseigenschaft folgt nun schließlich

$$0 = \langle F, v^{(m)} \rangle = \langle v^{(m)} + \sum_{k=0}^{m-1} a_k P_k, v^{(m)} \rangle = \langle v^{(m)}, v^{(m)} \rangle = \int_a^b v^{(m)}(t)^2 dt,$$

also $v^{(m)} = 0$, und damit nach Definition von $v^{(m)}$: $F = \sum_{k=0}^{m-1} a_k P_k \in \Pi_{m-1}$. \square

Ein wichtiger Aspekt des Lemmas von du Bois–Reymond ist eine Glattheitsaussage: Gilt für eine nur stetige Funktion $F \in C[a, b]$ die Eigenschaft a) aus dem Lemma, so ist F ein Polynom, also insbesondere eine C^∞ -Funktion.

Folgerung (4.2)

Sind $F, G \in C[a, b]$ stetige Funktionen mit der Eigenschaft

$$\forall v \in X_0^1: \int_a^b F(t) v(t) + G(t) v'(t) dt = 0,$$

so ist G eine C^1 -Funktion auf $[a, b]$ und es gilt $F = G'$.

Beweis:

Partielle Integration des *ersten* Summanden liefert

$$U(t) v(t) \Big|_a^b + \int_a^b (G(t) - U(t)) v'(t) dt = 0,$$

wobei U eine Stammfunktion von F , etwa $U(t) := \int_a^t F(\tau) d\tau$ ist. Da $v(a) = v(b) = 0$, verschwindet der ausintegrierte Bestandteil und es lässt sich das Lemma von du Bois–Reymond mit $m = 1$ anwenden. Es gibt also eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ mit $G(t) = U(t) + C$ für alle $t \in [a, b]$.

Die Differentiation dieser Relation nach t liefert die Behauptung. \square

Wendet man nun das Lemma (4.2) komponentenweise auf Relation (2.11) an, so erhält man die folgende Aussage.

Folgerung (4.3)

Ist y_0 eine C^1 -Lösung der Variationsaufgabe (1.2), so ist die Abbildung $t \mapsto f_{y'}(t, y_0(t), y_0'(t)) \in \mathbb{R}^n$ auf $[a, b]$ stetig differenzierbar.

Die notwendigen Bedingungen des Satzes (2.19) gelten also auch unter der schwächeren Voraussetzung, dass y_0 lediglich eine C^1 -Lösung des Variationsproblems ist.

Wir untersuchen im Folgenden noch die Frage, ob sich aus der Differenzierbarkeitsaussage für $f_{y'}[t] = f_{y'}(t, y_0(t), y_0'(t))$ auch auf die stetige Differenzierbarkeit von y_0'

selbst schliessen lässt, d.h. ob die Zusatzvoraussetzung (2.12) in Abschnitt 2 doch gerechtfertigt war.

Dazu gehen wir direkt auf die Definition der Ableitung zurück und betrachten

$$\frac{d}{dt} f_{y'}(t, y_0, y'_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f_{y'}(t+h, y_0(t+h), y'_0(t+h)) - f_{y'}(t, y_0(t), y'_0(t))}{h} \right)$$

Die rechte Seite wird folgendermaßen in drei Summanden zerlegt

$$\begin{aligned} h \cdot (\dots) &= \left[f_{y'}(t+h, y_0(t+h), y'_0(t+h)) - f_{y'}(t, y_0(t+h), y'_0(t+h)) \right]_1 \\ &+ \left[f_{y'}(t, y_0(t+h), y'_0(t+h)) - f_{y'}(t, y_0(t), y'_0(t+h)) \right]_2 \\ &+ \left[f_{y'}(t, y_0(t), y'_0(t+h)) - f_{y'}(t, y_0(t), y'_0(t)) \right]_3. \end{aligned}$$

Auf diese wird (einzeln und komponentenweise) der Mittelwertsatz der Differentialrechnung angewendet.

Es gibt also $\theta_{i,j} = \theta_{i,j}(h) \in]0, 1[$, $i = 1, \dots, n$ und $j = 1, 2, 3$ mit

$$\begin{aligned} [\dots]_1 &= \sum_{i=1}^n f_{y'_i t} \left(t + \theta_{i,1} h, y_0(t+h), y'_0(t+h) \right) h e_i \\ [\dots]_2 &= \sum_{i=1}^n f_{y'_i y} \left(t, y_0(t) + \theta_{i,2} (y_0(t+h) - y_0(t)), y'_0(t+h) \right)^T (y_0(t+h) - y_0(t)) e_i \\ [\dots]_3 &= \sum_{i=1}^n f_{y'_i y'} \left(t, y_0(t), y'_0(t) + \theta_{i,3} (y'_0(t+h) - y'_0(t)) \right)^T (y'_0(t+h) - y'_0(t)) e_i \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet $e_i \in \mathbb{R}^n$ den i -ten kanonischen Einheitsvektor.

Dividiert man diese Ausdrücke wieder durch h und bildet die existierenden(!) Einzelgrenzwerte für $h \rightarrow 0$, so ergibt sich mit der Matrix

$$H(t; h) := \left[f_{y'_i y'_j} \left(t, y_0(t), y'_0(t) + \theta_{i,3} (y'_0(t+h) - y'_0(t)) \right) \right] \in \mathbb{R}^{(n,n)}$$

die folgende Beziehung

$$\begin{aligned} &\lim_{h \rightarrow 0} \left[H(t; h) \left(\frac{y'_0(t+h) - y'_0(t)}{h} \right) \right] \\ &= \frac{d}{dt} \left[f_{y'}(t, y_0, y'_0) \right] - f_{t y'}(t, y_0, y'_0) - f_{y' y}(t, y_0, y'_0) y'_0. \end{aligned}$$

Der erste Faktor $H(t; h)$ der linken Seite konvergiert gegen $f_{y' y'}(t, y_0, y'_0)$. Ist diese Matrix an einer Stelle t regulär, so muss auch der zweite Faktor, das ist gerade der Differenzenquotient von y'_0 , dort für $h \rightarrow 0$ konvergieren, d.h. y'_0 ist dort differenzierbar. Da ferner $f_{y' y'}[t]$ (als Funktion von t) stetig ist, ist y'_0 dann auch in einer Umgebung dieser Stelle differenzierbar und somit (aufgrund der obigen Gleichung) sogar stetig differenzierbar ($f_{y' y'}[t]^{-1}$ ist ja ebenfalls eine stetige Funktion von t).

Wir fassen das Ergebnis zusammen.

Satz (4.4) (Notwendige Bedingungen erster Ordnung I)

Für eine C^1 -Lösung y_0 der Variationsaufgabe (1.2) gelten

- a) Die Funktion $f_{y'}[t] = f_{y'}(t, y_0(t), y'_0(t))$ ist stetig differenzierbar.
- b) y_0 ist Lösung der Zweipunkt-Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} f_y(t, y_0, y'_0) - \frac{d}{dt} f_{y'}(t, y_0, y'_0) &= 0, \\ y_i(a) &= y_{i a} \quad (i \in I_a), \quad f_{y'_i}[a] = 0 \quad (i \notin I_a), \\ y_j(b) &= y_{j b} \quad (j \in I_b), \quad f_{y'_j}[b] = 0 \quad (j \notin I_b). \end{aligned}$$

- c) In allen Punkten t , in denen die Hesse-Matrix $f_{y' y'}[t] \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ regulär ist, ist y_0 zweifach stetig differenzierbar. Die EULER-LAGRANGE-Gleichungen lassen sich dort in ein explizites Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung umformen.

Variationsaufgaben mit höheren Ableitungen.

Mitunter treten klassische Variationsaufgabe auf, bei denen das zu minimierende Funktional (in integraler Form) nicht nur die gesuchte Funktion und deren Ableitung, sondern auch höhere Ableitungen dieser Funktion enthält. Prinzipiell lässt sich der oben durchgeführte Weg zur Gewinnung notwendiger Bedingungen ohne Probleme auf diesen Fall übertragen. Um die Notationen nicht zu aufwendig werden zu lassen, betrachten wir im Folgenden den Fall einer *skalaren* gesuchten Funktion und der maximal auftretenden Ableitungsordnung zwei. Die Variationsaufgabe lautet dann

Variationsaufgabe (4.5)

Zu einer vorgegebenen C^3 -Funktion $f : [a, b] \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ und Indexmengen $I_a, I_b \subset \{0, 1\}$ sowie Randdaten $y_{i a}, y_{j b} \in \mathbb{R}$, $i \in I_a, j \in I_b$ ist eine Funktion $y_0 \in C^2[a, b]$ zu bestimmen, die das Funktional

$$I(y) := \int_a^b f(t, y(t), y'(t), y''(t)) dt \tag{4.6}$$

unter den folgenden Nebenbedingungen minimiert

$$y^{(i)}(a) = y_{i a}, \quad y^{(j)}(b) = y_{j b}, \quad i \in I_a, j \in I_b. \tag{4.7}$$

Die Menge der zulässigen Vergleichsfunktionen lautet somit

$$X = \{y \in C^2[a, b] : y^{(i)}(a) = y_{ia}, y^{(j)}(b) = y_{jb}, i \in I_a, j \in I_b\},$$

und die Menge der zulässigen Variationen ist gegeben durch

$$X_0 = \{v \in C^2[a, b] : v^{(i)}(a) = 0, v^{(j)}(b) = 0, i \in I_a, j \in I_b\}.$$

Die GÂTEAUX-Ableitung des Funktional lautet ($y_0 \in X, v \in X_0$):

$$\delta I(y_0; v) = \int_a^b \left(f_y[t] v(t) + f_{y'}[t] v'(t) + f_{y''}[t] v''(t) \right) dt. \quad (4.8)$$

Schränkt man die Variationen zunächst auf die Testfunktionen $v \in X_1^2 \subset X_0$ ein, so folgt durch mehrfache partielle Integration

$$\delta I(y_0; v) = \int_a^b \left(S_2 f_y[t] - S_1 f_{y'}[t] + f_{y''}[t] \right) v''(t) dt = 0,$$

wobei $S_2 f_y[t]$ eine zweifache, $S_1 f_{y'}[t]$ eine einfache Stammfunktion von $f_y[t]$ bzw. $f_{y'}[t]$ bezeichnet. Nach dem Lemma von du Bois-Reymond ist die Klammer unter dem obigen Integral nun ein lineares Polynom. Zweimalige Differentiation ist daher möglich und liefert die EULER-LAGRANGE-Gleichung

$$f_y[t] - \frac{d}{dt} \left(f_{y'}[t] - \frac{d}{dt} f_{y''}[t] \right) = 0. \quad (4.9)$$

Zur Bestimmung der natürlichen Randbedingungen geht man auf (4.8) mit $v \in X_0$ zurück und führt die partiellen Integrationen nun in der anderen Richtung durch, d.h. v', v'' werden integriert. Man erhält

$$\delta I(y_0; v) = f_{y''}[t] v'(t) \Big|_a^b + \left(f_{y'}[t] - \frac{d}{dt} f_{y''}[t] \right) v(t) \Big|_a^b = 0.$$

Die natürlichen Randbedingungen lauten somit

$$\begin{aligned} f_{y''}[a] &= 0, \quad \text{falls } 1 \notin I_a, & f_{y''}[b] &= 0, \quad \text{falls } 1 \notin I_b \\ f_{y'}[a] &= \frac{d}{dt} f_{y''}[a], \quad \text{falls } 0 \notin I_a, & f_{y'}[b] &= \frac{d}{dt} f_{y''}[b], \quad \text{falls } 0 \notin I_b. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Insgesamt haben wir als notwendige Bedingungen erster Ordnung die EULER-LAGRANGE-Gleichung (4.9) sowie die vorgegebenen und die natürlichen Randbedingungen (4.7), (4.10) erhalten. Setzt man hinreichende Glattheit der Lösung ($y_0 \in C^4$) und eine geeignete Regularitätsbedingung voraus, so stellt (4.9) eine explizite Differentialgleichung vierter Ordnung für y_0 dar, die zusammen mit (4.7), (4.10) eine wohldefinierte Randwertaufgabe bildet.

Im folgenden Beispiel werden wir die Form möglicher Randbedingungen durch so genannte *innere Punktbedingungen* (Interpolationsbedingungen) erweitern.

Gleichzeitig schwächen wir die Glattheitsvoraussetzungen an die zulässigen Vergleichsfunktionen geringfügig ab.

Beispiel (4.11) (Interpolation durch kubische Splinefunktionen)

Zu einem vorgegebenen Gitter $\Delta := \{t_0 < t_1 < \dots < t_m\}$ werde der Vektorraum der stetig differenzierbaren und stückweisen C^2 -Funktionen definiert durch

$$C^{1,2}(\Delta) := \{y \in C^1[t_0, t_m] : \forall i : y|_{[t_i, t_{i+1}]} \in C^2[t_i, t_{i+1}]\}. \quad (4.12)$$

Gesucht wird nun eine Funktion $y_0 \in C^{1,2}(\Delta)$, die das Funktional

$$I(y) = \int_{t_0}^{t_m} y''(t)^2 dt \quad (4.13)$$

unter den Interpolationsnebenbedingungen $y(t_i) = y_i$, $i = 0, \dots, m$, minimiert.

Die Menge der zulässigen Funktionen ist

$$X = \{y \in C^{1,2}(\Delta) : y(t_i) = y_i, (i = 0, \dots, m)\},$$

die der zulässigen Variationen

$$X_0 = \{v \in C^{1,2}(\Delta) : v(t_i) = 0 (i = 0, \dots, m)\}.$$

Für eine Lösung der Variationsaufgabe $y_0 \in X$ ergibt die GÂTEAUX-Ableitung

$$\forall v \in X_0 : \delta I(y_0; v) = 2 \int_{t_0}^{t_m} y_0''(t) v''(t) dt = 0. \quad (4.14)$$

Schränkt man die zulässigen Variationen zunächst ein auf den Fall $v|_{[t_i, t_{i+1}]} \in X_1^2[t_i, t_{i+1}]$ und $v(t) = 0$ für $t \notin [t_i, t_{i+1}]$ (i fester Intervallindex), so reduziert sich das Integral in (4.14) auf ein Teilintervall und mit dem Lemma von du Bois-Reymond folgt, dass y_0'' intervallweise ein lineares Polynom ist, also

$$\forall i : y_0|_{[t_i, t_{i+1}]} \in \Pi_3[t_i, t_{i+1}]. \quad (4.15)$$

Führt man nun intervallweise partielle Integration von (4.14) durch, so folgt (nunmehr für alle $v \in X_0$):

$$\begin{aligned} (1/2) \delta I(y_0; v) &= \sum_{i=0}^{m-1} \left[y_0''(t) v'(t) \Big|_{t_i}^{t_{i+1}} - y_0'''(t) v(t) \Big|_{t_i}^{t_{i+1}} \right] \\ &= \left[y_0''(t_m) v'(t_m) - y_0''(t_0) v'(t_0) \right] + \sum_{i=1}^{m-1} \left(y_0''(t_i^-) - y_0''(t_i^+) \right) v'(t_i). \end{aligned}$$

Da die $v'(t_i)$ beliebige Werte annehmen können, erhalten wir die *natürlichen Randbedingungen*

$$y_0 \in C^2[t_0, t_m], \quad y_0''(t_0) = y_0''(t_m) = 0. \quad (4.16)$$

Aus der Vorlesung Numerik ist bekannt, dass der natürliche interpolierende kubische Spline $y_0 \in X$ durch (4.15) und (4.16) *eindeutig* bestimmt ist und z.B. mittels eines tridiagonalen linearen Gleichungssystems berechnet werden kann, vgl. Stoer (1999).

Wegen
$$I(y_0 + v) - I(y_0) = \delta I(y_0; v) + \int_{t_0}^{t_m} v''(t)^2 dt \quad (4.17)$$

ist y_0 auch eindeutig bestimmtes globales Minimum der Variationsaufgabe. Ist nämlich $v \in X_0$ und $v'' = 0$ (intervallweise), so folgt auch $v = 0$.

In der folgenden Abbildung 4.1 ist ein Beispiel für einen interpolierenden kubischen Spline dargestellt.

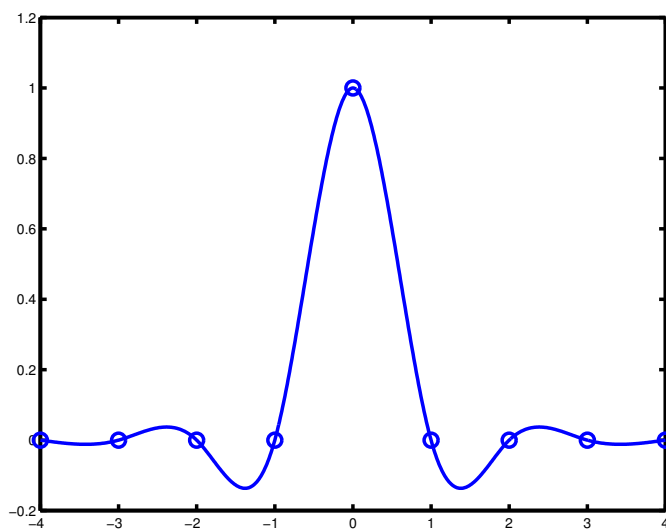


Abb. 4.1 Natürlicher kubischer Spline.

5. Hinreichende Bedingungen, Konvexität

Wir haben in den letzten Abschnitten verschiedene Beispiele kennengelernt, bei denen man zeigen konnte, dass der mit Hilfe der notwendigen Bedingungen gefundene Lösungskandidat y_0 auch tatsächlich die vorgegebene Variationsaufgabe löst. Dies gelang mittels einer Ungleichung der Form

$$I(y_0 + v) - I(y_0) \geq \delta I(y_0; v), \quad (5.18)$$

für alle v mit $y_0 + v \in X$. Vergleichen Sie hierzu (2.6), (2.7) aber auch (4.17).

Die obige Ungleichung lässt sich formal als TAYLOR-*Entwicklung* erster Ordnung mit nichtnegativem Restglied interpretieren. Dies bedeutet aber gerade die *Konvexität* des zu minimierenden Funktionals.

Eine Teilmenge X eines normierten Vektorraumes V heißt bekanntlich *konvex*, falls mit je zwei Punkten $a, b \in X$ auch die Verbindungsstrecke

$$[a, b] := \{a + \lambda(b - a) \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

zu X gehört. Sie heißt *strikt konvex*, falls für $a \neq b$ die innere Verbindungsstrecke $]a, b[:= \{a + \lambda(b - a) \mid 0 < \lambda < 1\}$ im topologisch Inneren X^0 der Menge X liegt.

Schließlich heißt ein Funktional $I : X \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer konvexen Menge $X \subset V$ *konvex*, falls für alle $a, b \in X$ und $\lambda \in [0, 1]$ die folgende Ungleichung gilt

$$I(a + \lambda(b - a)) \leq I(a) + \lambda(I(b) - I(a)). \quad (5.19)$$

Gilt in (5.2) sogar $<$ für $a \neq b$ und $0 < \lambda < 1$, so heißt I *strikt konvex*.

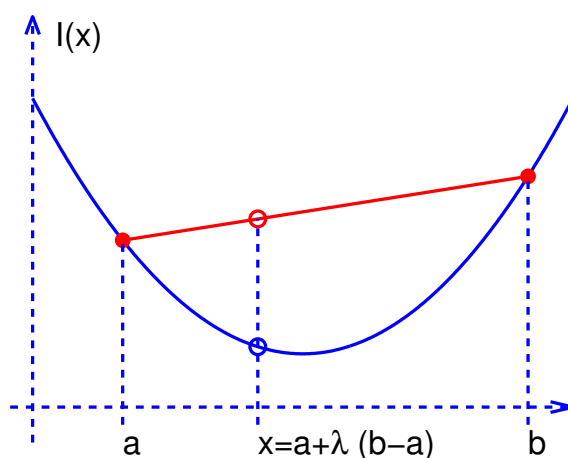


Abb. 5.1 Konvexe Funktionen.

Zwischen den Relationen (5.1) und (5.2) gibt es nun den folgenden Zusammenhang.

Satz (5.3)

Sei $X \subset V$ nichtleer und konvex, $I : X \rightarrow \mathbb{R}$ ein Funktional, das für alle $y_0 \in X$ in allen Richtungen $v \in V$ GÄTEAUX-differenzierbar ist. Dann gelten:

a) Das Funktional I ist genau dann konvex auf X , wenn

$$\forall y_0, y_0 + v \in X : \quad I(y_0 + v) \geq I(y_0) + \delta I(y_0; v).$$

b) Das Funktional I ist genau dann strikt konvex auf X , wenn

$$\forall y_0, y_0 + v \in X, \quad v \neq 0 : \quad I(y_0 + v) > I(y_0) + \delta I(y_0; v).$$

Beweis:

zu a) \Rightarrow : Ist I konvex, so gilt nach (5.2) für $y_0, y_0 + v \in X$ und $\lambda \in]0, 1[$:

$$I(y_0 + \lambda v) \leq I(y_0) + \lambda (I(y_0 + v) - I(y_0)).$$

Dies umgeformt ergibt

$$\frac{I(y_0 + \lambda v) - I(y_0)}{\lambda} \leq I(y_0 + v) - I(y_0).$$

Hieraus erhalten wir die Behauptung für $\lambda \rightarrow 0$.

\Leftarrow : Zu $a, b \in X$ und $\lambda \in [0, 1]$ sei $y_0 := a + \lambda(b - a)$.

Mit $v := -\lambda(b - a)$ folgt aus (5.1):

$$I(y_0 + v) = I(a) \geq I(a + \lambda(b - a)) - \lambda \delta I(y_0; b - a)$$

und genauso mit $w := (1 - \lambda)(b - a)$:

$$I(y_0 + w) = I(b) \geq I(a + \lambda(b - a)) + (1 - \lambda) \delta I(y_0; b - a).$$

Multipliziert man nun die erste Ungleichung mit $(1 - \lambda) \geq 0$ und die zweite mit $\lambda \geq 0$ und addiert sodann, so erhält man

$$(1 - \lambda) I(a) + \lambda I(b) \geq I(a + \lambda(b - a)),$$

und damit (5.2).

zu b): Der Nachweis von \Leftarrow erfolgt wie in a); allerdings wird $b \neq a$ und $\lambda \in]0, 1[$ vorausgesetzt.

\Rightarrow : Da eine strikt konvexe Funktion auch konvex ist, folgt zunächst für $y_0, y_0 + v \in X$ und $v \neq 0$ nach a):

$$I(y_0 + \frac{1}{2}v) \geq I(y_0) + \frac{1}{2}\delta I(y_0; v).$$

Aufgrund der strikten Konvexität hat man weiterhin

$$\begin{aligned} I(y_0 + \frac{1}{2}v) &= I(y_0 + v + \frac{1}{2}(-v)) \\ &< I(y_0 + v) + \frac{1}{2}(I(y_0) - I(y_0 + v)) \\ &= \frac{1}{2}(I(y_0 + v) + I(y_0)). \end{aligned}$$

Mit diesen beiden Abschätzungen folgt nun

$$I(y_0 + v) + I(y_0) > 2I(y_0 + \frac{1}{2}v) \geq 2I(y_0) + \delta I(y_0; v).$$

Dies entspricht gerade der behaupteten Ungleichung (5.1) in strikter Form. \square

Wir verallgemeinern nun die obige Definition von Konvexität, um hiermit auch nichtkonvexe Definitionsbereiche X erfassen zu können.

Definition (5.4)

Ein Funktional $I : X \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer nichtleeren Menge $X \subset V$ heißt *konvex* auf X , falls für alle $y_0, y_0 + v \in X$ die GÄTEAUX-Ableitung $\delta I(y_0; v)$ existiert und die Ungleichung (5.1) erfüllt ist.

Es heißt *strikt konvex* auf X , falls die Ungleichung (5.1) für alle $y_0, y_0 + v \in X$ mit $v \neq 0$ strikt erfüllt ist.

Als unmittelbare Folgerung ergibt sich der folgende Satz über hinreichende Bedingungen.

Satz (5.5) (Hinreichende Bedingung)

- a) Ist das Funktional $I : X \rightarrow \mathbb{R}$ konvex, so ist jedes $y_0 \in X$, das die notwendige Bedingung (2.4):

$$\forall y_0 + v \in X : \delta I(y_0; v) = 0$$

erfüllt, ein globales Minimum von I auf X .

- b) Ist das Funktional I sogar strikt konvex, so gibt es höchstens ein $y_0 \in X$, das die obige notwendige Bedingung erfüllt. Ein solches y_0 ist dann das eindeutig bestimmte strikte globale Minimum von I auf X .

Speziell untersuchen wir nun Funktionale in integraler Form auf Konvexität. Sei also

$$I(y) := \int_a^b f(t, y(t), y'(t)) dt, \quad y \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n),$$

wobei $f \in C^2([a, b] \times \mathbb{R}^{2n})$.

Die Konvexitätsungleichung (5.1) lautet dann

$$\int_a^b \left(f(t, y_0 + v, y'_0 + v') - f[t] - f_y[t]^T v(t) - f_{y'}[t]^T v'(t) \right) dt \geq 0. \quad (5.6)$$

Wir verlangen nun (im Sinn einer hinreichenden Bedingung!), dass der Integrand in (5.6) überall nichtnegativ ist. Für die strikte Konvexität des Funktionals lässt sich dies noch etwas abschwächen.

Definition (5.7)

f heißt (bei festem $t \in [a, b]$) bezüglich $(y, y') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ *stark konvex*, falls für alle $(y, y'), (y + v, y' + v')$ gilt

$$f(t, y + v, y' + v') - f(t, y, y') \geq f_y(t, y, y') v + f_{y'}(t, y, y') v',$$

wobei Gleichheit nur für $v^T v' = 0$ auftreten darf.

Beachten Sie hier insbesondere den Unterschied zur strikten Konvexität! Wir erhalten wir nun die folgende Aussage zur Konvexität bzw. strikten Konvexität des Funktionals I .

Satz (5.8)

Zu vorgegebenem $f \in C^2([a, b] \times \mathbb{R}^{2n})$ sowie $y_a, y_b \in \mathbb{R}^n$ werde das Funktional $I(y) := \int_a^b f(t, y(t), y'(t)) dt$ auf folgendem zulässigen Bereich betrachtet

$$X := \{y \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n) \mid y(a) = y_a, y(b) = y_b\}.$$

- a) Ist $(y, y') \mapsto f(t, y, y')$ für jedes feste $t \in [a, b]$ konvex, so ist auch das Funktional I konvex auf X .
- b) Ist $(y, y') \mapsto f(t, y, y')$ für jedes feste $t \in [a, b]$ sogar stark konvex, so ist das Funktional I auf X strikt konvex.

Beweis:

zu a): Dies ist mit (5.6) klar, da der Integrand für jedes $t \in [a, b]$ nichtnegativ ist.

zu b): Nach Voraussetzung gilt für den Integranden von (5.6)

$$f(t, y_0 + v, y'_0 + v') - f[t] - f_y[t] v(t) - f_{y'}[t] v'(t) \geq 0,$$

wobei Gleichheit nur für $v(t)^T v'(t) = 0$ auftritt.

Würde (5.6) daher für ein $v \in X_0 = \{v \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n) \mid v(a) = v(b) = 0\}$ mit Gleichheit gelten, so wäre $v(t)^T v'(t) = 0$, für alle $t \in [a, b]$.

Die Integration dieser Gleichung über $[a, b]$ ergibt $\|v(t)\|_2 = \text{const.}$, $t \in [a, b]$, und daher aufgrund der Randbedingungen $v = 0$. Damit ist die strikte Konvexität von I gezeigt. \square

Beispiel (5.9)

Zu minimieren sei das Funktional

$$I(y) = \int_0^1 (4y(t) + y'(t)^2) dt$$

unter den Nebenbedingungen $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.

Die notwendigen Bedingungen (4.4) liefern die Randwertaufgabe

$$f_y - \frac{d}{dt} f_{y'} = 4 - 2y'' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

Dieses Randwertproblem hat die eindeutig bestimmte Lösung $y_0(t) = t^2$.

Ist y_0 nun tatsächlich eine Lösung dieser Variationsaufgabe?

Man sieht unmittelbar, dass $f(y, y') = 4y + (y')^2$ auf \mathbb{R}^2 stark konvex ist. Damit ist das Funktional I nach Satz (5.8) auf X strikt konvex und y_0 somit nach Satz (5.5) das eindeutig bestimmte strikte globale Minimum der Variationsaufgabe. Man beachte insbesondere, dass f jedoch *nicht* strikt konvex ist.

Beispiel (5.10) (Geodätische auf einem Zylinder)

Zu bestimmen seien die Geodätischen auf dem Zylinder $x^2 + y^2 - 1 = 0$, also die kürzesten Kurven auf dem Zylindermantel, die vorgegebene Punkte A und B verbinden. In Zylinderkoordinaten (r, θ, z) mit

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z, \quad (r = 1)$$

sei dann $A = (\theta_a, z_a)$, $B = (\theta_b, z_b)$. O.E.d.A. setzen wir $0 < \theta_b - \theta_a \leq \pi$ voraus und nehmen an, dass sich die verbindende Geodätische (in Zylinderkoordinaten) als Funktion $z = z(\theta)$ mit

$$z \in X := \{z \in C^1[\theta_a, \theta_b] : z(\theta_a) = z_a, z(\theta_b) = z_b\}$$

beschreiben lässt. In kartesischen Koordinaten lautet die zugehörige Kurve dann

$$c(\theta) = (x(\theta), y(\theta), z(\theta))^T = (\cos \theta, \sin \theta, z(\theta))^T$$

und die Länge der Kurve c ist gegeben durch

$$L(z) = \int_{\theta_a}^{\theta_b} \sqrt{1 + z'(\theta)^2} d\theta.$$

Somit ist also $L(z)$ über $z \in X$ zu minimieren. Die zugehörige EULER-LAGRANGE-Gleichung lautet (vgl. (2.27))

$$z' / \sqrt{1 + z'^2} = \text{const.}$$

und somit auch $z' = \text{const.}$ Da ferner $z \in X$ ist, erhalten wir insgesamt die verbindende Extremale

$$z_0(\theta) = z_a + \frac{z_b - z_a}{\theta_b - \theta_a} (\theta - \theta_a), \quad \theta_a \leq \theta \leq \theta_b.$$

Geometrisch beschreibt die zugehörige Geodätische $c_0(\theta)$ ein Teilstück des Schnitts des Zylinders mit einer die Punkte A und B enthaltenden Ebene. Die Ebene ist dabei so gewählt, dass der Hauptnormalenvektor der Kurve c_0 auf dem Zylindermantel senkrecht steht.

Minimiert z_0 nun tatsächlich das Funktional L über X ?

Der Integrand $f(\theta, z, z') = \sqrt{1 + z'^2}$ hängt nur von z' ab. Man sieht unmittelbar, dass $f_{z'z'} > 0$ gilt. f ist daher als Funktion von z' strikt konvex und somit auch als Funktion von (z, z') (bei festem θ) stark konvex!

Die Sätze (5.5) und (5.8) zeigen somit, dass z_0 ein striktes globales Minimum von L über X liefert.

6. Allgemeine Variationen

Neben den bisher behandelten Aufgaben treten allgemeinere Variationsprobleme auf, bei denen Vergleichskurven mit Unstetigkeitsstellen (Sprüngen oder Ecken) zugelassen sind, oder bei denen die Endzeit unbestimmt (frei) ist. Um auch für derartige Probleme notwendige Bedingungen ableiten zu können, ist es erforderlich, allgemeinere Variationen als die in Kapitel 2 angegebenen GÂTEAUX–Ableitungen zu betrachten. Insbesondere werden wir Variationen untersuchen, die bezüglich des Scharparameters ε *nichtlinear* sind. Im Folgenden erweitern wir die Klasse der Variationsaufgaben in mehreren Schritten.

A. Variationsaufgaben mit freiem Rand.

Wir betrachten Variationsaufgaben, bei denen weder die Anfangszeit (hier mit t_a bezeichnet) noch die Endzeit t_b vorgegeben sein müssen. Sie bilden freie Parameter der Aufgabe und sind „mit zu optimieren“. Weiterhin werden wir ein zusätzliches additives *Punktunktional* g in der Zielfunktion zulassen.

Variationsaufgabe (6.1)

Zu vorgegebenen C^2 Funktionen $f : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^{2n+2} \rightarrow \mathbb{R}$, Teilmengen $I_a, I_b \subset \{1, \dots, n\}$ und Randdaten y_{ia}, y_{jb} , $i \in I_a, j \in I_b$ bestimme man Zeiten $t_a < t_b$ sowie eine Funktion $y_0 \in C^1([t_a, t_b], \mathbb{R}^n)$, für die das Zielfunktional

$$I(y; t_a, t_b) := g(t_a, t_b, y(t_a), y(t_b)) + \int_{t_a}^{t_b} f(t, y(t), y'(t)) dt \quad (6.2)$$

minimiert wird unter den Nebenbedingungen

$$y_i(t_a) = y_{ia}, \quad y_j(t_b) = y_{jb}, \quad i \in I_a, j \in I_b. \quad (6.3)$$

Gesucht ist wieder ein *globales* Minimum.

Variationsaufgaben dieser Form, in der ein Punktunktional in der Zielfunktion auftritt, das von Anfangs- und Endpunkt der gesuchten Funktion abhängt, sind zuerst von MAYER¹²⁾ und BOLZA¹³⁾ untersucht worden.

Zur Herleitung notwendiger Bedingungen werden wir - wie zuvor - einparametrische Scharen von Vergleichsfunktionen konstruieren. Allerdings müssen wir jetzt darauf achten, dass auch die Anfangs- und Endzeiten mit variiert werden.

¹²⁾Adolph Mayer (1839–1907); Heidelberg

¹³⁾Oskar Bolza (1857–1942); University of Chicago, Freiburg

Wir nehmen an, dass die Variationsaufgabe (6.1) eine Lösung (y_0, t_a, t_b) besitzt, wobei $t_a < t_b$ gelte. Ferner sei die HESSE-Matrix $f_{y'y'}(t, y_0, y_0')$ im gesamten Intervall $t_a \leq t \leq t_b$ regulär. Mit den Ergebnissen aus Abschnitt 4 folgt dann, dass y_0 sogar eine C^2 -Funktion auf $[t_a, t_b]$ ist.

Einbettung (6.4)

1. Es seien $\tau_a, \tau_b :]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[\rightarrow \mathbb{R}$ beliebige C^2 -Funktionen mit der Eigenschaft $\tau_a(0) = t_a$ und $\tau_b(0) = t_b$. Wegen $t_a < t_b$ lässt sich $\varepsilon_0 > 0$ so klein wählen, dass $\tau_a(\varepsilon) < \tau_b(\varepsilon)$ auch für alle $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ gilt.
2. Es sei $v \in C^1([t_a, t_b], \mathbb{R}^n)$ beliebig.
3. Mit diesen Vorgaben bilden wir die folgenden Vergleichsfunktionen $y(\tau, \varepsilon)$ für $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ und $\tau \in [\tau_a(\varepsilon), \tau_b(\varepsilon)]$:

$$\begin{aligned} t(\tau, \varepsilon) &:= t_a + \frac{\tau - \tau_a(\varepsilon)}{\tau_b(\varepsilon) - \tau_a(\varepsilon)} (t_b - t_a) \\ y(\tau, \varepsilon) &:= y_0(t) + \varepsilon v(t). \end{aligned} \tag{6.5}$$

Man beachte, dass die Funktionen y_0 und v auf dem *festen* Intervall $[t_a, t_b]$ erklärt sind. Durch die Transformation $\tau \mapsto t$ werden beide Funktionen auf ein variables (von ε abhängiges) Intervall $[\tau_a, \tau_b]$ „gestreckt“.

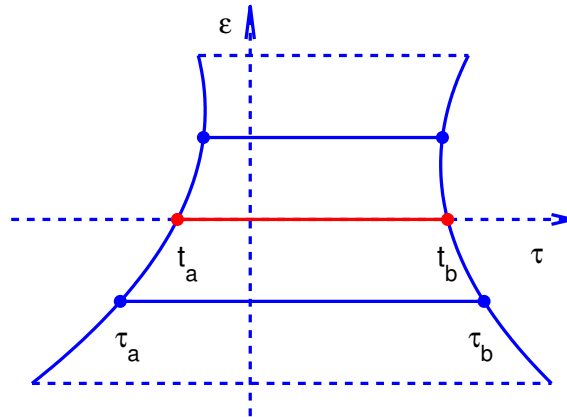


Abb. 6.1 Zeitvariation $[\tau_a(\varepsilon), \tau_b(\varepsilon)]$.

Wir berechnen die später benötigten partiellen Ableitungen der Variation $y(\tau, \varepsilon)$:

$$\begin{aligned} y_\tau(\tau, \varepsilon) &:= \left(\frac{t_b - t_a}{\tau_b - \tau_a} \right) \left[y_0'(t) + \varepsilon v'(t) \right] \\ y_\varepsilon(\tau, \varepsilon) &:= v(t) - \left(\tau_{a\varepsilon} + \frac{\tau - \tau_a}{\tau_b - \tau_a} (\tau_{b\varepsilon} - \tau_{a\varepsilon}) \right) \left(\frac{t_b - t_a}{\tau_b - \tau_a} \right) \left[y_0'(t) + \varepsilon v'(t) \right]. \end{aligned}$$

Speziell für $\varepsilon = 0$ wird $\tau_a(0) = t_a$, $\tau_b(0) = t_b$ und $\tau = t(\tau, 0) = t$. Man erhält daher für $t_a \leq t \leq t_b$

$$\begin{aligned}
y_\tau(t, 0) &= y_0'(t) \\
y_\varepsilon(t, 0) &= v(t) - \left(\tau_{a\varepsilon} + \frac{t - t_a}{t_b - t_a} (\tau_{b\varepsilon} - \tau_{a\varepsilon}) \right) y_0'(t)
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Die Ausdrücke

$$\delta t_a := \tau_{a\varepsilon} := \tau_{a\varepsilon}(0), \quad \delta t_b := \tau_{b\varepsilon} := \tau_{b\varepsilon}(0) \tag{6.7}$$

heißen die *ersten Variationen der Intervallgrenzen*. Die Funktion

$$\delta y(t) := v(t), \quad t_a \leq t \leq t_b \tag{6.8}$$

heißt die *erste Variation der abhängigen Variablen* y . An den Intervallenden schreiben wir abkürzend $\delta y_a := \delta y(t_a)$, $\delta y_b := \delta y(t_b)$.

Bei den linearen Variationen des letzten Kapitels war stets $\delta y = y_\varepsilon(t, 0)$. Für den neuen Ansatz (6.5) erhalten wir jedoch aufgrund der Zeitvariation in (6.6) einen zusätzlichen Korrekturterm.

Wertet man (6.6) speziell an den Intervallenden t_a, t_b aus, so erhält man

$$\begin{aligned}
y_{a\tau} &:= y_\tau(t_a, 0) = y_0'(t_a) \\
y_{b\tau} &:= y_\tau(t_b, 0) = y_0'(t_b) \\
y_{a\varepsilon} &:= y_\varepsilon(t_a, 0) = v(t_a) - \tau_{a\varepsilon} y_0'(t_a) \\
y_{b\varepsilon} &:= y_\varepsilon(t_b, 0) = v(t_b) - \tau_{b\varepsilon} y_0'(t_b).
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Wir setzen nun die Variation $y(\tau, \varepsilon)$ in das Zielfunktional (6.2) ein:

$$\begin{aligned}
J(\varepsilon) &:= I(y(\cdot, \varepsilon), \tau_a(\varepsilon), \tau_b(\varepsilon)) \\
&= g(\tau_a, \tau_b, y(\tau_a, \varepsilon), y(\tau_b, \varepsilon)) + \int_{\tau_a}^{\tau_b} f(\tau, y(\tau, \varepsilon), y_\tau(\tau, \varepsilon)) d\tau.
\end{aligned}$$

Für alle zulässigen Variationen muss die *erste Variation* des Zielfunctionals $\delta I := J'(0)$ verschwinden. Wir rechnen dazu die Ableitung aus. Dabei sind bei der Differentiation des Integrals auch die Integralgrenzen nach dem Parameter ε zu differenzieren. Man erhält

$$\begin{aligned}
\delta I &= J'(0) = g_{t_a} \tau_{a\varepsilon} + g_{t_b} \tau_{b\varepsilon} \\
&+ g_{y_a}^T \left(\tau_{a\varepsilon} y_\tau(t_a, 0) + y_\varepsilon(t_a, 0) \right) + g_{y_b}^T \left(\tau_{b\varepsilon} y_\tau(t_b, 0) + y_\varepsilon(t_b, 0) \right) \\
&+ f[t_b] \tau_{b\varepsilon} - f[t_a] \tau_{a\varepsilon} + \int_{t_a}^{t_b} \left(f_y^T y_\varepsilon(t, 0) + f_{y'}^T y_{\tau\varepsilon}(t, 0) \right) dt.
\end{aligned}$$

Mit den Beziehungen (6.9) vereinfacht sich dies zu

$$\begin{aligned} \delta I &= \left(g_{t_a} - f[t_a] \right) \tau_{a\varepsilon} + \left(g_{t_b} + f[t_b] \right) \tau_{b\varepsilon} + g_{y_a}^T v(t_a) + g_{y_b}^T v(t_b) \\ &+ \int_{t_a}^{t_b} \left(f_y^T y_\varepsilon(t, 0) + f_{y'}^T y_{\tau\varepsilon}(t, 0) \right) dt. \end{aligned}$$

Der zweite Summand im Integral wird durch partielle Integration umformt. Mit $y_{\tau\varepsilon}(t, 0) = y_{\varepsilon\tau}(t, 0) = d/dt (y_\varepsilon(t, 0))$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{t_a}^{t_b} f_{y'}^T y_{\tau\varepsilon}(t, 0) dt &= f_{y'}[t]^T y_\varepsilon(t, 0) \Big|_{t_a}^{t_b} - \int_{t_a}^{t_b} \left(\frac{d}{dt} f_{y'} \right)^T y_\varepsilon(t, 0) dt \\ &= f_{y'}[t_b]^T \left(v(t_b) - \tau_{b\varepsilon} y'_0(t_b) \right) - f_{y'}[t_a]^T \left(v(t_a) - \tau_{a\varepsilon} y'_0(t_a) \right) \\ &- \int_{t_a}^{t_b} \left(\frac{d}{dt} f_{y'} \right)^T y_\varepsilon(t, 0) dt. \end{aligned}$$

Dies in den obigen Ausdruck eingesetzt, ergibt schließlich die folgende Darstellung der ersten Variation

$$\begin{aligned} \delta I &= \left(g_{t_a} - H[t_a] \right) \delta t_a + \left(g_{t_b} + H[t_b] \right) \delta t_b \\ &+ \left(g_{y_a} - f_{y'}[t_a] \right)^T \delta y_a + \left(g_{y_b} + f_{y'}[t_b] \right)^T \delta y_b \\ &+ \int_{t_a}^{t_b} \left(f_y - \frac{d}{dt} f_{y'} \right)^T y_\varepsilon(t, 0) dt. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Hierbei bezeichnet wie früher

$$H(t, y, y') := f(t, y, y') - y'^T f_{y'}(t, y, y') \tag{6.11}$$

die HAMILTON-Funktion der Variationsaufgabe (6.1).

Für alle *zulässigen* Variationen $(\tau_a(\varepsilon), \tau_b(\varepsilon), y(\tau, \varepsilon))$ muss die erste Variation nun verschwinden. Hieraus lassen sich die notwendigen Bedingungen erster Ordnung ablesen.

Wir fassen diese in folgendem Satz zusammen.

Satz (6.12) (Notwendige Bedingungen erster Ordnung II)

Sei (y_0, t_a, t_b) eine C^2 -Lösung der Variationsaufgabe (6.1) mit $t_a < t_b$. Dann gelten die folgenden notwendigen Bedingungen:

- a) Für alle $t \in [t_a, t_b]$ gilt die EULER-LAGRANGE-Gleichung (einseitige Ableitungen an den Intervallgrenzen):

$$f_y[t] - \frac{d}{dt} f_{y'}[t] = 0.$$

- b) Bezüglich der abhängigen Variablen y gelten die natürlichen Randbedingungen (Transversalitätsbedingungen)

$$\frac{\partial g}{\partial y_{a i}} - f_{y_i'}[t_a] = 0, \quad i \notin I_a$$

$$\frac{\partial g}{\partial y_{b j}} + f_{y_j'}[t_b] = 0, \quad j \notin I_b$$

- c) Ist die Anfangszeit t_a bzw. die Endzeit t_b nicht vorgeschrieben, so gilt die natürliche Randbedingung

$$\frac{\partial g}{\partial t_a} - H[t_a] = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial g}{\partial t_b} + H[t_b] = 0.$$

Dabei ist H die HAMILTON-Funktion gemäß (6.11).

Beweis:

zu a): Wählt man $\tau_a(\varepsilon) \equiv t_a$, $\tau_b(\varepsilon) \equiv t_b$, und $v \in C^2([t_a, t_b], \mathbb{R}^n)$ mit $v(t_a) = v(t_b) = 0$ beliebig, so ist die zugehörige Variation (6.5) zulässig und es gilt $\delta t_a = \delta t_b = 0$ sowie $\delta y_a = \delta y_b = 0$, $y_\varepsilon(t, 0) = v(t)$. Damit folgt die EULER-LAGRANGE-Gleichung unmittelbar aus (6.10) und dem Fundamentallemma.

zu b): Für ein festes $i \in \{1, \dots, n\} \setminus I_a$ setze man $\tau_a(\varepsilon) \equiv t_a$, $\tau_b(\varepsilon) \equiv t_b$, $v_i(t) := t_b - t$ und $v_j = 0$ für $j \neq i$. Die zugehörige Variation (6.5) ist zulässig mit $\delta t_a = \delta t_b = 0$, $\delta y_{a i} = t_b - t_a \neq 0$ und $\delta y_{a j} = 0$ für $(j \neq i)$, sowie $\delta y_b = 0$. Aus (6.10) und a) folgt somit die natürliche Randbedingung

$$\frac{\partial g}{\partial y_{a i}} - f_{y_i'}[t_a] = 0.$$

Analog konstruiert man eine zulässige Variation für die natürlichen Randbedingungen am rechten Rand.

zu c): Wir betrachten o.E.d.A. nur den linken Rand und wählen die Einbettung folgendermaßen: $\tau_a(\varepsilon) = t_a + \varepsilon$, $\tau_b(\varepsilon) \equiv t_b$ und $v = 0$. Die zugehörige Variation (6.5) ist dann zulässig mit $\delta t_a = 1$, $\delta t_b = 0$ und $\delta y_a = \delta y_b = 0$. Die natürliche Randbedingung folgt damit aus (6.10) und a). \square

Beispiel (6.13) Newtonscher Rotationskörper kleinsten Widerstands¹⁴

Als Beispiel für eine Variationsaufgabe mit freiem Rand betrachten wir das NEWTONSche Problem der Bestimmung eines axial angeströmten Rotationskörpers mit geringstem Luftwiderstand. NEWTON hat dieses Variationsproblem bereits 1687 untersucht (also vor BERNOULLIS Brachistochrone) und hat den Beweis für seine Lösung 1694 in einem Brief an GREGORY mitgeteilt.

Es geht darum, die Form eines rotationssymmetrischen, axial angeströmten Körpers mit vorgegebener Länge L und vorgegebener Dicke $2R$ zu bestimmen, so dass der Körper minimalen Luftwiderstand hat. NEWTON nahm an, dass der Körper vorne aus einer flachen Kreisfläche mit Radius $r < R$ besteht, an den sich ein Rotationskörper anschließt, dessen Mantelfläche durch eine (glatte) Funktion $y = y(x)$, $r \leq x \leq R$, beschrieben wird.

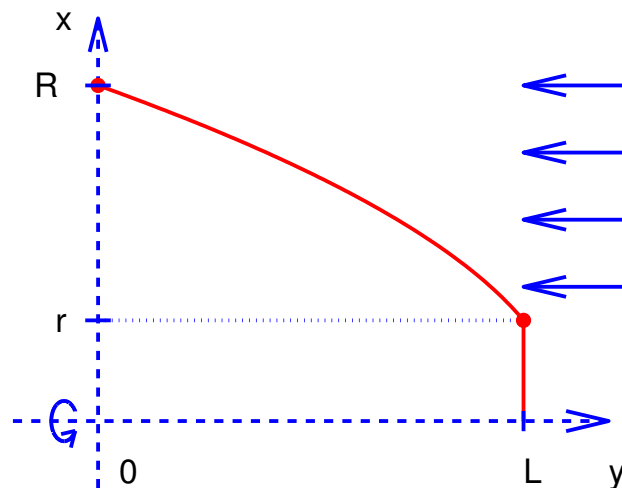


Abb. 6.2 Widerstandsminimaler Rotationskörper.

Aufgrund des NEWTONSchen Ansatzes für den Luftwiderstand (die NEWTONSchen Überlegungen hierzu sind beispielsweise im Buch von FUNK beschrieben) gelangt man zu der folgenden Variationsaufgabe:

Zu vorgegebenen Daten $R, L > 0$ ist eine Anfangszeit $r \in [0, R[$ und eine Funktion $y \in C^1[r, R]$ gesucht, die das Funktional

$$I(r, y) = \frac{1}{2} r^2 + \int_r^R \frac{x}{1 + (y')^2} dx$$

unter den Nebenbedingungen $y(r) = L$, $y(R) = 0$ minimiert.

¹⁴Isaac Newton (1642–1727); Cambridge

Das NEWTONsche Problem ist gerade eine Variationsaufgabe vom Typ (6.1) mit freier Anfangszeit r und einem Punktfunktional $g \neq 0$. Wir wenden die notwendigen Bedingungen aus Satz (6.12) an.

Mit $f(x, y, y') := x/(1 + y'^2)$ folgt die EULER-LAGRANGE-Gleichung

$$f_{y'} = - \frac{2 x y'}{(1 + (y')^2)^2} = C = \text{konstant.} \quad (6.14)$$

Die natürliche Randbedingung für die freie Anfangszeit - vgl. (6.12) c) - lautet hier $r - H[r] = 0$, wobei $H = f - y' f_{y'}$ die HAMILTON-Funktion bezeichnet. Eine Umformung dieser Bedingung führt auf

$$y'(r) = \pm 1.$$

Aus geometrischen Gründen kommt nur das negative Vorzeichen in Frage.

Setzt man diese Beziehung nun in die EULER-LAGRANGE-Gleichung (6.14) ein, so findet man $C = r/2$ und damit - wieder aus (6.14):

$$4 x y' + r (1 + (y')^2)^2 = 0.$$

Für eine numerische Lösung differenzieren wir diese Differentialgleichung nochmals und erhalten so die Randwertaufgabe

$$y'' = - \frac{y'}{x + r y' (1 + y'^2)}, \quad y(r) = L, \quad y(R) = 0, \quad y'(r) = -1,$$

die über dem *variablen* Intervall $x \in [r, R]$ zu lösen ist.

Durch die Transformation $x = r + t(R - r)$, $0 \leq t \leq 1$ wird diese auf das feste Intervall $[0, 1]$ transformiert.

Mit $y_1(t) := y(x)$, $y_2(t) := y'(x)$, $y_3(t) := r$ ergibt sich schließlich das Randwertproblem

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 (R - y_3) \\ y_2' &= - \frac{y_2 (R - y_3)}{y_3 + t (R - y_3) + y_2 y_3 (1 + y_2^2)} \\ y_3' &= 0, \\ y_1(0) &= L, \quad y_2(0) = -1, \quad y_1(1) = 0. \end{aligned} \quad (6.15)$$

(6.15) ist eine Zweipunkt-Randwertaufgabe in Standardform, die mit numerischen Algorithmen, beispielsweise dem Programm BNDSCO, gelöst werden kann. Für die Parameter $R = 1$, $L = 1$, $L = 1.5$ und $L = 2$ sind die hiermit berechneten Rotationskörper in Abbildung 6.3 dargestellt.

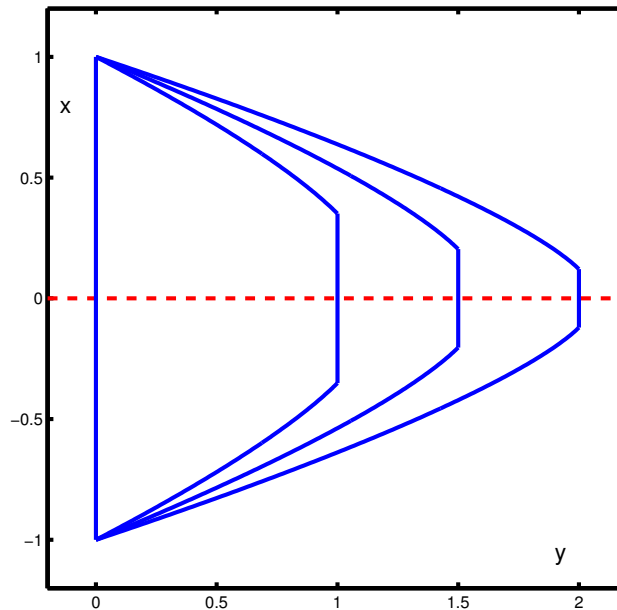


Abb. 6.3 Widerstandsminimaler Rotationskörper, $L/R = 1; 1.5; 2$.

B. Variationsaufgaben mit gebundenem Rand.

Wir erweitern die Klasse der Variationsaufgaben auf den Fall *nichtlinearer* Randbedingungen. Hierbei sind nun auch Kopplungen der Randdaten untereinander und mit einer freien Anfangs- oder Endzeit zugelassen.

Variationsaufgabe (6.16)

Zu $n, k \in \mathbb{N}$ und vorgegebenen C^2 Funktionen $f : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^{2n+2} \rightarrow \mathbb{R}$ und $r : \mathbb{R}^{2n+2} \rightarrow \mathbb{R}^k$ bestimme man Zeiten $t_a < t_b$ sowie eine Funktion $y_0 \in C^1([t_a, t_b], \mathbb{R}^n)$, für die das Zielfunktional

$$I(y; t_a, t_b) := g(t_a, t_b, y(t_a), y(t_b)) + \int_{t_a}^{t_b} f(t, y(t), y'(t)) dt \quad (6.17)$$

unter den Nebenbedingungen

$$r(t_a, t_b, y(t_a), y(t_b)) = 0 \quad (6.18)$$

minimal wird.

Sei (y_0, t_a, t_b) eine Lösung dieser Variationsaufgabe mit $t_a < t_b$ sowie $y_0 \in C^2[t_a, t_b]$. Die Annahme, dass y_0 zweifach stetig differenzierbar sei, lässt sich unter der Regularitätsvoraussetzung $f_{y'y'}[t]$ regulär ($\forall t \in [t_a, t_b]$) wieder mit den klassischen Variationen aus Abschnitt 2 (bei festen Rändern) beweisen.

Um redundante Randbedingungen auszuschließen, nehmen wir ferner an, dass die folgende (zweite) *Regularitätsbedingung* (*constraint qualification*) erfüllt ist

$$\text{Rang} \left[Jr(t_a, t_b, y_0(t_a), y_0(t_b)) \right] = k, \quad (6.19)$$

d.h. die JACOBI-Matrix Jr der Randfunktion soll maximalen Rang besitzen.

Da Jr eine $(k, 2n + 2)$ -Matrix ist wird mit (6.19) insbesondere auch $k \leq 2n + 2$ vorausgesetzt. Im Fall $k = 2n + 2$ legen die Randbedingungen (6.18) die Anfangs- und Endpunkte $(t_a, y(t_a))$ und $(t_b, y(t_b))$ bereits lokal eindeutig fest (vgl. den Umkehrsatz der Analysis). In diesem Fall ist (6.16) daher eine Variationsaufgabe mit festen Rändern, die wir bereits in Kapitel 2 und 4 behandelt haben. Im Folgenden nehmen wir daher $k < 2n + 2$ an.

Wir betrachten eine Einbettung von y_0 analog zu (6.4). Wegen der zugelassenen nichtlinearen Randbedingungen soll diese hier jedoch auch nichtlinear von dem Einbettungsparameter ε abhängen können.

Einbettung (6.20)

1. Es seien $\tau_a, \tau_b :]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[\rightarrow \mathbb{R}$ C^2 -Funktionen mit der Eigenschaft $\tau_a(0) = t_a$ und $\tau_b(0) = t_b$. Ferner gelte $\tau_a(\varepsilon) < \tau_b(\varepsilon)$ für alle $|\varepsilon| < \varepsilon_0$.
2. Es sei $z : [t_a, t_b] \times]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[\rightarrow \mathbb{R}^n$ eine beliebige C^2 -Funktion mit $z(t, 0) = y_0(t)$.
3. Mit diesen Vorgaben bilden wir wie in (3.4) die Vergleichsfunktionen $y(\tau, \varepsilon)$ für $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ und $\tau \in [\tau_a(\varepsilon), \tau_b(\varepsilon)]$:

$$\begin{aligned} t(\tau, \varepsilon) &:= t_a + \frac{\tau - \tau_a(\varepsilon)}{\tau_b(\varepsilon) - \tau_a(\varepsilon)} (t_b - t_a) \\ y(\tau, \varepsilon) &:= z(t, \varepsilon). \end{aligned} \quad (6.21)$$

Man beachte, dass die Variation $z(t, \varepsilon)$ der abhängigen Variablen wieder auf dem *festen* Zeitintervall $[t_a, t_b]$ erklärt ist und die Zeitvariation wie zuvor in einer zusätzlichen affin-linearen Streckung des Intervalls besteht.

Wir setzen diese Vergleichskurven in das Zielfunktional ein, betrachten also

$$J(\varepsilon) := I(y(\cdot, \varepsilon), \tau_a(\varepsilon), \tau_b(\varepsilon)).$$

Mit einer analogen Rechnung wie in Teil A erhalten wir die erste Variation

$$\begin{aligned} \delta I := J'(0) &= \left(g_{t_a} - H[t_a] \right) \delta t_a + \left(g_{t_b} + H[t_b] \right) \delta t_b \\ &+ \left(g_{y_a} - f_{y'}[t_a] \right)^T \delta y_a + \left(g_{y_b} + f_{y'}[t_b] \right)^T \delta y_b \\ &+ \int_{t_a}^{t_b} \left(f_y - \frac{d}{dt} f_{y'} \right)^T y_\varepsilon(t, 0) dt. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Hierbei ist – wie in (6.7) $\delta t_a := \tau_{a\varepsilon} := \tau_{a\varepsilon}(0)$ und $\delta t_b := \tau_{b\varepsilon} := \tau_{b\varepsilon}(0)$. Weiterhin ergibt sich für $t_a \leq t \leq t_b$:

$$\begin{aligned} y_\varepsilon(t, 0) &= z_\varepsilon(t, 0) - \left(\tau_{a\varepsilon} + \frac{t - t_a}{t_b - t_a} (\tau_{b\varepsilon} - \tau_{a\varepsilon}) \right) y'_0(t), \\ \delta y(t) &:= v(t) := z_\varepsilon(t, 0), \\ \delta y_a &:= \delta y(t_a), \quad \delta y_b := \delta y(t_b). \end{aligned} \tag{6.23}$$

Für alle zulässigen Variationen (6.21) muss nun die erste Variation δI des Zielfunktionals verschwinden. Die sich hieraus ergebenden Folgerungen fassen wir wie folgt zusammen.

Satz (6.24) (Notwendige Bedingungen erster Ordnung III)

Sei (y_0, t_a, t_b) eine C^2 -Lösung der Variationsaufgabe (6.16) mit $t_a < t_b$, die die Regularitätsbedingung (6.19) erfüllt.

Dann gelten die folgenden notwendigen Bedingungen:

- a) Für alle $t \in [t_a, t_b]$ gilt die EULER-LAGRANGE-Gleichung

$$f_y[t] - \frac{d}{dt} f_{y'}[t] = 0.$$

- b) Es existieren LAGRANGE-Multiplikatoren $\nu \in \mathbb{R}^k$, so dass die folgenden natürlichen Randbedingungen (Transversalitätsbedingungen) gelten

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \frac{\partial}{\partial y_a} [g + \nu^T r] - f_{y'}[t_a] &= 0, & \frac{\partial}{\partial y_b} [g + \nu^T r] + f_{y'}[t_b] &= 0, \\ \text{(ii)} \quad \frac{\partial}{\partial t_a} [g + \nu^T r] - H[t_a] &= 0, & \frac{\partial}{\partial t_b} [g + \nu^T r] + H[t_b] &= 0. \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet H die HAMILTON-Funktion $H := f - y'^T f_{y'}$.

Bemerkung (6.25) (Lagrange-Multiplikatoren-Theorem)

Die notwendigen Bedingungen (6.24) lassen sich als ein LAGRANGE-Multiplikatoren-Theorem interpretieren: Koppelt man die Randbedingungen (6.18) mittels LAGRANGE-Multiplikatoren $\nu \in \mathbb{R}^k$ an das zu minimierende Funktional an, so ergibt sich das so genannte erweiterte Funktional

$$\hat{I}(y; t_a, t_b) := g(t_a, t_b, y(t_a), y(t_b)) + \nu^T r(t_a, t_b, y(t_a), y(t_b)) + \int_{t_a}^{t_b} f(t, y(t), y'(t)) dt.$$

Die notwendigen Bedingungen zur Minimierung dieses erweiterten Funktionals – bei freien Randdaten $t_a, t_b, y(t_a), y(t_b)$ gemäß (6.12) ergeben genau auf die notwendigen Bedingungen (6.24).

Diese generelle Prinzip, Nebenbedingungen an das zu minimierende Funktional *anzukoppeln*, gilt für viele weitere Typen von Nebenbedingungen. Wir werden wiederholt hierauf zurückkommen.

Bemerkung (6.26)

Die notwendigen Bedingungen (6.24) stimmen für ein Variationsprobleme vom Typ (6.1) mit denen aus Satz (6.12) überein. Die Randbedingungen haben nämlich dann die Gestalt

$$\begin{aligned} r_\ell &:= y_{i_\ell}(t_a) - y_{i_\ell a}, & \ell = 1, \dots, m_1, & \quad I_a = \{i_1, \dots, i_{m_1}\}, \\ r_{m_1+\ell} &:= y_{j_\ell}(t_b) - y_{j_\ell b}, & \ell = 1, \dots, m_2, & \quad I_b = \{j_1, \dots, j_{m_2}\}. \end{aligned}$$

Die anderen Randdaten $y_i(t_a)$, $i \notin I_a$ und $y_j(t_b)$, $j \notin I_b$, treten dagegen in r nicht auf. Die notwendigen Bedingungen (6.24) b) für diese Indizes liefern gerade die natürlichen Randbedingungen von (6.12) b). Die Auswertung von (6.24) b) für die Indizes $i \in I_a$ und $j \in I_b$ liefert dagegen lediglich Definitionen für die LAGRANGE-Multiplikatoren ν_i bzw. ν_j .

Ist die Anfangszeit t_a und/oder die Endzeit t_b in Problem (6.16) vorgeschrieben, so entfallen die entsprechenden natürlichen Randbedingungen in (6.24)b)(ii). Die anderen notwendigen Bedingungen bleiben hiervon unberührt.

Beweis zu (6.24)

zu a): Zunächst erkennt man wie im Beweis zu Satz (6.12) (gleiche Variation), dass y_0 die EULER-LAGRANGE-Gleichung auf $[t_a, t_b]$ erfüllt.

zu b): Eine Vergleichskurve $y(\tau, \varepsilon)$, $\tau_a(\varepsilon) \leq \tau \leq \tau_b(\varepsilon)$ gemäß (6.20) ist genau dann zulässig, wenn für alle $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ gilt:

$$r(\tau_a, \tau_b, y(\tau_a, \varepsilon), y(\tau_b, \varepsilon)) = 0.$$

Differenziert man diese Relation nach ε und setzt dann $\varepsilon = 0$ ein, so ergibt sich

$$(r_{t_a}) \delta t_a + (r_{t_b}) \delta t_b + (r_{y_a})^T \delta y_a + (r_{y_b})^T \delta y_b = 0 \in \mathbb{R}^k.$$

Hierbei ist zu beachten, dass nach unserer Notation Gradienten als *Spaltenvektoren* geschrieben werden, so ist beispielsweise r_{y_a} eine (n, k) -Matrix.

Fasst man diese Relation mit der Bedingung $\delta I = 0$ gemäß (6.22) zusammen, so erhält man das folgende homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} g_{t_a} - H[t_a] & g_{t_b} + H[t_b] & (g_{y_a} - f_{y'}[t_a])^T & (g_{y_b} + f_{y'}[t_b])^T \\ r_{t_a} & r_{t_b} & (r_{y_a})^T & (r_{y_b})^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta t_a \\ \delta t_b \\ \delta y_a \\ \delta y_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

welches für alle zulässigen Variationen erfüllt sein muss.

Wir kürzen dieses lineare Gleichungssystem mit $A \delta w = 0$ ab, wobei die Koeffizientenmatrix A also eine $(k + 1, 2n + 2)$ -Matrix ist.

Der Kern des Beweises besteht nun darin zu zeigen, dass es (wenigstens) $2n + 2 - k$ linear unabhängige Vektoren $\delta w = (\delta t_a, \delta t_b, \delta y_a^T, \delta y_b^T)^T$ zu zulässigen Variationen $y(\tau, \varepsilon)$ gibt.

Ist dies gezeigt, so folgt nämlich, dass der Kern der Matrix A wenigstens $(2n + 2 - k)$ -dimensional ist, und damit nach der Dimensionsformel für lineare Abbildungen $\text{Rang}(A) \leq k$ gilt. Aufgrund der Regularitätsbedingung (6.19) sind aber die letzten k Zeilen der Matrix A linear unabhängig – diese bilden ja gerade die JACOBI-Matrix Jr . Daher muss sich die erste Zeile von A als Linearkombination dieser k Zeilen darstellen lassen, d.h. es gibt einen Vektor $\nu \in \mathbb{R}^k$ mit $g_{t_a} - H[t_a] = -\nu^T r_{t_a}$, $g_{t_b} + H[t_b] = -\nu^T r_{t_b}$, $(g_{y_a} - f_{y'}[t_a])^T = -\nu^T (r_{y_a})^T$ und $(g_{y_b} + f_{y'}[t_b])^T = -\nu^T (r_{y_b})^T$. Diese Gleichungen bilden gerade die Behauptung der Aussage b).

Es bleibt also zu zeigen, dass sich wenigstens $2n + 2 - k$ linear unabhängige Vektoren δw konstruieren lassen. Wir wenden hierzu den Satz über implizite Funktionen auf die Randbedingungen (6.18) an. Wegen der vorausgesetzten Regularitätsbedingung lässt sich (6.18) nach k der Variablen $(t_a, t_b, y(t_a), y(t_b))$ auflösen, genauer: k dieser $(2n + 2)$ Variablen lassen sich als C^2 -Funktionen der anderen $2n + 2 - k$ Variablen (lokal eindeutig) darstellen. Die Idee ist, diese frei wählbaren $2n + 2 - k$ Variablen jeweils unabhängig voneinander zu variieren. Um komplizierte und formale Indexschreibereien zu vermeiden, erläutern wir diese Idee für den Fall, dass diese Auflösung folgende einfache Form hat ($k = n + 1$)

$$(t_b, y(t_a)) = \Phi(t_a, y(t_b)). \quad (6.27)$$

Hierbei sei Φ eine auf einer Umgebung der Lösung $(t_a, y_0(t_b))$ definierte C^2 -Funktion mit Werten in einer geeigneten Umgebung der Lösung $(t_b, y_0(t_a))$.

Wir variieren nun jeweils eine der Koordinaten von $(t_a, y_0(t_b))$ und lassen die anderen unverändert.

Zur Variation von t_a setzen wir $\tau_a(\varepsilon) := t_a + \varepsilon$ und bestimmen $\tau_b(\varepsilon)$ und $z_a(\varepsilon)$ für hinreichend kleine $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ aus den Randbedingungen (6.27):

$$(\tau_b(\varepsilon), z_a(\varepsilon)) := \Phi(\tau_a(\varepsilon), y_0(t_b)).$$

Es ist klar, dass damit τ_b und z_a in C^2 -weise von ε abhängen und dass – wegen der lokalen Eindeutigkeit der Auflösung (6.27) – für $\varepsilon = 0$ die Lösung reproduziert wird: $\tau_b(0) = t_b$, $z_a(0) = y_0(t_a)$. Damit setzen wir für $t_a \leq t \leq t_b$ und $|\varepsilon| < \varepsilon_0$

$$z(t, \varepsilon) := y_0(t) + \frac{t_b - t}{t_b - t_a} (z_a(\varepsilon) - y_0(t_a)).$$

Nach Konstruktion wird hiermit eine zulässige Einbettung gemäß (6.20) erklärt. Für die ersten Variationen ergibt sich

$$\delta t_a = 1, \quad \delta y_b = 0. \quad (6.28)$$

Analog gehen wir vor, um beispielsweise die j -te Koordinate von $y_0(t_b)$ zu variieren ($j \in \{1, \dots, n\}$ fest). Wir setzen $\tau_a(\varepsilon) := t_a$ und $z_b(\varepsilon) := y_0(t_b) + \varepsilon e_j$, wobei

$e_j \in \mathbb{R}^n$ den j -ten kanonischen Einheitsvektor bezeichnet. Für hinreichend kleines $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ liegt $(t_a, z_b(\varepsilon))$ dann im Definitionsbereich von Φ und wir können definieren:

$$(\tau_b(\varepsilon), z_a(\varepsilon)) := \Phi(t_a, z_b(\varepsilon)).$$

Wiederum sind τ_b und z_a C^2 -Funktionen von ε , die für $\varepsilon = 0$ die Lösung reproduzieren: $\tau_b(0) = t_b$, $z_a(0) = y_0(t_a)$. Für $t_a \leq t \leq t_b$ und $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ setzen wir dann

$$\begin{aligned} z(t, \varepsilon) &:= y_0(t) + v(t, \varepsilon) \\ v(t, \varepsilon) &:= [z_b(\varepsilon) - y_0(t_b)] + \frac{t_b - t}{t_b - t_a} \left([z_a(\varepsilon) - y_0(t_a)] - [z_b(\varepsilon) - y_0(t_b)] \right). \end{aligned}$$

Man überzeugt sich, dass auch diese Einbettung zulässig ist und die folgenden ersten Variationen ergibt

$$\delta t_a = 0, \quad \delta y_b = e_j. \quad (6.29)$$

Mit (6.28) und (6.29) haben wir insgesamt $n + 1$ unabhängige Variationen δw zu zulässigen Einbettungen konstruiert.

Es ist klar, dass eine analoge Konstruktionen möglich ist, wenn die Zahl der Randbedingungen verschieden von $n + 1$ ist, bzw. wenn sich die Randbedingungen anstelle von (6.27) nach anderen Koordinaten auflösen lassen. \square

Beispiel (6.30) (Periodische Randbedingungen)

Wir betrachten eine Variationsaufgabe mit periodischen Randbedingungen. Zu vorgegebenen Daten $a < b \in \mathbb{R}$ und einer C^2 -Funktion $f : [a, b] \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist das Funktional

$$I(y) := \int_a^b f(t, y(t), y'(t)) dt$$

unter der Nebenbedingung $y(a) = y(b)$ zu minimieren.

Neben den üblichen EULER-LAGRANGE-Gleichungen ergeben sich aus (6.24) mit $r := y(a) - y(b)$ die folgenden notwendigen Bedingungen

$$\frac{\partial}{\partial y_a} (\nu^T r) = \nu = f_{y'}[a], \quad \frac{\partial}{\partial y_b} (\nu^T r) = -\nu = -f_{y'}[b].$$

Hierbei ist $\nu \in \mathbb{R}^n$ ein LAGRANGE-Multiplikator. Im vorliegenden Fall lässt sich dieser eliminieren und wir erhalten folgende Form der natürlichen Randbedingungen

$$f_{y'}[a] = f_{y'}[b].$$

Die geforderte Periodizität der Vergleichskurven hat also gerade die Periodizität der Funktion $f_{y'}$ für die Lösung der Variationsaufgabe zur Folge.

Beispiel (6.31)

Zu minimieren sei das Funktional

$$I(y) := \int_0^{t_b} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dt$$

unter den Nebenbedingungen

$$y(0) = 1 \quad \text{und} \quad (t_b - 9)^2 + y_b^2 = 9, \quad y > 0.$$

Dabei sei $y \in C^1[0, t_b]$ und $y_b := y(t_b)$; die Endzeit t_b sei frei.

Da der Integrand des Zielfunktionals von t unabhängig ist, muss die HAMILTON-Funktion konstant sein. Wir erhalten

$$H = f - y' f_{y'} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} - y' \frac{y'}{y \sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{y \sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{D} = \text{konstant}$$

und hieraus mittels Trennung der Variablen

$$\begin{aligned} y \sqrt{1+y'^2} = D &\implies y' = \pm \frac{\sqrt{D^2 - y^2}}{y} \\ &\implies \int \frac{y}{\sqrt{D^2 - y^2}} dy = \pm \int dt \\ &\implies -\sqrt{D^2 - y^2} = \pm(t - C) \\ &\implies (t - C)^2 + y^2 = D^2. \end{aligned}$$

Die Extremalen sind also Kreise mit Mittelpunkt auf der t -Achse. Aus der Anfangsbedingung $y(0) = 1$ folgt $D^2 = C^2 + 1$. Aufgrund der Randbedingungen macht nur der Fall $C > 0$ Sinn. Wegen der Nebenbedingung $y > 0$ ist auch $H = 1/D > 0$.

Zur Bestimmung der Konstanten C und D benutzen wir nun die natürlichen Randbedingungen aus Satz (6.24) b):

$$\begin{aligned} t_b \text{ frei} &\implies \frac{\partial}{\partial t_b} \left[\nu \left((t_b - 9)^2 + y(t_b)^2 - 9 \right) \right] + H[t_b] = 0, \\ y(t_b) \text{ frei} &\implies \frac{\partial}{\partial y(t_b)} \left[\nu \left((t_b - 9)^2 + y(t_b)^2 - 9 \right) \right] + f_{y'}[t_b] = 0. \end{aligned}$$

Als Ergebnis erhalten wir vier Gleichungen für die Unbekannten t_b , y_b , C und ν :

$$\begin{aligned}
t_b^2 - 2Ct_b + y_b^2 &= 1 && \text{(Endpunkt liegt auf der Kurve)} \\
(t_b - 9)^2 + y_b^2 &= 9 && \text{(Endpunkt liegt auf dem Kreis)} \\
2\nu(t_b - 9) + \frac{1}{D} &= 0 && \text{(natürliche Randbedingung für } t_b) \\
2\nu y_b + \frac{y_b'}{D} = 2\nu y_b - \frac{t_b - C}{y_b \cdot D} &= 0 && \text{(natürliche Randbedingung für } y_b),
\end{aligned}$$

wobei $D = \sqrt{C^2 + 1}$ zu setzen ist.

Dieses nichtlineare Gleichungssystem besitzt nun eine eindeutig bestimmte Lösung mit $C > 0$:

$$C = 4 - \beta, \quad t_b = \frac{36 + 9\beta}{5 + \beta}, \quad y_b = \sqrt{(9 - t_b) \cdot (t_b - C)}, \quad \nu = \frac{1}{2(9 - t_b)D}.$$

Dabei ist $\beta = 1/18$. Die Extremale lautet schließlich:

$$y_0(t) = \sqrt{1 + 2Ct - t^2}, \quad 0 \leq t \leq t_b.$$

Man beachte, dass der Graph von y_0 im Endpunkt (t_b, y_b) senkrecht (transversal = querlaufend) auf der Zielkurve steht.

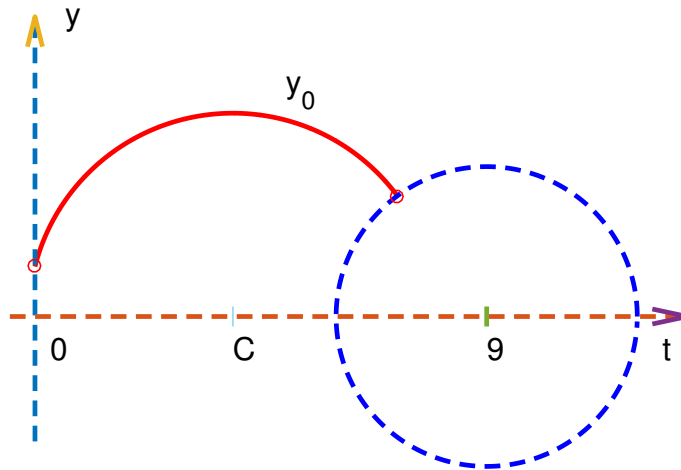


Abb. 6.4 Extremale zu Beispiel (6.31).

7. Nichtglatte Extremalen und Aufgaben der optimalen Steuerung

Bisher hatten wir Variationsaufgaben für glatte, also wenigstens stetig differenzierbare Funktionen behandelt. Daneben gibt es jedoch Variationsaufgaben, die keine glatte Lösung besitzen, wohl aber - in natürlicher Weise - solche mit *Ecken* (Unstetigkeitsstellen der ersten Ableitung) oder sogar *Sprüngen* (Unstetigkeitsstellen der Funktion selbst). Solche Lösungen treten beispielsweise dann auf, wenn zusätzliche Ungleichungsnebenbedingungen erfüllt werden müssen. Man spricht dabei auch von *Variationsaufgaben mit gebrochenen Extremalen*.

In Analogie zum letzten Abschnitt leiten wir für solche Variationsaufgaben notwendige Bedingungen her. Dazu nehmen wir an, dass die Lösung nur *endlich viele* Sprünge oder Ecken besitzt und konstruieren in jedem der Teilintervalle unabhängig Einbettungen wie in Abschnitt 6.

A. Nichtglatte Extremalen.

Wir definieren zunächst als Klasse der zulässigen Vergleichsfunktionen die stückweise C^k -Funktionen.

Definition (7.1)

Es seien $s, \ell, k \in \mathbb{N}_0$ und $n \in \mathbb{N}$.

- a) Mit \mathbf{Z}_s werde die Menge aller Zerlegungen $\Delta = (t_a, t_1, \dots, t_s, t_b)$ mit $t_a < t_1 < \dots < t_s < t_b$ eines Intervalls $[t_a, t_b]$ mit s inneren Knoten bezeichnet.

Man beachte, dass hierbei weder die Anfangszeit t_a noch die Endzeit t_b vorgegeben sein müssen. Ist dies jedoch der Fall, so schreiben wir statt dessen $\mathbf{Z}_s[t_a, t_b]$.

- b) y heißt eine *stückweise C^k -Funktion* (mit Werten in \mathbb{R}^n und s inneren Knoten), wenn es eine Zerlegung $\Delta = (t_a = t_0, t_1, \dots, t_s, t_{s+1} = t_b) \in \mathbf{Z}_s$ gibt, so dass die Funktion y das Intervall $[t_a, t_b]$ in den \mathbb{R}^n abbildet, in den Randpunkten t_a, t_b stetig ist und in jedem halboffenen Teilintervall $[t_j, t_{j+1}[$ eine C^k -Fortsetzung auf das abgeschlossene Intervall $[t_j, t_{j+1}]$ besitzt, also

$$\forall j \in \{0, \dots, s\} : \exists g_j \in C^k([t_j, t_{j+1}], \mathbb{R}^n) : y|_{[t_j, t_{j+1}[} = g_j|_{[t_j, t_{j+1}[} \cdot$$

Insbesondere besitzen damit alle Ableitungen von y bis zur Ordnung k in den Rand- und Zwischenpunkten einseitige Grenzwerte. Diese werden wie üblich mit

$$y^{(\nu)}(t_j^+) := g_j^{(\nu)}(t_j), \quad y^{(\nu)}(t_j^-) := g_{j-1}^{(\nu)}(t_j), \quad \nu = 0, \dots, k,$$

bezeichnet.

- c) Mit C_s^k werden die stückweisen C^k -Funktionen mit s inneren Knoten bezeichnet, mit $C_s^k(\Delta)$ oder auch $C_s^k(\Delta, \mathbb{R}^n)$ diejenigen C_s^k -Funktionen, die zu einer vorgegebenen Zerlegung $\Delta \in \mathbf{Z}_s$ gehören. Schließlich werden mit $C_s^k[t_a, t_b]$ oder auch $C_s^k([t_a, t_b], \mathbb{R}^n)$ diejenigen C_s^k -Funktionen bezeichnet, die zu einer Zerlegung $\Delta \in \mathbf{Z}_s[t_a, t_b]$ mit den festen Anfangs- und Endzeiten t_a, t_b gehören.
- d) Für $\ell < k$ werden mit $C_s^{\ell, k}$ bzw. $C_s^{\ell, k}(\Delta)$ oder $C_s^{\ell, k}[t_a, t_b]$ diejenigen C_s^k -Funktionen bezeichnet, die zugleich (globale) C^ℓ -Funktionen sind.

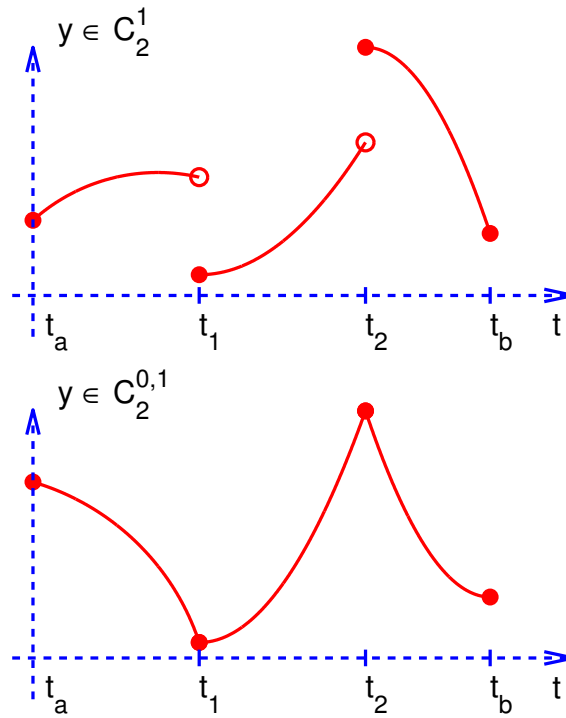


Abb. 7.1 Stückweise C^1 -Funktionen.

Für diese Funktionsklassen lässt sich nun die folgende Variationsaufgabe formulieren.

Problem (7.2). (Variationsaufgaben mit Sprüngen)

Zu $s \in \mathbb{N}_0$, $n, k \in \mathbb{N}$ und vorgegebenen C^2 -Funktionen $f : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^{s+2} \times \mathbb{R}^{(2s+2)n} \rightarrow \mathbb{R}$ und $r : \mathbb{R}^{s+2} \times \mathbb{R}^{(2s+2)n} \rightarrow \mathbb{R}^k$ bestimme man eine Zerlegung $\Delta = (t_a, t_1, \dots, t_s, t_b) \in \mathbf{Z}_s$ und eine Funktion $y \in C_s^1(\Delta, \mathbb{R}^n)$, für die das Zielfunktional

$$\begin{aligned}
 I(y; \Delta) &:= g\left(t_a, t_1, \dots, t_s, t_b, y(t_a), y(t_1^-), y(t_1^+), \dots, y(t_s^-), y(t_s^+), y(t_b)\right) \\
 &+ \int_{t_a}^{t_b} f(t, y(t), y'(t)) dt
 \end{aligned} \tag{7.3}$$

unter den Nebenbedingungen

$$r\left(t_a, t_1, \dots, t_s, t_b, y(t_a), y(t_1^-), y(t_1^+), \dots, y(t_s^-), y(t_s^+), y(t_b)\right) = 0 \tag{7.4}$$

minimal wird.

Es sei angemerkt, dass bei der obigen Formulierung des Variationsproblems maximale Freiheiten zugelassen sind. Weder sind Anfangszeit noch Endzeit vorschrieben, weder die (unbekannten!) Zwischenzeiten t_j , noch die Sprünge in der Lösung y der Variationsaufgabe. Einzig die Anzahl s der möglichen Sprungstellen ist fixiert, und dies aber auch nur im Sinn einer maximalen Anzahl.

Will man dagegen die zulässigen Vergleichsfunktionen einschränken, also etwa die Anfangs- oder Endzeit oder die Sprungzeitpunkte vorschreiben – oder nur stetige Vergleichsfunktionen zulassen, so kann man diese Nebenbedingungen durch Festlegung der Funktion r in (7.4) einbringen. Für eine vorgegebene Anfangszeit a setzt man beispielsweise $r_1 := t_a - a = 0$. Um die Stetigkeit der Vergleichskurven zu gewährleisten, kann man etwa $r_j := y(t_j^+) - y(t_j^-) = 0$, $j = 1, \dots, s$ setzen. Natürlich lassen sich auch gewisse Sprunghöhen dadurch vorschreiben, dass man etwa vorschreibt $r_j := y(t_j^+) - h_j(t_j, y(t_j^-)) = 0$, wobei h_j eine vorgegebene Funktion ist, die den rechtsseitigen Grenzwert der gesuchten Funktion y in Abhängigkeit vom linksseitigen Grenzwert festlegt.

Zur Herleitung der notwendigen Bedingungen gehen wir wieder analog zum Weg in Abschnitt 6 vor, wobei wir die Variationen unabhängig für die einzelnen Teilintervalle ansetzen.

Sei also (y_0, Δ) eine Lösung von (7.2), wobei $\Delta = (t_0 = t_a < t_1 < \dots < t_s < t_{s+1} = t_b) \in \mathbf{Z}_s$. Wir nehmen an, dass y_0 , genauer die intervallweisen C^1 -Fortsetzungen von y_0 , auf den (abgeschlossenen) Teilintervallen zweifach stetig differenzierbar sind. Schließlich setzen wir wieder eine Regularitätsbedingung für die Rand- und Sprungbedingungen voraus:

$$\text{Rang} \left[J r \left(t_a, t_1, \dots, t_b, y_0(t_a), y_0(t_1^-), y_0(t_1^+), \dots, y_0(t_b) \right) \right] = k \quad (7.5)$$

und konstruieren eine Einbettung wie folgt:

Einbettung (7.6)

1. Zu einem $\varepsilon_0 > 0$ seien $\tau_a = \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{s+1} = \tau_b :] - \varepsilon_0, \varepsilon_0[\rightarrow \mathbb{R}$ C^2 -Funktionen mit der Eigenschaft $\tau_j(0) = t_j$, $j = 0, \dots, s+1$ und $\tau_a(\varepsilon) < \tau_1(\varepsilon) < \dots < \tau_s(\varepsilon) < \tau_b(\varepsilon)$ für alle $|\varepsilon| < \varepsilon_0$.
2. Es sei $z : [t_a, t_b] \times] - \varepsilon_0, \varepsilon_0[\rightarrow \mathbb{R}^n$ eine beliebige Funktion mit $z(t, 0) = y_0(t)$, die sich auf jedem Teilquader $[t_j, t_{j+1}] \times] - \varepsilon_0, \varepsilon_0[$ durch eine C^2 -Funktion auf $[t_j, t_{j+1}] \times] - \varepsilon_0, \varepsilon_0[$ fortsetzen lässt ($j = 0, \dots, s$). Der Einfachheit halber werde diese Fortsetzung im Folgenden ebenfalls mit z bezeichnet. Nach (7.1) sind damit auch die Grenzwerte $z(t_j^\pm, \varepsilon)$, $z_t(t_j^\pm, \varepsilon)$, $z_\varepsilon(t_j^\pm, \varepsilon)$ und $z_{t\varepsilon}(t_j^\pm, \varepsilon)$ erklärt (als die entsprechenden Ableitungen der lokalen Fortsetzungen).
3. Mit diesen Vorgaben bilden wir die Vergleichsfunktionen $y(\tau, \varepsilon)$ für $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ und $\tau \in [\tau_a(\varepsilon), \tau_b(\varepsilon)]$:

$$t(\tau, \varepsilon) := t_j + \frac{\tau - \tau_j(\varepsilon)}{\tau_{j+1}(\varepsilon) - \tau_j(\varepsilon)} (t_{j+1} - t_j), \quad \tau_j(\varepsilon) \leq \tau \leq \tau_{j+1}(\varepsilon) \quad (7.7)$$

$$y(\tau, \varepsilon) := z(t(\tau, \varepsilon), \varepsilon), \quad \tau_a(\varepsilon) \leq \tau \leq \tau_b(\varepsilon).$$

Mit dieser Konstruktion ist $y(\cdot, \varepsilon)$ für jedes $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ eine C_s^2 -Funktion zum Gitter $\Delta(\varepsilon) = (\tau_a(\varepsilon), \tau_1(\varepsilon), \dots, \tau_b(\varepsilon))$, und damit eine zulässige Vergleichsfunktion für das Variationsproblem (7.2). Sie erfüllt allerdings i. Allg. nicht die Randbedingungen (7.4).

Wir setzen diese Vergleichsfunktionen in das Zielfunktional ein und erhalten

$$\begin{aligned} J(\varepsilon) &:= I(y(\cdot, \varepsilon), \Delta(\varepsilon)) \\ &= g\left(\tau_a, \tau_1, \dots, \tau_s, \tau_b, y(\tau_a, \varepsilon), y(\tau_1^-, \varepsilon), y(\tau_1^+, \varepsilon), \dots, y(\tau_b, \varepsilon)\right) \\ &\quad + \sum_{j=0}^s \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} f(\tau, y(\tau, \varepsilon), y_\tau(\tau, \varepsilon)) dt . \end{aligned}$$

Im Folgenden denken wir uns y in jedem Teilintervall ersetzt durch die entsprechende C^2 -Fortsetzung. $J(\varepsilon)$ hat nach Voraussetzung für alle zulässigen Vergleichskurven (die (7.4) erfüllen) in $\varepsilon = 0$ ein lokales Minimum. Die Differentiation nach ε liefert nun in Analogie zur Herleitung in Abschnitten 6 den folgenden Ausdruck für die erste Variation des Funktionals

$$\begin{aligned} \delta I &= J'(0) = g_{t_a} \tau_{a\varepsilon} + \sum_{j=1}^s g_{t_j} \tau_{j\varepsilon} + g_{t_b} \tau_{b\varepsilon} \\ &\quad + g_{y_a}^T \left(\tau_{a\varepsilon} y_\tau(t_a, 0) + y_\varepsilon(t_a, 0) \right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^s \left[g_{y_j^-}^T \left(\tau_{j\varepsilon} y_\tau(t_j^-, 0) + y_\varepsilon(t_j^-, 0) \right) + g_{y_j^+}^T \left(\tau_{j\varepsilon} y_\tau(t_j^+, 0) + y_\varepsilon(t_j^+, 0) \right) \right] \\ &\quad + g_{y_b}^T \left(\tau_{b\varepsilon} y_\tau(t_b, 0) + y_\varepsilon(t_b, 0) \right) \\ &\quad + \sum_{j=0}^s \left[f[t_{j+1}^-] \tau_{j+1,\varepsilon} - f[t_j^+] \tau_{j\varepsilon} + \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left(f_y^T y_\varepsilon(t, 0) + f_{y'}^T y_{\tau\varepsilon}(t, 0) \right) dt \right]. \end{aligned}$$

Für die Ableitungen der Vergleichskurven ergibt sich analog zu Früherem

$$\begin{aligned} y_\tau(t, 0) &= z_\tau(t, 0) = y_0'(t) \\ y_\varepsilon(t, 0) &= z_\varepsilon(t, 0) - \left(\tau_{j\varepsilon} + \frac{t - t_j}{t_{j+1} - t_j} (\tau_{j+1,\varepsilon} - \tau_{j\varepsilon}) \right) y_0'(t), \quad t_j < t < t_{j+1}. \end{aligned}$$

Diese Größen sind zunächst nur für $t \in [t_a, t_b] \setminus \{t_1, \dots, t_s\}$ definiert; in den t_j existieren jedoch beide einseitigen Grenzwerte.

Der Integralausdruck in der ersten Variation wird nun wieder durch partielle Integration umgeformt.

Mit den Variationen ($j = 0, \dots, s+1$)

$$\begin{aligned} \delta t_j &:= \tau_{j\varepsilon}(0), & \delta t_a &:= \delta t_0, & \delta t_b &:= \delta t_{s+1}, \\ \delta y_j^\pm &:= z_\varepsilon(t_j^\pm, 0), & \delta y_a &:= \delta y_0^+, & \delta y_b &:= \delta y_{s+1}^- \end{aligned} \quad (7.8)$$

erhalten wir (nach einiger Rechnung) die folgende Darstellung der ersten Variation

$$\begin{aligned} \delta I &= \left(g_{t_a} - H[t_a] \right) \delta t_a + \sum_{j=1}^s \left(g_{t_j} + H[t_j^-] - H[t_j^+] \right) \delta t_j \\ &+ \left(g_{t_b} + H[t_b] \right) \delta t_b \\ &+ \left(g_{y_a} - f_{y'}[t_a] \right)^\top \delta y_a \\ &+ \sum_{j=1}^s \left\{ \left(g_{y_j^-} + f_{y'}[t_j^-] \right)^\top \delta y_j^- + \left(g_{y_j^+} - f_{y'}[t_j^+] \right)^\top \delta y_j^+ \right\} \\ &+ \left(g_{y_b} + f_{y'}[t_b] \right)^\top \delta y_b \\ &+ \int_{t_a}^{t_b} \left(f_y - \frac{d}{dt} f_{y'} \right)^\top y_\varepsilon(t, 0) dt, \end{aligned} \quad (7.9)$$

Mit (7.9) ist nun eine sehr allgemeine Form der ersten Variation hergeleitet worden, die alle bisher behandelten Fälle aus den Abschnitten 2 und 6 umfasst.

Mit einer analogen Beweistechnik wie im Beweis zu Satz (6.24) b) lassen sich aus (7.9) nun mittels zulässiger Variationen, das sind solche, die die allgemeine Randbedingung (7.4) erfüllen, notwendigen Bedingungen ableiten. Ebenso wie zuvor wird die Regularitätsbedingung (7.5) benötigt, um hinreichend viele unabhängige Variationen konstruieren zu können. Das Ergebnis ist im folgenden Satz zusammengefasst.

Satz (7.10) (Notwendige Bedingungen erster Ordnung IV)

Sei (y_0, Δ) eine C_s^2 -Lösung der Variationsaufgabe (7.2) mit $\Delta = (t_0 = t_a < t_1 < \dots < t_s < t_b = t_{s+1}) \in \mathbf{Z}_s$ und es sei die Regularitätsbedingung (7.5) erfüllt. Dann gelten die folgenden notwendigen Bedingungen:

- a) Für alle $t \in [t_a, t_b]$ gilt die EULER-LAGRANGE-Gleichung (mit jeweils einseitige Ableitungen in den Knoten t_j , $j = 0, \dots, s+1$):

$$f_y - \frac{d}{dt} f_{y'} = 0$$

- b) Es existieren LAGRANGE-Multiplikatoren $\nu \in \mathbb{R}^k$, so dass die folgenden natürlichen Randbedingungen oder Transversalitätsbedingungen gelten ($j = 1, \dots, s$)

$$\begin{aligned}
(i) \quad & \frac{\partial}{\partial y_a} [g + \nu^T r] - f_{y'}[t_a] = 0, & \frac{\partial}{\partial y_b} [g + \nu^T r] + f_{y'}[t_b] &= 0, \\
(ii) \quad & \frac{\partial}{\partial y_j^-} [g + \nu^T r] + f_{y'}[t_j^-] = 0, & \frac{\partial}{\partial y_j^+} [g + \nu^T r] - f_{y'}[t_j^+] &= 0, \\
(iii) \quad & \frac{\partial}{\partial t_a} [g + \nu^T r] - H[t_a] = 0, & \frac{\partial}{\partial t_b} [g + \nu^T r] + H[t_b] &= 0, \\
(iv) \quad & \frac{\partial}{\partial t_j} [g + \nu^T r] + H[t_j^-] - H[t_j^+] = 0.
\end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet H wiederum die HAMILTON-Funktion $H := f - y'^T f_{y'}$.

Bemerkungen (7.11)

a) Wie zuvor lässt sich Satz (7.10) als ein LAGRANGE-Multiplikatoren-Theorem interpretieren:

Die Randbedingungen (7.4) werden mittels LAGRANGE-Multiplikatoren an das zu minimierende Funktional angekoppelt. Für das *erweiterte Funktional*

$$\hat{I}(y; \Delta) := (g + \nu^T r) + \int_{t_a}^{t_b} f(t, y(t), y'(t)) dt.$$

werden sodann die notwendigen Bedingungen (ohne weitere Nebenbedingungen) aufgestellt. Man erhält auf diese Weise genau die notwendigen Bedingungen von Satz (7.10).

b) Einige fest vorgegebene Randdaten einer Variationsaufgabe lassen sich einfach dadurch berücksichtigen, dass die entsprechende natürliche Randbedingung aus (7.10)b) entfällt.

Sind beispielsweise Anfangs- und Endzeit fest vorgegeben, $t_a = a$ und $t_b = b$, so lässt sich dies mit Hilfe der Randbedingung $r_1 := t_a - a$ und $r_2 := t_b - b$ berücksichtigen. Die zugehörigen natürlichen Randbedingungen gemäß (7.10) lauten dann

$$\nu_1 - H[a] = 0, \quad \nu_2 + H[b] = 0.$$

D.h. hierdurch werden lediglich die LAGRANGE-Multiplikatoren ν_1 und ν_2 *definiert*. Da diese Multiplikatoren aber ansonsten nicht auftreten, können diese Bedingungen einfach entfallen.

Das Gleiche gilt bei fester Vorgabe von Sprungzeiten (z.B. bei Interpolationsbedingungen). Hier entfällt entsprechend die natürliche Randbedingung (iv).

Ebenfalls brauchen die zu vorgegebenen Anfangs- bzw. Enddaten von y zugehörigen natürlichen Randbedingungen (i) nicht berücksichtigt zu werden.

Anwendung (7.12) (Extremalen mit Ecken)

Wie wir schon bemerkt hatten, kann es auch bei klassischen Variationsaufgaben von Typ (1.2) sinnvoll sein, die zulässigen Vergleichsfunktionen auf die Klasse der stetigen und stückweise stetig differenzierbaren Funktionen auszudehnen.

Gesucht sei also eine Funktion $y_0 \in C_s^{0,1}([a, b], \mathbb{R}^n)$, die ein Funktional

$$I(y) := \int_a^b f(t, y(t), y'(t)) dt$$

unter den Nebenbedingungen

$$y_i(a) = y_{ia}, \quad i \in I_a \quad \text{und} \quad y_i(b) = y_{ib}, \quad i \in I_b.$$

minimiert.

Der Unterschied zur klassischen Variationsaufgabe besteht also lediglich darin, dass die zulässigen Vergleichsfunktionen s mögliche Knickstellen im Intervall $[a, b]$ haben können.

In der Formulierung (7.2) setzen wir $g := 0$ und definieren die Randbedingung durch

$$r := \begin{bmatrix} y_i(a) - y_{ia}, & (i \in I_a) \\ y_i(b) - y_{ib}, & (i \in I_b) \\ y(t_j^+) - y(t_j^-), & (j = 1, \dots, s) \end{bmatrix}$$

Aus (7.10) erhalten wir damit die folgenden natürlichen Randbedingungen

- (i) $f_{y'_i}[a] = 0, \quad i \notin I_a, \quad f_{y'_i}[b] = 0, \quad i \notin I_b,$
- (ii) $-\nu_j + f_{y'}[t_j^-] = 0, \quad \nu_j - f_{y'}[t_j^+] = 0, \quad j = 1, \dots, s,$
- (iii) entfällt,
- (iv) $H[t_j^-] - H[t_j^+] = 0, \quad j = 1, \dots, s$

Aus (ii) lässt sich nun der Multiplikator $\nu_k \in \mathbb{R}^n$ eliminieren. Wir erhalten die so genannte *erste WEIERSTRASS-ERDMANNSCHE-Eckenbedingung*

$$f_{y'}[t_j^-] = f_{y'}[t_j^+], \quad j = 1, \dots, s. \quad (7.13)$$

Die zweite Bedingung (iv), die in den Knickstellen erfüllt werden muss,

$$H[t_j^-] = H[t_j^+], \quad j = 1, \dots, s, \quad (7.14)$$

heißt *zweite WEIERSTRASS–ERDMANNSCHE–Eckenbedingung*.

Beispiel (7.15)

Zu minimieren sei das Funktional

$$I(y) := \int_0^2 y(t)^2 (1 + y'(t)^2) dt$$

unter den Nebenbedingungen $y(0) = 0$, $y(2) = 1$.

Wie untersuchen zunächst die notwendigen Bedingungen für eine C^1 -Lösung der Variationsaufgabe. Eine einfache Rechnung zeigt

$$\begin{aligned} f_{y'} &= 2y^2 y' \\ H &= f - y' f_{y'} = y^2 (1 - y'^2) \end{aligned}$$

Aufgrund der notwendigen Bedingung (2.31) ist $H = -C$ konstant. Wir unterscheiden die Fälle

- (i) $C = 0 \implies y = 0$ oder $y' = \pm 1$
- (ii) $C \neq 0 \implies y' = \pm \sqrt{y^2 - C}/y$.

Im zweiten Fall liefert die Integration der angegebenen Differentialgleichung mittels Trennung der Variablen die rechtwinklige Hyperbelschar

$$(t + D)^2 - y^2 = C.$$

Setzt man nun hierin die Randbedingungen ein, so ergibt sich $D = -3/4$ und $C = 9/16$. Diese Hyperbel liefert jedoch keine, die Randpunkte verbindende Funktion, vgl. die Abbildung 7.2.

Zusammen mit den Lösungen aus Fall (i) stellen wir also fest, dass es keine C^1 -Lösung der EULER–LAGRANGE Gleichung gibt, die die Randpunkte verbindet.

Wie sieht es aber aus, wenn wir Lösungen mit Ecken zulassen? Eine solche Lösung muss sich aus Teilstücken gemäß (i) und (ii) zusammensetzen, da ja die EULER–LAGRANGE Gleichung unverändert gilt, wenn auch intervallweise. Diese Zusammensetzung aus verschiedenen Teilstücken könnte im Prinzip auf viele unterschiedliche Weisen geschehen. Hier helfen uns nun die beiden WEIERSTRASS–ERDMANNSCHE Eckenbedingungen: In jeder Ecke t_j gelten hiernach

$$H[t_j^-] = H[t_j^+] \quad \text{und} \quad f_{y'}[t_j^-] = f_{y'}[t_j^+].$$

Aus der Stetigkeit der HAMILTON-Funktion folgt, dass eine Lösung nur aus Teilstücken des Typs (i) bestehen kann. Aus der Stetigkeit von $f_{y'}$ folgt weiter, dass in jeder Ecke $y(t_k) = 0$ gelten muss, d.h. Ecken kann es nur auf der t -Achse geben. Diese Bedingungen legen die Lösung schon eindeutig fest:

$$y_0(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1, \\ t - 1, & 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

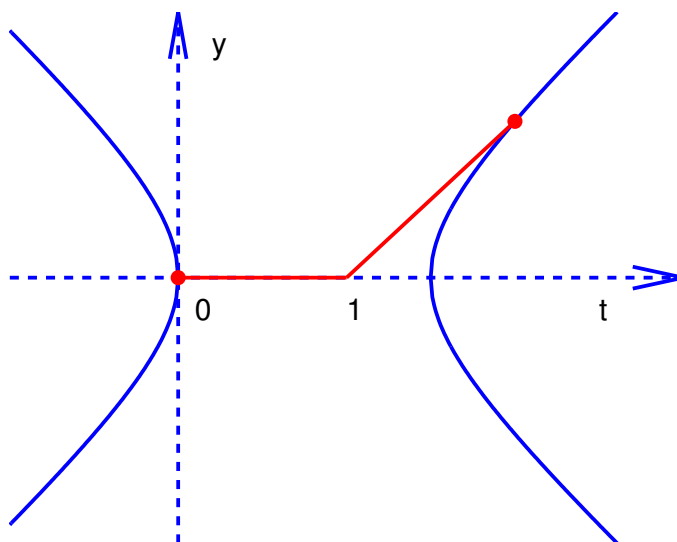


Abb. 7.2 Extremale zu Beispiel (7.15).

B. Aufgaben der Optimalen Steuerung.

Wir wollen die allgemeine Variation (7.9) bzw. die Folgerungen aus dieser dazu benutzen, uns einen Einblick in die notwendigen Bedingungen für unrestringierte Optimalsteuerungsprobleme zu verschaffen. Dabei setzen wir (zunächst ohne Beweis) voraus, dass sich auch Nebenbedingungen in Form von Differentialgleichungen (analog zu den Randbedingungen) unter gewissen Regularitätsvoraussetzungen an das zu minimierende Funktional ankoppeln lassen. Allerdings sind hierbei die LAGRANGE-Parameter zeitabhängige stetige Funktionen. Für einen Beweis dieser Aussage wird auf die späteren Abschnitte verwiesen.

Gegeben sei also eine Aufgabe der optimalen Steuerung in der Standardform (1.8)

Problem der optimalen Steuerung (1.8)

Zu gegebenen (hinreichend glatten) Funktionen

$$g \in C^2(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}), \quad f_0 \in C^2([a, b] \times \mathbb{R}^{n+m}, \mathbb{R}), \quad f \in C^2([a, b] \times \mathbb{R}^{n+m}, \mathbb{R}^n) \quad \text{und} \\ r \in C^2(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^k)$$

ist eine stetige und stückweise stetig differenzierbare *Zustandsfunktion* $x_0 \in C_s^{0,1}([a, b], \mathbb{R}^n)$ sowie eine stückweise stetige *Steuerfunktion* $u_0 \in C_s([a, b], \mathbb{R}^m)$ so zu bestimmen, dass das Zielfunktional

$$I(x, u) := g(x(a), x(b)) + \int_a^b f_0(t, x(t), u(t)) dt \quad (7.16)$$

minimiert wird unter den Nebenbedingungen

$$x'(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad a \leq t \leq b, \quad (7.17)$$

$$r(x(a), x(b)) = 0. \quad (7.18)$$

Wir bilden nun mit stückweise stetigen *adjungierten Variablen* $\lambda \in C_s([a, b], \mathbb{R}^n)$ das *erweiterte Funktional*

$$\hat{I} := g(x(a), x(b)) + \int_a^b (f_0(t, x, u) + \lambda^T(f(t, x, u) - x')) dt \quad (7.19)$$

und bestimmen die notwendigen Bedingungen erster Ordnung für eine stationäre Lösung (x_0, u_0, λ_0) von \hat{I} unter der Nebenbedingung (7.18). Hierbei werde wieder die Regularität der Randvorgabe, $\text{Rang}[Jr(x_0(a), x_0(b))] = k$, vorausgesetzt; vgl. (7.5).

Die notwendigen Bedingungen aus (7.10) lassen sich nicht direkt auf das obige Problem anwenden, da weder u noch λ als stückweise C^1 -Funktionen vorausgesetzt wurden. Wir betrachten daher als Hilfsvariablen entsprechende Stammfunktionen

$$w(t) := \int_a^t u(\tau) d\tau, \quad \rho(t) := \int_a^t \lambda(\tau) d\tau. \quad (7.20)$$

Damit lautet das Ersatzproblem (*erweitertes Variationsproblem*) nun: Man bestimme eine stationäre Lösung

$$y_0^T = (x_0^T, w_0^T, \rho_0^T) \in C_s^{0,1}([a, b], \mathbb{R}^{2n+m})$$

des erweiterten Funktional

$$\hat{I}(x, w, \rho) := g(x(a), x(b)) + \int_a^b (f_0(t, x, w') + (\rho')^T(f(t, x, w') - x')) dt \quad (7.21)$$

unter der Nebenbedingung

$$\hat{r} := \begin{bmatrix} r(x(a), x(b)) \\ w(a) \\ \rho(a) \end{bmatrix} = 0. \quad (7.22)$$

Wir wollen im Folgenden die notwendigen Bedingung für dieses Variationsproblem zusammenstellen. Dazu bezeichne $\hat{f}(t, y, y')$ den Integranden von (7.21) und $y := (x, w, \rho)$ die abhängigen Variablen.

Zuvor definieren wir noch die in den folgenden Bedingungen mehrfach auftretende Funktion

$$H(t, x, u, \lambda) := f_0(t, x, u) + \lambda^T f(t, x, u), \quad (7.23)$$

die wir als HAMILTON-Funktion des Optimalsteuerungsproblems (1.8) bezeichnen wollen.

H ist also eine zweifach stetig differenzierbare, reellwertige Funktion, definiert auf $[a, b] \times \mathbb{R}^{2n+m}$.

Zunächst untersuchen wir das Problem auf Regularität. Wir finden

$$\begin{aligned} \hat{f}_{y'} &= [-\rho', H_u(t, x, w', \rho'), f(t, x, w') - x']^T, \\ \hat{f}_{y'y'} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -I_n \\ 0 & H_{uu} & f_u^T \\ -I_n & f_u & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

so dass die Regularitätsbedingung genau dann erfüllt ist, wenn längs der optimalen Lösung gilt

$$H_{uu}[t] \text{ regulär, } \quad \forall t \in [a, b]. \quad (7.24)$$

(i) Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$(a) \quad 0 = \hat{f}_x - \frac{d}{dt} \hat{f}_{x'} \implies 0 = H_x - \frac{d}{dt}(-\rho')$$

Hiermit folgt also, dass $\lambda = \rho'$ stückweise stetig differenzierbar ist und der folgenden adjungierten Differentialgleichung genügt

$$\lambda' = -H_x(t, x, u, \lambda). \quad (7.25)$$

$$(b) \quad 0 = \hat{f}_w - \frac{d}{dt} \hat{f}_{w'} \implies 0 = \frac{d}{dt} H_u,$$

d.h. die Funktion $H_u(t, x, u, \lambda)$ ist intervallweise konstant.

$$(c) \quad 0 = \hat{f}_\rho - \frac{d}{dt} \hat{f}_{\rho'} \implies 0 = \frac{d}{dt} (f(t, x, u) - x'),$$

d.h. die Funktion $f(t, x, u) - x'$ ist intervallweise konstant.

(ii) **Natürliche Randbedingungen der abhängigen Variablen in a :**

$$(a) \quad \frac{\partial}{\partial x_a} [g + \nu^T r + \nu_1^T w_a + \nu_2^T \rho_a] - \hat{f}_{x'}[a] = 0 \implies \lambda(a) = -\frac{\partial}{\partial x_a} (g + \nu^T r)$$

$$(b) \quad \frac{\partial}{\partial w_a} [g + \nu^T r + \nu_1^T w_a + \nu_2^T \rho_a] - \hat{f}_{w'}[a] = 0 \implies \nu_1 = -H_u[a]$$

$$(c) \quad \frac{\partial}{\partial \rho_a} [g + \nu^T r + \nu_1^T w_a + \nu_2^T \rho_a] - \hat{f}_{\rho'}[a] = 0 \implies \nu_2 = f[a] - x'(a)$$

Die beiden letzten Bedingungen stellen lediglich Definitionen der LAGRANGE-Parameter ν_1 und ν_2 dar, die jedoch weiter nicht benötigt werden. Die erste Bedingungen liefert eine Anfangsbedingung für die adjungierten Variablen:

$$\lambda(a) = -\frac{\partial}{\partial x_a} (g + \nu^T r). \quad (7.26)$$

(iii) **Natürliche Randbedingungen der abhängigen Variablen in b :**

$$(a) \quad \frac{\partial}{\partial x_b} [g + \nu^T r + \nu_1^T w_a + \nu_2^T \rho_a] + \hat{f}_{x'}[b] = 0 \implies \lambda(b) = \frac{\partial}{\partial x_b} (g + \nu^T r)$$

$$(b) \quad \frac{\partial}{\partial w_b} [g + \nu^T r + \nu_1^T w_a + \nu_2^T \rho_a] + \hat{f}_{w'}[b] = 0 \implies 0 = H_u[b]$$

$$(c) \quad \frac{\partial}{\partial \rho_b} [g + \nu^T r + \nu_1^T w_a + \nu_2^T \rho_a] + \hat{f}_{\rho'}[b] = 0 \implies 0 = f[b] - x'(b)$$

Alle drei Bedingungen werden im Folgenden benötigt, momentan notieren wir nur die natürliche Randbedingung für die adjungierten Variablen:

$$\lambda(b) = \frac{\partial}{\partial x_b} (g + \nu^T r). \quad (7.27)$$

(iv) **Natürliche Randbedingungen in den Ecken t_j , $j = 1, \dots, s$:**

Wir werten zunächst die erste WEIERSTRASS-ERDMANNSCHE Eckenbedingung (7.13) aus:

$$(a) \quad \hat{f}_{x'}[t_j^-] = \hat{f}_{x'}[t_j^+] \implies \lambda(t_j^-) = \lambda(t_j^+)$$

Die adjungierten Variablen sind daher global stetig und liegen ebenso wie die Zustandsvariablen in $C_s^{0,1}([a, b], \mathbb{R}^n)$.

$$(b) \quad \hat{f}_w[t_j^-] = \hat{f}_w[t_j^+] \implies H_u[t_j^-] = H_u[t_j^+]$$

Damit ist auch $H_u[\cdot]$ global stetig und nach (i) (b) also konstant auf $[a, b]$. Zusammen mit der natürlichen Randbedingung (iii) (b) folgt schließlich

$$H_u[t] = 0, \quad \forall t \in [a, b]. \quad (7.28)$$

Die optimale Steuerung ist also ein stationärer Punkt der HAMILTON-Funktion – bezogen auf die Steuervariablen.

$$(c) \quad \hat{f}_{\rho'}[t_j^-] = \hat{f}_{\rho'}[t_j^+] \implies f[t_j^-] - x'(t_j^-) = f[t_j^+] - x'(t_j^+)$$

Zusammen mit den Bedingungen (i), (c) ist also $f[\cdot] - x'$ global konstant und verschwindet nach (iii), (c). Man erhält also tatsächlich die im ursprünglichen Problem vorgegebene Bewegungsgleichung als notwendige Bedingung zurück:

$$x'(t) = f(t, x, u), \quad \forall t \in [a, b]. \quad (7.29)$$

Wir kommen nun zur zweiten WEIERSTRASS-ERDMANNSCHE Eckenbedingung (7.14). Hierzu benötigen wir die HAMILTON-Funktion \hat{H} der erweiterten Variationsaufgabe:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{f} - y^T \hat{f}_{y'} \\ &= \hat{f} - (x')^T \hat{f}_{x'} - (w')^T \hat{f}_{w'} - (\rho')^T \hat{f}_{\rho'} \\ &= f_0 + \lambda^T (f - x') + (x')^T \lambda - (w')^T H_u - (\rho')^T (f - x') \\ &= H. \end{aligned}$$

Die HAMILTON-Funktion der erweiterten Variationsaufgabe stimmt also tatsächlich längs der optimalen Lösung mit der in (7.23) definierten HAMILTON-Funktion des Optimalsteuerungsproblems überein. Damit bleibt nun auch die zweite WEIERSTRASS-ERDMANNSCHE Eckenbedingung unverändert.

Besitzt die Lösung der Optimalsteuerungsaufgabe Ecken t_j (also Unstetigkeitsstellen der Steuerfunktion!), so gilt in diesen:

$$H[t_j^-] = H[t_j^+], \quad j = 1, \dots, s. \quad (7.30)$$

(v) Freie Endzeit:

Wir hatten das Optimalsteuerungsproblem mit festen Endzeiten a und b formuliert. Daher entfallen – wie zuvor bemerkt – die zugehörigen natürlichen Randbedingungen (7.10) b) (iii). Dennoch ist es nützlich sich die notwendige Bedingung für eine freie Endzeit im vorliegenden Zusammenhang anzusehen. Alternativ könnte man ein Optimalsteuerungsproblem mit freier Endzeit natürlich in ein äquivalentes Problem mit fester Endzeit transformieren und für dieses die notwendigen Bedingungen aufstellen. Es würden sich die gleichen notwendigen Bedingungen ergeben (Übungsaufgabe!).

Nehmen wir also an, dass in der Problemstellung (1.8) die feste Endzeit b durch eine freie Endzeit t_b ersetzt sei, wobei dann auch die Funktionen g und r zusätzlich von t_b abhängen können.

Aus (7.10) erhalten wir die notwendige Bedingung

$$H[t_b] = - \frac{\partial}{\partial t_b} (g + \nu^T r) . \quad (7.31)$$

Wir fassen die notwendigen Bedingungen nochmals in einem Satz zusammen.

Satz (7.32) (Notwendige Bedingungen erster Ordnung V)

Unter der Voraussetzung, dass sich die Differentialgleichungsnebenbedingung des Optimalsteuerungsproblems (1.8) mittels stückweise stetiger adjungierter Variablen $\lambda \in C_s([a, b], \mathbb{R}^n)$ an das Zielfunktional ankoppeln lässt und die Regularitätsbedingungen (7.24) sowie $\text{Rang}[Jr] = k$ gelten, erfüllt eine Lösung (x_0, u_0) des Optimalsteuerungsproblems die folgenden notwendigen Bedingungen

- a) *Die adjungierten Variablen λ sind stetig und stückweise stetig differenzierbar auf $[a, b]$ und es gelten die Differentialgleichungen*

$$x' = f(t, x, u), \quad \lambda' = -H_x(t, x, u, \lambda) .$$

Dabei ist $H := f_0 + \lambda^T f$ die HAMILTON-Funktion des Optimalsteuerungsproblems.

- b) *Die optimale Steuerung ist ein stationärer Punkt der HAMILTON-Funktion*

$$H_u = 0 .$$

- c) *Es existieren LAGRANGE-Multiplikatoren $\nu \in \mathbb{R}^k$, so dass die folgenden natürlichen Randbedingungen gelten*

$$\lambda(a) = - \frac{\partial}{\partial x_a} [g + \nu^T r], \quad \lambda(b) = \frac{\partial}{\partial x_b} [g + \nu^T r] .$$

- d) *In eventuellen Sprungstellen t_j der optimalen Steuerung gelten*

$$H[t_j^-] = H[t_j^+], \quad j = 1, \dots, s .$$

- e) *Ist die Endzeit $t_b = b$ frei, so gilt die natürliche Randbedingung*

$$H[t_b] = - \frac{\partial}{\partial t_b} [g + \nu^T r] .$$

Beispiel (7.33)

Ein Zug bewege sich geradlinig in einer Richtung x . Seine Bewegung werde durch die Differentialgleichung $x'' = u$ modelliert, wobei x die zurückgelegte Strecke und u die Beschleunigung des Zuges beschreibt. Es werde angenommen, dass der Energieverbrauch proportional zur Beschleunigung ist.

Die Aufgabe, eine bestimmte Strecke in vorgegebener Zeit energieoptimal zurückzulegen, ließe sich dann folgendermaßen formulieren:

Bestimme eine stückweise stetige Funktion $u \in C_s[0, b]$, so dass das Funktional

$$I(u) := \frac{1}{2} \int_0^b u^2(t) dt$$

minimiert wird unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, & x_1(0) &= 0, & x_1(b) &= a, \\ x_2' &= u, & x_2(0) &= 0, & x_2(b) &= 0. \end{aligned}$$

Wir stellen nun die notwendigen Bedingungen gemäß Satz (7.32) zusammen, wobei die Ankoppelbarkeit (sowie die Regularitätsbedingung) vorausgesetzt werde.

Für die HAMILTON-Funktion ergibt sich:

$$H = \frac{1}{2} u^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u.$$

Die adjungierten Differentialgleichungen lauten damit

$$\lambda_1' = 0, \quad \lambda_2' = -\lambda_1.$$

Aus der Stationarität der HAMILTON-Funktion folgt schließlich

$$H_u = 0 \implies u(t) = -\lambda_2(t).$$

Da alle Zustandsgrößen an beiden Endpunkten vorgeschrieben sind, entfallen die natürlichen Randbedingungen. Setzt man also die optimale Steuerung in die Zustandsgleichungen und in die adjungierten Gleichungen ein, so erhält man die *Randwertaufgabe*

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, & x_1(0) &= 0, \\ x_2' &= -\lambda_2, & x_2(0) &= 0, \\ \lambda_1' &= 0, & x_1(b) &= a, \\ \lambda_2' &= -\lambda_1, & x_2(b) &= 0. \end{aligned}$$

Die eindeutig bestimmte Lösung lautet

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -2a(t/b)^3 + 3a(t/b)^2, & \lambda_1(t) &= -12a/b^3 \\ x_2(t) &= -6a t^2/b^3 + 6a t/b^2, & \lambda_2(t) &= 12at/b^3 - 6a/b^2, \end{aligned}$$

insbesondere ist die optimale Steuerung gegeben durch $u_0(t) = 6a/b^2 - 12at/b^3$.

Beispiel (7.34) Chemische Reaktion in einem Rohrreaktor ¹⁵

Wir betrachten einen Rohrreaktor, in dem eine chemische Reaktion



stattfindet. Dabei steht A für eine Ausgangssubstanz, B für die herzustellende Substanz und C für ein Abfallprodukt. Mit $x_1(t)$ bzw. $x_2(t)$ werden die Konzentrationen der Reaktanden A bzw. B bezeichnet.

Ist L nun die Länge des Reaktors und v die Durchschnittsgeschwindigkeit des Massenflusses, so lassen sich die Bilanzgleichungen für x_1 und x_2 folgendermaßen beschreiben.

$$\begin{aligned} x_1' &= -k_1 x_1, & x_1(0) &= x_{10} \\ x_2' &= k_1 x_1 - k_2 x_2, & x_2(0) &= x_{20}. \end{aligned}$$

Dabei ist t die auf die Geschwindigkeit des Massenstromes bezogene Längenkoordinate, $t = \ell/v$, des Reaktors.

Die Reaktionsgeschwindigkeiten k_1 und k_2 hängen dabei von der ortabhängigen, steuerbaren Temperatur $\Theta(t)$ ab,

$$k_j = k_{j0} \exp[-E_j/(R \Theta)], \quad j = 1, 2,$$

mit Konstanten k_{10} , k_{20} , E_1 , E_2 und R .

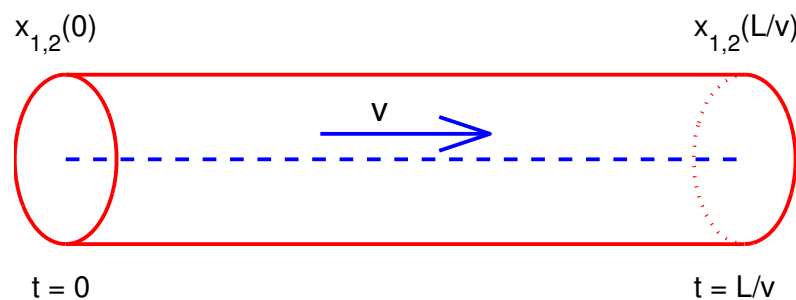


Abb. 7.3 Rohrreaktor.

Die Optimierungsaufgabe besteht nun darin, die Temperatur $\Theta(t)$, $0 \leq t \leq t_b := L/v$, so zu steuern, dass das Produkt B beim Austritt aus dem Rohrreaktor (d.h. $x_2(t_b)$) maximiert wird.

¹⁵L.T. Fan, *The Continuous Maximum Principle*, John Wiley & Sons, New York, 1966

Das Zielfunktional für das Minimierungsproblem lautet demnach

$$I(x_1, x_2, \Theta) := -x_2(t_b).$$

Wir notieren die notwendigen Bedingungen gemäß (7.32):

HAMILTON-Funktion:

$$H = -\lambda_1 k_1 x_1 + \lambda_2 (k_1 x_1 - k_2 x_2)$$

Adjungierte Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}\lambda_1' &= (\lambda_1 - \lambda_2) k_1 \\ \lambda_2' &= \lambda_2 k_2\end{aligned}$$

Natürliche Randbedingungen:

$$\lambda_1(t_b) = 0, \quad \lambda_2(t_b) = -1$$

Optimale Steuerung: $H_\Theta = 0 \Rightarrow$

$$\Theta = \Theta(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{E_1 - E_2}{R} \left[\ln \left(\frac{k_{10} E_1 x_1 (\lambda_2 - \lambda_1)}{k_{20} E_2 x_2 \lambda_2} \right) \right]^{-1}$$

Diese Bedingungen zusammengefasst ergeben das folgende *Randwertproblem* für die Zustandsgrößen x_1, x_2 und die adjungierten Variablen λ_1, λ_2 :

$$\begin{aligned}x_1' &= -k_1 x_1, & x_1(0) &= x_{10}, \\ x_2' &= k_1 x_1 - k_2 x_2, & x_2(0) &= x_{20}, \\ \lambda_1' &= k_1 (\lambda_1 - \lambda_2), & \lambda_1(t_b) &= 0, \\ \lambda_2' &= k_2 \lambda_2, & \lambda_2(t_b) &= -1.\end{aligned}$$

Hierbei sind $k_j = k_j(\Theta)$, $j = 1, 2$, und $\Theta = \Theta(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2)$ gemäß der obigen Beziehungen auszuwerten.

Daten:

$$x_{10} = 0.53, \quad x_{20} = 0.43, \quad k_{10} = 0.892 \times 10^9, \quad k_{20} = 0.768 \times 10^{16}, \quad E_1 = 1.8 \times 10^4, \\ E_2 = 3.0 \times 10^4, \quad R = 2, \quad t_b = 480.$$

Die numerische Lösung dieses Problems mit dem Mehrzielverfahren BNDSCO liefert die folgenden Lösungen.

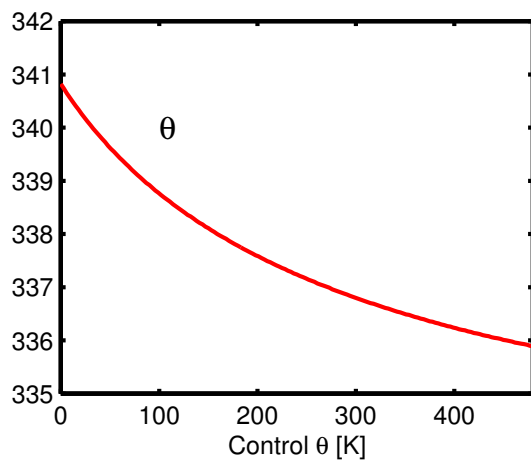
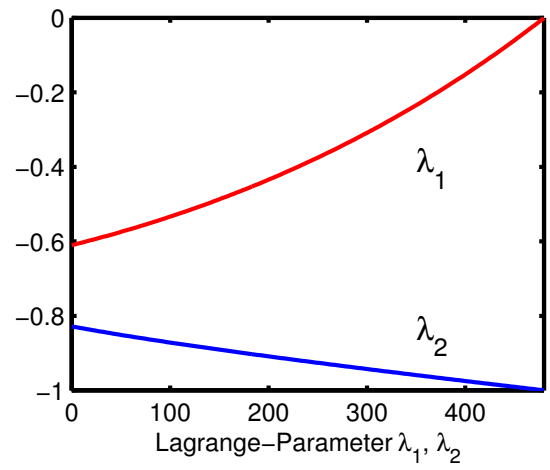
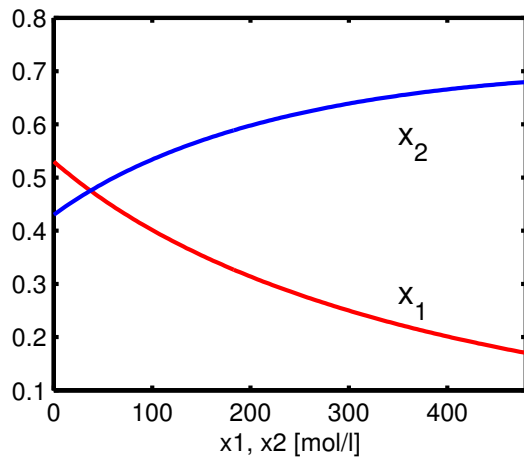


Abb. 7.4 Lösung des Rohrreaktor-Problems.

8. Allgemeine restringierte Optimierungsaufgaben

Wir leiten in diesem Abschnitt eine allgemeine LAGRANGE–Multiplikatorenregeln für restringierte Variationsaufgaben her.

Sei $(V, \|\cdot\|)$ wieder ein reeller normierter Vektorraum, $X \subset V$ nichtleer und $I : X \rightarrow \mathbb{R}$ ein zu minimierendes Funktional. Die Nebenbedingungen mögen durch eine Abbildung $G : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ in der Form $G = 0$ gegeben sein.

Wir überlegen uns zunächst, dass die LAGRANGE–Multiplikatorenregel in jedem Fall hinreichend ist, sofern man ein globales Minimum des erweiterten Funktionals findet.

Satz (8.1) (Gleichungsnebenbedingungen)

Existieren LAGRANGE–Multiplikatoren $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, so dass $y_0 \in X$ ein globales Minimum des erweiterten Funktionals

$$\hat{I}(y) := I(y) + \lambda^T G(y)$$

auf X ist, und gilt $G(y_0) = 0$, so minimiert y_0 auch das ursprüngliche Funktional I über X unter den Nebenbedingungen $G(y) = 0$.

Beweis:

Für $y \in X$ gilt nach Voraussetzung

$$\hat{I}(y) = I(y) + \lambda^T G(y) \geq I(y_0) + \lambda^T G(y_0) = I(y_0).$$

Ist y nun zulässig, d.h. erfüllt y auch die Nebenbedingung $G(y) = 0$, so folgt $I(y) \geq I(y_0)$. □

Auf gleiche Weise kann man bei Nebenbedingungen in Form von Ungleichungen vorgehen:

Satz (8.2) (Ungleichungsnebenbedingungen)

Existieren LAGRANGE–Multiplikatoren $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$, so dass $y_0 \in X$ ein globales Minimum des erweiterten Funktionals $\hat{I}(y) := I(y) + \lambda^T G(y)$ auf X ist, und dass gelten

$$G(y_0) \leq 0, \quad \lambda^T G(y_0) = 0 \quad (\text{Komplementaritätsbedingungen}),$$

so ist y_0 auch globales Minimum des ursprünglichen Funktionals I über X unter den Nebenbedingungen $G_j(y) \leq 0$, $j = 1, \dots, m$.

Beweis:

Für $y \in X$ gilt nach Voraussetzung und Komplementaritätsbedingung

$$\hat{I}(y) = I(y) + \lambda^T G(y) \geq I(y_0) + \lambda^T G(y_0) = I(y_0).$$

Ist y nun zulässig, d.h. erfüllt y auch die Nebenbedingung $G(y) \leq 0$, so folgt mit $\lambda \geq 0$:

$$I(y) \geq I(y) + \lambda^T G(y) \geq I(y_0).$$

□

Beispiel (8.3)

Eine Wassersäule rotiere unter den Einfluss von Rotations- und Schwerkraft in einem vertikal aufgestellten Kreiszyylinder mit Durchmesser 2ℓ und der Kreisfrequenz ω .

Die freie Oberfläche nimmt dann eine (rotationssymmetrische) Gestalt an, beschrieben durch eine Funktion $z \in C^1[0, \ell]$, für die das Funktional

$$I(z) := \rho \pi \int_0^\ell \left(g z(x)^2 - \omega^2 x^2 z(x) \right) x dx$$

minimiert wird unter den Nebenbedingungen

$$z(x) \geq 0, \quad G(z) := 2\pi \int_0^\ell x z(x) dx = V_0.$$

Hierbei bezeichnet ρ die Dichte und g die Gravitationsbeschleunigung.

Wir bilden das erweiterte Funktional

$$\hat{I}(z) := \rho \pi \int_0^\ell \left(g z^2 - \omega^2 x^2 z + \tilde{\lambda} z \right) x dx,$$

mit $\tilde{\lambda} := 2\lambda/\rho$.

Die EULER-LAGRANGE Gleichung hierfür lautet $f_z = 0$. Sie liefert unmittelbar die Lösung $z_0(x) = (\omega^2 x^2 - \tilde{\lambda})/(2g)$, also ein parabolischen Profil der Wasseroberfläche. Nun ist der Integrand des erweiterten Funktionals (für $x > 0$ ¹⁶) als Funktion von z strikt konvex, also als Funktion von (z, z') somit stark konvex. Daher ist das erweiterte Funktional nach Abschnitt 5 strikt konvex und z_0 liefert tatsächlich das eindeutig bestimmte globale Minimum von \hat{I} . Nach Satz 8.1 ist damit z_0 aber auch die (eindeutig bestimmte) Lösung der restringierten Variationsaufgabe.

Der LAGRANGE Multiplikator $\tilde{\lambda}$ kann schließlich aus der Nebenbedingung $G(z_0) = V_0$ bestimmt werden.

¹⁶Nach dem Beweis von (5.8) b) genügt es, dass der Integrand für $x \in]0, \ell[$ stark konvex ist.

Man erhält

$$\tilde{\lambda} = \frac{\omega^2 \ell^2}{2} - \frac{2gV_0}{\pi \ell^2}.$$

Wir wollen nun die obige Schlussweise umkehren und für ein lokales Minimum der restringierten Aufgabe die Existenz von LAGRANGE-Multiplikatoren zeigen. Wie früher schon erwähnt wurde, gelingt dies nur unter gewissen Regularitätsvoraussetzungen. Zum Beweis benötigen wir einen allgemeineren Differenzierbarkeitsbegriff:

Definition (8.4)

Das Funktional I heißt in $y_0 \in X$ FRECHET-differenzierbar, falls es ein stetiges, lineares Funktional $I'(y_0) : V \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit der Eigenschaft

$$I(y) = I(y_0) + I'(y_0)(y - y_0) + o(y - y_0),$$

für alle y in einer $\|\cdot\|$ -Umgebung von y_0 (Insbesondere ist y_0 dann innerer Punkt von X).

Die LANDAUSche o -Bedingung lautet explizit

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{I(y) - I(y_0) - I'(y_0)(y - y_0)}{\|y - y_0\|} = 0.$$

Der Zusammenhang zwischen GÂTEAUX- und FRECHET-Differenzierbarkeit ist in der folgenden Bemerkung (Beweise als Übungsaufgaben) zusammengefasst.

Bemerkungen (8.5)

- a) Ist das Funktional I in y_0 FRECHET-differenzierbar, so existiert auch die GÂTEAUX-Ableitung von I in alle Richtungen $v \in V$ und es gilt

$$\delta I(y_0, v) = I'(y_0)(v).$$

- b) Ist das Funktional I in y_0 FRECHET-differenzierbar, so ist es in y_0 auch stetig.
- c) Ist das Funktional I in allen Punkten einer ε -Kugel $K_\varepsilon(y_0)$ in alle Richtungen $v \in V$ GÂTEAUX-differenzierbar und gelten
 - (i) $\delta I(y_0, \cdot) : V \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und linear,
 - (ii) $\delta I(y, v) \rightarrow \delta I(y_0, v)$ für $y \rightarrow y_0$, gleichmässig auf $\|v\| = 1$,
 so ist I auch FRECHET-differenzierbar in y_0 und es gilt $I'(y_0) = \delta I(y_0, \cdot)$.

Definition (8.6)

Die GÂTEAUX-Ableitung δI eines Funktionals heißt *schwach stetig* in $y_0 \in X$ und $v \in V$, falls:

$$\delta I(y, v) \rightarrow \delta I(y_0, v), \quad \text{für } y \rightarrow y_0.$$

Beispiel (8.7)

Der Vektorraum $C^1[a, b]$ werde mit der Norm

$$\|y\|_{1,\infty} := \|y\|_\infty + \|y'\|_\infty \quad (8.8)$$

ausgestattet. Hierbei bezeichne $\|\cdot\|_\infty$ die übliche Maximumsnorm.

Wir betrachten das Funktional

$$I(y) := \int_a^b \alpha(t) \sqrt{1 + y'(t)^2} dt, \quad y \in C^1[a, b],$$

mit einer stetigen Funktion α . Für die GÄTEAUX-Ableitung findet man

$$\delta I(y, v) = \int_a^b \alpha(t) \frac{y'(t) v'(t)}{\sqrt{1 + y'(t)^2}} dt.$$

$\delta I(y, \cdot)$ ist also linear und wegen

$$\begin{aligned} |\delta I(y, v)| &\leq \int_a^b |\alpha(t)| |v'(t)| dt \\ &\leq (b-a) \|\alpha\|_\infty \|v\|_{1,\infty} \rightarrow 0, \quad \text{für } \|v\|_{1,\infty} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

auch stetig (Es genügt, die Stetigkeit in $v = 0$ zu überprüfen).

Da die Funktion $g(z) := z/\sqrt{1+z^2}$ auf \mathbb{R} gleichmäßig stetig ist mit $|g'(z)| \leq 1$, kann man weiter abschätzen

$$\begin{aligned} |\delta I(y, v) - \delta I(y_0, v)| &\leq \int_a^b |\alpha(t)| |g(y') - g(y'_0)| |v'(t)| dt \\ &\leq \int_a^b |\alpha(t)| |y'(t) - y'_0(t)| |v'(t)| dt \\ &\leq (b-a) \|\alpha\|_\infty \|v\|_{1,\infty} \|y - y_0\|_{1,\infty} < \varepsilon, \end{aligned}$$

für $\|y - y_0\|_{1,\infty} < \delta := \varepsilon / ((b-a) \|\alpha\|_\infty)$ und $\|v\|_{1,\infty} \leq 1$.

Nach (8.5) c) ist das Funktional damit in jedem Punkt $y_0 \in C^1[a, b]$ FRECHET-differenzierbar mit $I'(y_0)(v) = \delta I(y_0, v)$.

Satz (8.9)

Für $f \in C^2([a, b] \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ist das Funktional

$$I(y) := \int_a^b f(t, y, y') dt$$

bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{1,\infty}$ FRECHET-differenzierbar und besitzt daher in allen Punkten $y_0 \in C^1[a, b]$ schwach stetige GÄTEAUX-Ableitungen.

Beweis: Die GÂTEAUX–Ableitung

$$\delta I(y, v) = \int_a^b f_y[t] v + f_{y'}[t] v' dt$$

ist offensichtlich linear und stetig in v . Ferner folgt

$$\begin{aligned} |\delta I(y, v) - \delta I(y_0, v)| &\leq \int_a^b |f_y(t, y, y') - f_y(t, y_0, y'_0)| |v| dt \\ &\quad + \int_a^b |f_{y'}(t, y, y') - f_{y'}(t, y_0, y'_0)| |v'| dt. \end{aligned}$$

Nun sind f_y und $f_{y'}$ als stetige Funktionen auf jedem Kompaktum der Form $[a, b] \times [-c, c]^2$ auch gleichmäßig stetig. Wählt man nun $c > 0$ so, dass

$$\forall y \in C^1[a, b] : \|y - y_0\|_{1, \infty} \leq 1 \implies \|y\|_{1, \infty} \leq c,$$

so gibt es zu $\varepsilon > 0$ stets ein $\delta \in]0, 1]$ mit

$$|f_y(t, y, y') - f_y(t, y_0, y'_0)| \leq \varepsilon, \quad |f_{y'}(t, y, y') - f_{y'}(t, y_0, y'_0)| \leq \varepsilon$$

für alle $y \in C^1[a, b]$ mit $\|y - y_0\|_{1, \infty} \leq \delta$ und alle $t \in [a, b]$.

Damit folgt aber

$$|\delta I(y, v) - \delta I(y_0, v)| \leq 2 \|v\|_{1, \infty} (b - a) \varepsilon,$$

d.h. $\delta I(y, v) \rightarrow \delta I(y_0, v)$ gleichmäßig auf $\|v\|_{1, \infty} \leq 1$. □

Wir kommen nun zur Herleitung einer allgemeinen LAGRANGE–Multiplikatorenregel.

Dazu nehmen wir an, dass der Bereich X , über dem das Funktional I unter der Nebenbedingung $G = 0$ minimiert werden soll, ein affin–linearer Teilraum von V ist, also von der Form ist

$$X = y_0 + X_0, \tag{8.10}$$

mit einem linearen Teilraum X_0 von V .

Die Funktionale $I, G : V \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ seien zudem (wenigstens) auf einer $\|\cdot\|$ –Umgebung D von y_0 definiert und es gelte $y_0 \in X$ sowie $G(y_0) = 0$.

Zu beliebigen, aber festen Richtungen $v, w \in X_0$ setzen wir

$$J(\varepsilon_1, \varepsilon_2) := I(y_0 + \varepsilon_1 v + \varepsilon_2 w) \quad \text{und} \quad H(\varepsilon_1, \varepsilon_2) := G(y_0 + \varepsilon_1 v + \varepsilon_2 w).$$

Besitzen I und G nun schwach stetige GÂTEAUX–Ableitungen, so sind J und H C^1 –Funktionen mit

$$J_{\varepsilon_1}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (I(y_0 + (\varepsilon_1 + \varepsilon)v + \varepsilon_2 w) - I(y_0 + \varepsilon_1 v + \varepsilon_2 w)) = \delta I(y_0 + \varepsilon_1 v + \varepsilon_2 w, v)$$

und analog

$$J_{\varepsilon_2}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \delta I(y_0 + \varepsilon_1 v + \varepsilon_2 w, w)$$

$$H_{\varepsilon_1}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \delta G(y_0 + \varepsilon_1 v + \varepsilon_2 w, v)$$

$$H_{\varepsilon_2}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \delta G(y_0 + \varepsilon_1 v + \varepsilon_2 w, w)$$

Für $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ erhalten wir damit die folgende JACOBI-Matrix für die Abbildung $(J, H) : \mathbb{R}^2 \supset U(0) \rightarrow \mathbb{R}^2$ im Ursprung

$$\begin{pmatrix} J_{\varepsilon_1}(0) & J_{\varepsilon_2}(0) \\ H_{\varepsilon_1}(0) & H_{\varepsilon_2}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta I(y_0, v) & \delta I(y_0, w) \\ \delta G(y_0, v) & \delta G(y_0, w) \end{pmatrix}. \quad (8.11)$$

Dabei hängt die JACOBI-Matrix stetig von $\varepsilon := (\varepsilon_1, \varepsilon_2)^T$ ab.

Wäre sie in $\varepsilon = 0$ regulär, so wäre die Abbildung (J, H) nach dem Umkehrsatz (vgl. z.B. Königsberger, Analysis 2, Abschnitt 3.3) lokal bei $\varepsilon = 0$ bijektiv.

Hieraus folgt aber, dass es in jeder Umgebung von y_0 Punkte $y_1, y_2 \in X$ gibt, mit der Eigenschaft

$$I(y_1) < I(y_0) < I(y_2) \quad \text{und} \quad G(y_1) = G(y_0) = G(y_2).$$

Daher kann y_0 kein lokales Minimum des Funktionals I auf X unter der Nebenbedingung $G(y) = 0$ sein.

Aus Symmetriegründen kann analog geschlossen werden, dass dann auch y_0 kein lokales Extremum des Funktionals G auf X unter der Nebenbedingung $I(y) = I(y_0)$ sein kann.

Hiermit ergibt sich unmittelbar die folgende LAGRANGE-Multiplikatorenregel:

Satz (8.12) (Lagrange-Multiplikatorenregel)

Ist der zulässige Bereich $X = y_0 + X_0$ ein affin-linearer Teilraum von V , sind die Funktionale I und G zudem auf einer $\|\cdot\|$ -Umgebung von $y_0 \in X$ erklärt, besitzen sie dort schwach stetige GÂTEAUX-Ableitungen in alle Richtungen $v \in X_0$ und ist y_0 ein lokales Minimum von I auf X unter der Nebenbedingung $G(y) = 0$, so gilt entweder

- (a) $\delta G(y_0, v) = 0, \quad \forall v \in X_0,$ oder
- (b) $\exists \lambda \in \mathbb{R} : \forall v \in X_0 : \delta(I + \lambda G)(y_0, v) = 0.$

Beweis:

Ist (a) nicht gültig, so existiert ein $w \in X_0$ mit $\delta G(y_0, w) \neq 0$.

Mit einem beliebigen $v \in X_0$ muss die JACOBI-Matrix (8.11) singular sein. Setzt man $\lambda := -\delta I(y_0, w)/\delta G(y_0, w)$, so folgt $\delta I(y_0, v) + \lambda \delta G(y_0, v) = 0$, für alle $v \in X_0$. \square

Bemerkung (8.13)

Man kann die beiden Alternativen des obigen Satzes folgendermaßen zusammenfassen:

Es gibt LAGRANGE-Multiplikatoren $(\lambda_0, \lambda) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, so dass gilt:

$$\forall v \in X_0 : \quad \delta(\lambda_0 I + \lambda G)(y_0, v) = 0. \quad (8.14)$$

Im Fall $\lambda_0 = 0$ erhält man den *singulären* Fall (a), im Fall $\lambda_0 = 1$ ergibt sich der *reguläre* Fall (b). Im Übrigen ist die Bedingung (8.14) homogen in (λ_0, λ) , so dass es tatsächlich genügt, die Fälle $\lambda_0 = 0$ und $\lambda_0 = 1$ zu betrachten.

Bemerkung (8.15)

Die Aussage von Satz (8.12) lässt sich ohne Mühe auf den Fall mehrerer Nebenbedingungen G_1, \dots, G_m übertragen:

Sind die Funktionale I und G_1, \dots, G_m auf einer Umgebung von y_0 erklärt, besitzen sie dort schwach stetige GÂTEAUX-Ableitungen und ist y_0 ein lokales Minimum von I auf X unter den Nebenbedingungen $G_1(y) = \dots = G_m(y) = 0$, so gibt es LAGRANGE-Multiplikatoren $(\lambda_0, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\}$ mit der Eigenschaft:

$$\forall v \in X_0 : \quad \lambda_0 \delta I(y_0, v) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \delta G_j(y_0, v) = 0. \quad (8.16)$$

Wiederum kann man den singuläre Fall $\lambda_0 = 0$ und den regulären Fall $\lambda_0 = 1$ (o.B.d.A.) unterscheiden.

Ferner erhält man die folgende *Regularitätsbedingung*:

Es lässt sich $\lambda_0 = 1$ wählen, falls es Richtungen $v_1, \dots, v_m \in X_0$ gibt mit

$$\begin{pmatrix} \delta G_1(y_0, v_1) & \dots & \delta G_1(y_0, v_m) \\ \vdots & & \vdots \\ \delta G_m(y_0, v_1) & \dots & \delta G_m(y_0, v_m) \end{pmatrix} \quad \text{regulär.} \quad (8.17)$$

9. Klassische restringierte Variationsaufgaben

A. Isoperimetrische Variationsaufgaben.

Das Problem der Dido (9.1)

Vergil erzählt in der Äneis die Sage von der Gründung Karthagos:

Etwa 900 Jahre vor Christi Geburt lebte Dido, eine Tochter des phönizischen Königs Belus, in Tyros (im heutigen Libanon gelegen). Dido hatte einen Gemahl, der von ihrem Buder, Pygmalion, wegen seines Reichtums erschlagen wurde. Wegen dieser Untat musste Dido fliehen und gelangte nach Afrika, dorthin, wo heute Tunis liegt. Man wollte ihr dort jedoch nur soviel Land überlassen, wie sie mit einer Ochsenhaut begrenzen könne.

Dido schnitt die Haut in feine Streifen, nähte diese zusammen und konnte damit ein nicht unerhebliches Landstück an der Küste eingrenzen. Sie baute hier eine Burg, byrsa¹⁷ genannt, und legte damit den Grundstein von Karthago.

Die Aufgabe der Dido lässt sich mathematisch folgendermassen formulieren:

Welche Gestalt muss eine ebene, einfach geschlossene, glatte Kurve *gegebener Länge* haben, damit die von ihr berandete Fläche maximal wird?

Zur Vereinfachung nehmen wir die Küstenlinie bei Karthago (t -Achse) zur Hilfe, und nehmen an, dass die Kurve sich als eine Funktion $y(t)$ darstellen lässt.

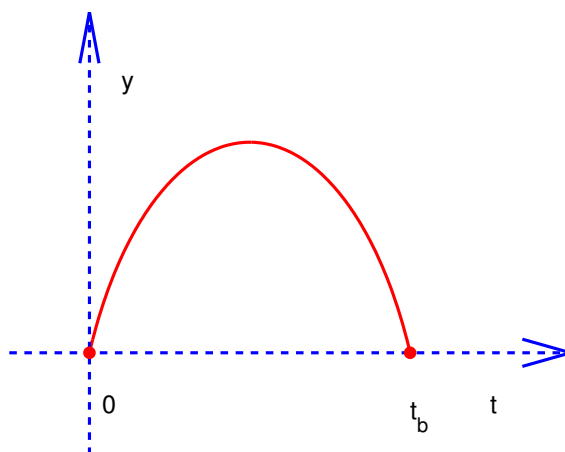


Abb. 9.1 Problem der Dido.

Damit lautet dann die Aufgabe: Man bestimme eine Funktion $y \in C^1[0, t_b]$ mit $y \geq 0$, so dass das Funktional

¹⁷byrsa heißt auf griechisch Ochsenhaut (gegerbtes Fell), auf phönizisch Festung

$$I(y) := - \int_0^{t_b} y(t) dt$$

minimiert wird unter den Nebenbedingungen

$$(a) \quad G(y) := \int_0^{t_b} \sqrt{1 + y'(t)^2} dt - L = 0,$$

$$(b) \quad y(0) = y(t_b) = 0.$$

Hierbei ist die Länge L vorgegeben, die Endzeit t_b kann gegeben oder frei sein.

In Erweiterung des obigen Beispiels lässt sich die folgende allgemeine Problemstellung formulieren:

Isoperimetrische Variationsaufgabe (9.2)

Zu vorgegebenen Funktionen $f, g \in C^2([t_a, t_b] \times \mathbb{R}^2)$ und $L, y_a, y_b \in \mathbb{R}$ ist eine Funktion $y \in C^1[t_a, t_b]$ zu bestimmen, die das Funktional

$$I(y) = \int_{t_a}^{t_b} f(t, y, y') dt$$

minimiert unter den Nebenbedingungen

$$(a) \quad G(y) := \int_{t_a}^{t_b} g(t, y, y') dt - L = 0,$$

$$(b) \quad y(t_a) = y_a, \quad y(t_b) = y_b.$$

Nebenbedingungen in integraler Form heißen *isoperimetrische*¹⁸ Nebenbedingungen.

Zur Gewinnung notwendiger Bedingungen lassen sich nun unmittelbar die Sätze (8.9) und (8.12) des letzten Abschnittes anwenden.

Die Funktionale I und G sind demnach auf $V := C^1[t_a, t_b]$ FRECHET-differenzierbar. Der zulässige Bereich X wird durch die Nebenbedingung (b) beschrieben und ist damit ein affin-linearer Teilraum von $C^1[t_a, t_b]$.

Wir erhalten dann die folgende Aussage

Satz (9.3)

Sei y_0 eine Lösung des isoperimetrischen Variationsproblems (9.2). Dann gibt es LAGRANGE-Multiplikatoren $(\lambda_0, \lambda) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, so dass y_0 Extremale des folgenden erweiterten Funktionals ist

$$\hat{I}(y) = \int_{t_a}^{t_b} (\lambda_0 f(t, y, y') + \lambda g(t, y, y')) dt.$$

¹⁸isoperimetrisch = mit gleichem Durchmesser

Ist y_0 darüber hinaus keine Extremale des Funktional $\int_{t_a}^{t_b} g(t, y, y') dt$, so lässt sich $\lambda_0 = 1$ wählen (Regularitätsbedingung).

Bemerkung (9.4)

Werden keine Randbedingungen vorgeschrieben, oder ist die Endzeit t_b frei, oder werden Vergleichsfunktionen $y \in C^{0,1}$ zugelassen, so gelten die natürlichen Randbedingungen bzw. die WEIERSTRASS–ERDMANNschen Eckenbedingungen analog für das erweiterte Funktional.

Numerische Lösung (9.5)

Wir gehen vom regulären Fall ($\lambda_0 = 1$) aus und nehmen an, dass sich die EULER–LAGRANGE Gleichung $\hat{f}_y - d/dt \hat{f}_{y'} = 0$ des erweiterten Funktional \hat{I} nach y'' auflösen lässt (hinreichende Bedingung ist $\hat{f}_{y' y'} \neq 0$). Dies ergibt eine Differentialgleichung der Form $y'' = h(t, y, y', \lambda)$.

Setzen wir nun $y_1(t) := y(t)$, $y_2(t) := y'(t)$, $y_3(t) := \int_{t_a}^t g(\tau, y(\tau), y'(\tau)) d\tau$ und $y_4(t) := \lambda$, so erhalten wir die folgende *Zweipunkt–Randwertaufgabe*:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, & y_1(t_a) &= y_a, \\ y_2' &= h(t, y_1, y_2, y_4), & y_1(t_b) &= y_b, \\ y_3' &= g(t, y_1, y_2), & y_3(t_a) &= 0, \\ y_4' &= 0, & y_3(t_b) &= L. \end{aligned} \tag{9.6}$$

Beispiel (9.7)

Wir betrachten das Problem der Dido (9.1). Zunächst sieht man, dass y_0 nur dann eine Extremale der Nebenbedingung $G(y)$ ist, wenn $y_0 = 0$ und $L = t_b$ ist. Diesen (uninteressanten) Fall schließen wir im Folgenden aus.

Nach Satz (9.3) gibt es also einen LAGRANGE–Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass y_0 Extremale des folgenden erweiterten Funktional ist

$$\hat{I}(y) := \int_0^{t_b} (-y + \lambda \sqrt{1 + y'^2}) dt.$$

Mit der (konstanten) HAMILTON–Funktion

$$H = \hat{f} - y' \hat{f}_{y'} = -y + \lambda \sqrt{1 + y'^2} - \frac{\lambda y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} = -C_1$$

(\hat{f} bezeichnet den erweiterten Integranden) erhalten wir die Differentialgleichung

$$(y - C_1)^2 (1 + y'^2) = \lambda^2.$$

und mittels Trennung der Variablen hieraus die allgemeine Lösung

$$(t - C_2)^2 + (y - C_1)^2 = \lambda^2.$$

Damit ist y_0 Abschnitt eines Kreises mit Mittelpunkt (C_1, C_2) und Radius $|\lambda|$.

Aufgrund der Lage der Randpunkte folgt $C_2 = t_b/2$ und $C_1 = \pm\sqrt{\lambda^2 - C_2^2}$.

Der Parameter λ ist schließlich durch die Längen-Nebenbedingung festgelegt.

Im Fall eines freien Randes, d.h. t_b ist frei (wohl aber $y(t_b) = 0$ vorgeschrieben), folgt mit der zugehörigen natürlichen Randbedingung: $H[t_b] = 0$, dass $C_1 = 0$ ist. Die Extremale bildet in diesem Fall also einen Halbkreis.

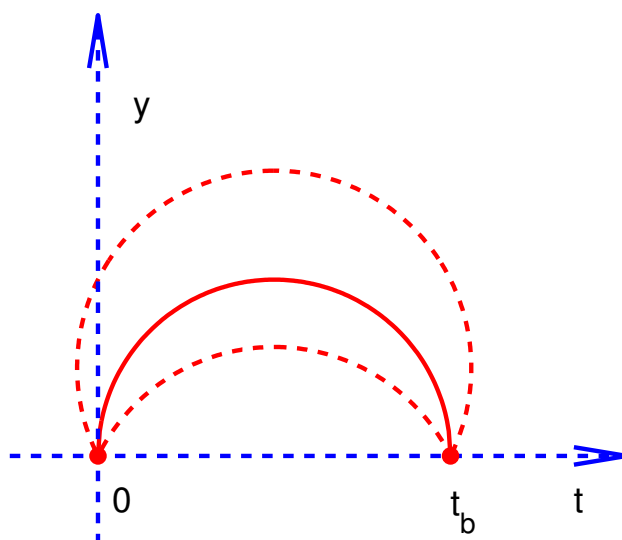


Abb. 9.2 Lösungen des Problems der Dido.

Bemerkung (9.8)

Mittels (8.15) lässt sich Satz (9.3) auf Variationsprobleme mit mehreren isoperimetrischen Nebenbedingungen erweitern.

Auch hinreichende Bedingungen lassen sich (wie früher) mittels Konvexitätseigenschaften erhalten.

Satz (9.9) (Hinreichende Bedingung)

Gegeben sei eine isoperimetrische Variationsaufgabe der Form (9.2).

- a) Gibt es einen LAGRANGE-Multiplikator $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass der erweiterte Integrand $\hat{f}(t, y, z) := f(t, y, z) + \lambda g(t, y, z)$ bei festem t bzgl. $(y, z) \in \mathbb{R}^2$

konvex ist, so ist jede Lösung $y_0 \in C^1[t_a, t_b]$ der Randwertaufgabe

$$\hat{f}_y[t] - \frac{d}{dt} \hat{f}_{y'}[t] = 0, \quad y_0(t_a) = y_a, \quad y_0(t_b) = y_b, \quad G(y_0) = 0$$

zugleich eine Lösung der Variationsaufgabe.

- b) Ist \hat{f} (bei festem t) sogar stark konvex, so ist y_0 eindeutig bestimmtes globales Minimum der Variationsaufgabe.

Beweis: Man verwende die Sätze (5.8), (5.5) und (8.1). □

Beispiel (9.10)

Zu minimieren sei das Funktional $I(y) := \int_0^1 y'(t)^2 dt$ unter den Nebenbedingungen

$$G(y) := \int_0^1 y(t) dt - 1 = 0, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Offenbar ist das Problem regulär (die isoperimetrische Nebenbedingung hat keine Extremalen) und für das erweiterte Funktional ergibt sich

$$\hat{I}(y) = \int_0^1 y'(t)^2 + \lambda y(t) dt.$$

Die EULER-LAGRANGE-Gleichung zusammen mit den Nebenbedingungen liefert die eindeutig bestimmte Extremale $y_0(t) = 6(t - t^2)$ mit zugehörigem LAGRANGE-Parameter $\lambda = -24$.

Da der erweiterte Integrand ferner stark konvex ist, ist y_0 auch das eindeutig bestimmte globale Minimum der Variationsaufgabe.

B. Variationsprobleme von Lagrange.

Die Methode der LAGRANGE-Multiplikatoren lässt sich ebenfalls auf Variationsprobleme mit Gleichungsrestriktionen der Form $g(t, y(t)) = 0, \forall t \in [a, b]$ anwenden.

Beispiel (9.11) (Geodätische)

Gegeben sei eine C^2 -Funktion $g \in C^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$ mit $X := g^{-1}(0) \neq \emptyset$ und der Regularitätsbedingung: $\forall x \in X : \nabla g(x) \neq 0$.

Dann ist durch $g = 0$ eine gleichungsdefinierte zweidimensionale Untermannigfaltigkeit X des \mathbb{R}^3 definiert.

Gesucht ist nun eine zwei vorgegebene Punkte $a, b \in X$ verbindende C^1 -Kurve $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, welche ganz in X verläuft und minimale Länge besitzt:

$$I(c) = \int_0^1 \|\dot{c}(t)\|_2 dt = \int_0^1 \sqrt{\dot{c}_1(t)^2 + \dot{c}_2(t)^2 + \dot{c}_3(t)^2} dt.$$

Nimmt man nun an, dass sich die Kurve c durch eine Koordinate, o.B.d.A. durch x , parametrisieren lässt, so gelangt man zur *Problemstellung*:

Gesucht ist eine C^1 -Funktion $(y, z) : [x_a, x_b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, die das Funktional

$$I(y, z) = \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{1 + y'(x)^2 + z'(x)^2} dx$$

minimiert unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} g(x, y(x), z(x)) &= 0, \quad \forall x \in [x_a, x_b], \\ y(x_a) &= y_a, \quad z(x_a) = z_a, \\ y(x_b) &= y_b, \quad z(x_b) = z_b. \end{aligned}$$

In Verallgemeinerung von (9.11) lässt sich nun die folgende Problemstellung formulieren:

Variationsproblem von Lagrange (9.12)

Zu vorgegebenen Funktionen $f, g \in C^2([t_a, t_b] \times \mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$ und Daten $y_a, y_b \in \mathbb{R}^n$ ist $y \in C^1([t_a, t_b], \mathbb{R}^n)$ so zu bestimmen, dass das Funktional

$$I(y) = \int_{t_a}^{t_b} f(t, y, y') dt$$

minimiert wird unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad g(t, y(t)) &= 0, \quad \forall t \in [t_a, t_b], \\ \text{(b)} \quad y(t_a) &= y_a, \quad y(t_b) = y_b. \end{aligned}$$

Hierbei nehmen wir an, dass $n \geq 2$ ist (für $n = 1$ wäre die Lösung ja schon durch die Nebenbedingung (a) festgelegt) und dass für eine C^2 -Lösung y_0 der Variationsaufgabe die folgende *Regularitätsbedingung* erfüllt ist

$$\nabla_y g(t, y_0(t)) \neq 0, \quad \forall t \in [t_a, t_b]. \quad (9.13)$$

Herleitung der Lagrange–Multiplikatorenregel.

Zur einfacheren Herleitung verschärfen wir die obige Voraussetzung noch ein wenig. Wir zerlegen die Variablen $y(t) =: (x(t)^T, z(t)^T)^T$ mit $x(t) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $z(t) \in \mathbb{R}$ und verlangen anstelle von (9.13)

$$\frac{\partial}{\partial z} g(t, x_0(t), z_0(t)) \neq 0, \quad \forall t \in [t_a, t_b]. \quad (9.14)$$

Damit lässt sich die Nebenbedingung $g(t, x, z) = 0$ längs der Lösung $y_0 = (x_0, z_0)$ lokal eindeutig nach der Variablen z auflösen (und zwar für alle t nach der gleichen!).

Für die Variablen x wird eine Standard–Einbettung gewählt:

$$x(t, \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon v(t),$$

mit $v \in X_0^2([t_a, t_b], \mathbb{R}^{n-1})$.

Wir zeigen zunächst, dass hiermit durch die Nebenbedingung

$$g(t, x(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon)) = 0 \quad (9.15)$$

eine (lokal) eindeutige C^2 –Einbettung $z(\cdot, \varepsilon)$ von z_0 definiert wird.

Hierzu setzen wir x_0, z_0 und v als C^2 –Funktionen auf ein *offenes* Intervall $U \supset [t_a, t_b]$ fort. Die Stetigkeit garantiert, dass dann auch für hinreichend kleines U gilt:

$$g_z(t, x_0(t), z_0(t)) \neq 0, \quad \forall t \in U.$$

Zu jedem Punkt $\bar{t} \in U$ und $\bar{\varepsilon} = 0$ wenden wir auf

$$G(t, \varepsilon, z) := g(t, x(t, \varepsilon), z) = 0 \quad (9.16)$$

den Satz über implizite Funktionen an (z.B. Königsberger, Analysis 2, Abschnitt 3.4). Er besagt: Es gibt zu jedem dieser Punkte eine ε –Umgebung $U_{\bar{t}} \subset U$ von \bar{t} , ein $\varepsilon_{\bar{t}} > 0$, sowie eine eindeutig bestimmte C^2 –Funktion $z_{\bar{t}}(t, \varepsilon)$ für $t \in U_{\bar{t}}$ und $|\varepsilon| < \varepsilon_{\bar{t}}$, die (9.16) löst und für die $z_{\bar{t}}(t, 0) = z_0(t)$ gilt. Durch ev. Verkleinerung von $\varepsilon_{\bar{t}}$ lässt sich erreichen, dass auch $g_z(t, x(t, \varepsilon), z_{\bar{t}}(t, \varepsilon)) \neq 0$ gilt.

Die offenen Mengen $U_{\bar{t}} \times]-\varepsilon_{\bar{t}}, \varepsilon_{\bar{t}}[$ überdecken die kompakte Strecke $[t_a, t_b] \times \{0\}$ im \mathbb{R}^2 . Daher existiert eine endliche Teilüberdeckung (U_k, ε_k) , $k = 1, \dots, m$.

Je zwei der zugehörigen Lösungen $z_k(t, \varepsilon)$, $t \in U_k$, $|\varepsilon| < \varepsilon_k$ stimmen auf dem Schnitt ihrer Definitionsbereiche überein. Denn: Die Menge der Punkte, für die Gleichheit besteht ist *nichtleer* (wegen der Gleichheit für $\varepsilon = 0$). Sie ist *offen* (nach dem Satz über implizite Funktionen) und auch *abgeschlossen* im Schnitt der Definitionsbereiche (da beide Lösungen stetig sind). Der Schnitt ist aber *zusammenhängend*, also stimmen die beiden Lösungen im gesamten Schnitt der beiden Definitionsbereiche überein.

Durch Zusammensetzen der Einzellösungen ergibt sich also eine wohldefinierte C^2 –Einbettung $z(t, \varepsilon)$ auf $t \in [t_a, t_b]$, $|\varepsilon| < \bar{\varepsilon} := \min\{\varepsilon_k, k = 1, \dots, m\}$. \square

Aus der Eindeutigkeit der Lösung von (9.16) folgt schließlich, dass auch für alle $\varepsilon \in]-\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}[$ die Randbedingungen

$$z(t_a, \varepsilon) = z_a, \quad z(t_b, \varepsilon) = z_b. \quad (9.17)$$

erfüllt werden.

Damit ist das Paar $(x(\cdot, \varepsilon), z(\cdot, \varepsilon))$ eine zulässige Variation. Durch Einsetzen in das Zielfunktional $J(\varepsilon) := I(x(\cdot, \varepsilon), z(\cdot, \varepsilon))$ ergibt sich

$$0 = \left. \frac{dJ}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_a}^{t_b} (f_x^T v + f_{x'}^T v' + f_z z_\varepsilon + f_{z'} z'_\varepsilon) dt. \quad (9.18)$$

Aus (9.15) folgt durch Differentiation nach ε die Beziehung $g_x^T v + g_z z_\varepsilon = 0$. Diese Gleichung wird mit einem (zunächst) beliebigen (stetigem) $\lambda(t)$ multipliziert, sodann integriert und zu (9.18) addiert. Schließlich wird das entstehende Integral mit partieller Integration umgeformt:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_a}^{t_b} (f_x + \lambda g_x)^T v(t) + f_{x'}^T v'(t) + (f_z + \lambda g_z) z_\varepsilon(t, 0) + f_{z'} z'_\varepsilon(t, 0) dt \\ &= \int_{t_a}^{t_b} \left((f_x + \lambda g_x - \frac{d}{dt} f_{x'})^T v(t) + (f_z + \lambda g_z - \frac{d}{dt} f_{z'}) z_\varepsilon(t, 0) \right) dt. \end{aligned}$$

Wir wählen $\lambda(t)$ nun so, dass der zweite Summand verschwindet, also

$$\lambda(t) := - \frac{1}{g_z(t, y_0)} (f_z - \frac{d}{dt} f_{z'}). \quad (9.19)$$

Man beachte, dass λ hiermit wegen der Voraussetzung (9.14) wohldefiniert ist. Damit folgt nun für alle $v \in X_0^1([t_a, t_b], \mathbb{R}^{n-1})$:

$$0 = \int_{t_a}^{t_b} (f_x + \lambda g_x - \frac{d}{dt} f_{x'})^T v(t) dt$$

und damit aus dem Fundamentallemma:

$$(f_x + \lambda g_x) - \frac{d}{dt} f_{x'} = 0. \quad (9.20)$$

Insgesamt haben wir hiermit den folgenden Satz bewiesen:

Satz (9.21)

Ist y_0 eine C^2 -Lösung der Variationsaufgabe (9.12) und gilt für alle $t \in [t_a, t_b]$ die Regularitätsbedingung $g_{y_n}(t, y_0(t)) \neq 0$, so existiert ein stetiger LAGRANGE-Parameter $\lambda : [t_a, t_b] \rightarrow \mathbb{R}$, so dass y_0 stationäre Lösung des folgenden erweiterten Funktionals ist

$$\hat{I}(y) = \int_{t_a}^{t_b} f(t, y, y') + \lambda g(t, y) dt.$$

Bezeichnet $\hat{f}(t, y, y', \lambda)$ den erweiterten Integranden, so ist y_0 demnach eine Lösung der Randwertaufgabe

$$\hat{f}_y - \frac{d}{dt} \hat{f}_{y'} = 0, \quad y(t_a) = y_a, \quad y(t_b) = y_b.$$

Der LAGRANGE-Parameter λ wird durch die Nebenbedingung $g(t, y) = 0$ festgelegt.

Bemerkung (9.22)

- a) Der obige Satz (9.21) gilt auch unter der schwächeren Annahme (Regularitätsbedingung) (9.13).

Zum Beweis überdeckt man das Intervall $[t_a, t_b]$ wiederum durch endlich viele offene Intervalle, in denen jeweils die partielle Ableitung g_{y_ℓ} für *eine* Komponente ℓ nicht verschwindet. Intervallweise wird sodann die Argumentation aus dem obigen Beweis verwendet. Dabei zeigen die Relationen (9.19) und (9.20), dass der LAGRANGE-Parameter λ von dem jeweiligen Index ℓ unabhängig ist.

- b) Satz (9.21) gilt analog im Fall allgemeinerer Randbedingungen. Diese sind dann durch die entsprechenden natürlichen Randbedingungen für das erweiterte Funktional zu ergänzen.
- c) Schließlich lassen sich natürlich auch mehrere Gleichungsnebenbedingungen $g_j(t, y) = 0$, $j = 1, \dots, m$ mit prinzipiell gleicher Beweistechnik behandeln. Hierbei ist $m < n$ vorausgesetzt.

Die zugehörige Regularitätsbedingung lautet dabei

$$\nabla_y g_j(t, y_0(t)), \quad j = 1, \dots, m \quad \text{linear unabhängig}, \quad \forall t \in [t_a, t_b].$$

Numerische Lösung (9.23)

Wir geben eine prinzipielle Möglichkeit an, ein LAGRANGE-Variationsproblem im Fall $n = 2$ numerisch zu lösen. Dazu schreiben wir wieder $y = (x, z)^T$. Die beiden EULER-LAGRANGE-Gleichungen lauten dann

$$\begin{aligned} (f_x + \lambda g_x) - \frac{d}{dt} f_{x'} &= 0 \\ (f_z + \lambda g_z) - \frac{d}{dt} f_{z'} &= 0. \end{aligned}$$

Aus diesen beiden Gleichungen lässt sich λ eliminieren; man erhält

$$(f_x g_z - f_z g_x) - g_z \frac{d}{dt} f_{x'} + g_x \frac{d}{dt} f_{z'} = 0$$

Führt man die totalen Zeitableitungen aus, so ergibt sich

$$(g_x f_{x' z'} - g_z f_{x' x'}) x'' + (g_x f_{z' z'} - g_z f_{x' z'}) z'' - H(t, x, z, x', z') = 0, \quad (9.24)$$

wobei in H die Terme kleinerer Ableitungsordnungen zusammengefasst sind.

Zweimalige Differentiation der Nebenbedingung $g(t, x, z) = 0$ ergibt

$$g_x x'' + g_z z'' - G(t, x, z, x', z') = 0. \quad (9.25)$$

Die Relationen (9.24) und (9.25) werden nach x'' , z'' aufgelöst. Man erhält ein Differentialgleichungssystem der Form

$$x'' = \frac{1}{D} F(t, x, z, x', z'), \quad z'' = \frac{1}{D} G(t, x, z, x', z') \quad (9.26)$$

mit der Diskriminante $D := g_z^2 f_{x'x'} - 2g_x g_z f_{x'z'} + g_x^2 f_{z'z'}$.

Ist nun $D \neq 0$ längs der Extremalen, so liefert (9.26) zusammen mit den gegebenen Randbedingungen

$$x(t_a) = x_a, \quad z(t_a) = z_a, \quad x(t_b) = x_b, \quad z(t_b) = z_b$$

eine wohldefinierte Randwertaufgabe.

C. Nebenbedingungen in Form von Differentialgleichungen.

Es ist nunmehr naheliegend, die Nebenbedingung $g = 0$ dadurch zu erweitern, dass man in g auch das Auftreten der Ableitung y' zulässt. Solche Variationsaufgaben mit impliziten Differentialgleichungen als Nebenbedingungen heißen in der Literatur meist ebenfalls *Probleme von LAGRANGE*.

Um die Beweistechnik einfacher zu gestalten und um uns auch an den praktischen Anwendungen auf Optimalsteuerungsaufgaben zu orientieren, vgl. Abschnitt 7, schränken wir uns im Folgenden auf den Fall eines *expliziten* Differentialgleichungssystems ein und unterteilen auch die Variablen $y = (x, u)$ analog zu Abschnitt 7.

Problemstellung (9.27)

Zu vorgegebenen Funktionen $f_0 \in C^2([t_a, t_b] \times \mathbb{R}^{n+2m}, \mathbb{R})$, $f \in C^2([t_a, t_b] \times \mathbb{R}^{n+2m}, \mathbb{R}^n)$ und Daten $x_a, x_b \in \mathbb{R}^n$, $u_a, u_b \in \mathbb{R}^m$ sind Funktionen $x \in C^1([t_a, t_b], \mathbb{R}^n)$ und $u \in C^1([t_a, t_b], \mathbb{R}^m)$ gesucht, so dass das Funktional

$$I(x, u) = \int_{t_a}^{t_b} f_0(t, x, u, u') dt$$

minimiert wird unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad x'(t) &= f(t, x(t), u(t), u'(t)), \quad \forall t \in [t_a, t_b], \\ \text{(b)} \quad x(t_a) &= x_a, \quad x(t_b) = x_b, \\ u(t_a) &= u_a, \quad u(t_b) = u_b. \end{aligned}$$

Konstruktion einer Einbettung:

Wir nehmen wieder an, dass (x_0, u_0) eine C^2 -Lösung (lokal/global) der Variationsaufgabe (9.27) ist und konstruieren folgendermaßen eine Einbettung dieser Lösung:

Zu beliebigen C^2 -Funktionen $w_1, \dots, w_{n+1} \in X_0^2([t_a, t_b], \mathbb{R}^m)$ setzen wir

$$u(t, \varepsilon) := u_0(t) + \sum_{k=1}^{n+1} \varepsilon_k w_k(t) \quad (9.28)$$

mit $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+1})^T \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Diese Einbettung setzen wir in die Nebenbedingung (a) ein und erhalten die folgende Anfangswertaufgabe für eine Einbettung $x(t, \varepsilon)$ der Lösung x_0 :

$$\begin{aligned} x' &= f(t, x, u_0 + \sum_k \varepsilon_k w_k, u_0' + \sum_k \varepsilon_k w_k'), \\ x(t_a, \varepsilon) &= x_a. \end{aligned} \quad (9.29)$$

Gemäß der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen besitzt die obige Anfangswertaufgabe für hinreichend kleine $\|\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon_{max}$ auf dem gesamten kompakten Intervall $[t_a, t_b]$ eine eindeutig bestimmte Lösung $x(t, \varepsilon)$. Ferner ist diese Lösung eine C^2 -Funktion der Variablen $(t, \varepsilon) \in [t_a, t_b] \times [-\varepsilon_{max}, \varepsilon_{max}]^{n+1}$ und es gilt

$$x(t, 0) = x_0(t), \quad t \in [t_a, t_b]. \quad (9.30)$$

Die zugehörigen Variationen

$$v_k(t) := \frac{\partial x}{\partial \varepsilon_k}(t, 0) \in \mathbb{R}^n, \quad k = 1, \dots, n+1 \quad (9.31)$$

genügen den folgenden Variationsgleichungen (lineare Anfangswertaufgabe)

$$\begin{aligned} v_k' &= f_x^T v_k + f_u^T w_k + f_{u'}^T w_k', \\ v_k(0) &= 0. \end{aligned} \quad (9.32)$$

Die letzten noch fehlenden Bedingungen für eine zulässige Einbettung $(x(t, \varepsilon), u(t, \varepsilon))$, nämlich die Randbedingungen an x im Punkt t_b , formulieren wir als Nebenbedingung:

$$G(\varepsilon) := x(t_b, \varepsilon) - x_b = 0 \in \mathbb{R}^n, \quad \|\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon_{max}, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}^{n+1}. \quad (9.33)$$

Insgesamt ergibt sich damit die folgende Aussage:

Die C^2 -Funktion $J(\varepsilon) := I(x(\cdot, \varepsilon), u(\cdot, \varepsilon))$ besitzt in $\varepsilon = 0$ ein (lokales/globales) Minimum unter der Nebenbedingung $G(\varepsilon) = 0$.

Auf diesen Sachverhalt lässt sich die Theorie der gleichungsrestringierter Optimierungsaufgaben anwenden. Die zugehörigen notwendigen Bedingungen lauten: Es gibt LAGRANGE-Multiplikatoren $\ell_0 \in \mathbb{R}$ und $\ell \in \mathbb{R}^n$, die nicht beide verschwinden, $(\ell_0, \ell) \neq 0$, so dass die erweiterte Zielfunktion

$$\hat{J}(\varepsilon) := \ell_0 J(\varepsilon) + \ell^T G(\varepsilon)$$

in $\varepsilon = 0$ einen stationären Punkt besitzt.

Wieder gilt o.B.d.A. $\ell_0 \in \{0, 1\}$ sowie die folgende *Regularitätsbedingung* :

Sind die Gradienten der Nebenbedingungen $\nabla G_1(0), \dots, \nabla G_n(0)$ linear unabhängig (in \mathbb{R}^{n+1}), so lässt sich $\ell_0 = 1$ wählen.

Damit folgt also:

$$\forall k = 1, \dots, n+1 : \quad \ell_0 \frac{\partial J}{\partial \varepsilon_k}(0) + \ell^T v_k(t_b) = 0. \quad (9.34)$$

Wir überlegen uns an dieser Stelle, dass die LAGRANGE-Multiplikatoren $(\ell_0, \ell^T) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tatsächlich von den (beliebig vorgegebenen) Variationen w_1, \dots, w_{n+1} *unabhängig* gewählt werden können.

Dazu schreiben wir (9.34) als ein homogenes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial J}{\partial \varepsilon_1} & v_1(t_b)^T \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial J}{\partial \varepsilon_{n+1}} & v_{n+1}(t_b)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_0 \\ \vdots \\ \ell_n \end{pmatrix} = 0. \quad (9.35)$$

Aufgrund der obigen notwendigen Bedingung ist die Koeffizientenmatrix A dieses linearen Gleichungssystems für *jede* Wahl der Variationen w_1, \dots, w_{n+1} singulär. Ferner sieht man mittels der Variationsgleichungen (9.32) und der Relation

$$\frac{\partial J}{\partial \varepsilon_k}(0) = \int_{t_a}^{t_b} (f_{0x}^T v_k + f_{0u}^T w_k + f_{0u'}^T w'_k) dt, \quad k = 1, \dots, n+1, \quad (9.36)$$

dass die k -te Zeile der Matrix A nur von w_k , nicht jedoch von den anderen Variationen w_j , $j \neq k$, abhängt.

Bezeichnet $p \leq n$ nun den maximal möglichen Rang der Matrix A (für alle Variationen $w_1, \dots, w_{n+1} \in X_0^2$) und wird w_1, \dots, w_p dann so gewählt, dass die ersten p Zeilen von A linear unabhängig sind, so folgt, dass (9.34) mit festen (ℓ_0, ℓ) unabhängig von der Wahl der Variationen w_{p+1}, \dots, w_{n+1} gültig ist. Die entsprechenden Zeilen $p+1, \dots, n+1$ müssen ja von den ersten p Zeilen linear abhängig sein. Damit ist (9.34) aber – mit diesen ℓ_0, ℓ – auch für *alle* Variationen w_1, \dots, w_{n+1} gültig. \square

Wir fahren nun mit der Herleitung der LAGRANGE-Multiplikatorenregel fort.

Dazu multiplizieren wir (9.32) mit einer (zunächst beliebigen) Funktion $\lambda \in C^1([t_a, t_b], \mathbb{R}^n)$, integrieren und addieren dies zu (9.34). Mit (9.36) folgt dann für alle $k = 1, \dots, n+1$:

$$\int_{t_a}^{t_b} \left[\ell_0 (f_{0x}^T v_k + f_{0u}^T w_k + f_{0u'}^T w'_k) + \lambda^T (f_x^T v_k + f_u^T w_k + f_{u'}^T w'_k - v'_k) \right] dt + \ell^T v_k(t_b) = 0.$$

Mit dem *erweiterten Integranden* :

$$\hat{f}(t, x, x', u, u', \lambda) := \ell_0 f_0(t, x, u, u') + \lambda^T (f(t, x, u, u') - x') \quad (9.37)$$

lässt sich diese Beziehung folgendermaßen schreiben

$$\int_{t_a}^{t_b} \left[\hat{f}_x^T v_k + \hat{f}_u^T w_k + \hat{f}_{u'}^T w'_k - \lambda^T v'_k \right] dt + \ell^T v_k(t_b) = 0.$$

Den Term $\lambda^T v'_k$ wandeln wir mit partieller Integration um. Da $v_k(0) = 0$ ist, ergibt sich:

$$\int_{t_a}^{t_b} \left(\hat{f}_u^T w_k + \hat{f}_{u'}^T w'_k \right) dt + \int_{t_a}^{t_b} \left(\hat{f}_x + \lambda' \right)^T v_k dt + \left(\ell - \lambda(t_b) \right)^T v_k(t_b) = 0. \quad (9.38)$$

Wir wählen λ nun als Lösung der linearen Anfangswertaufgabe

$$\lambda' = -\hat{f}_x = -(\ell_0 f_0 + \lambda^T f)_x, \quad \lambda(t_b) = \ell. \quad (9.39)$$

Die obige Differentialgleichung für λ heißt *adjungierte Differentialgleichung*. Für sie ist ein Anfangswert am rechten Intervallende vorgegeben, die adjungierte Gleichung ist also *rückwärts* zu integrieren. Ferner erkennen wir unschwer im Term $H = \ell_0 f_0 + \lambda^T f$ die HAMILTON-Funktion aus Abschnitt 7.B, vgl. (7.23), wieder.

Man beachte, dass die Existenz einer (eindeutig bestimmten) Lösung von (9.39) im gesamten Intervall $[t_a, t_b]$ aufgrund der Linearität der adjungierten Differentialgleichung gesichert ist.

Mit dieser Definition verbleibt von der notwendigen Bedingung (9.38)

$$\int_{t_a}^{t_b} \left(\hat{f}_u^T w_k + \hat{f}_{u'}^T w'_k \right) dt = 0, \quad \forall w_k \in X_0^2([t_a, t_b], \mathbb{R}^m).$$

Hiernach gilt also die entsprechende EULER-LAGRANGE Differentialgleichung für den erweiterten Integranden bezüglich der Variablen u .

Wir fassen das Ergebnis nun in folgendem Satz zusammen:

Satz (9.40)

Ist (x_0, u_0) eine C^2 -Lösung der Variationsaufgabe (9.27), so existiert ein LAGRANGE-Parameter $\ell_0 \in \{0, 1\}$ und es gibt adjungierte Variable $\lambda \in C^1([t_a, t_b], \mathbb{R}^n)$, so dass (x_0, u_0) Extremale des erweiterten Funktionals

$$\hat{I}(x, u) = \int_{t_a}^{t_b} \left[\ell_0 f_0(t, x, u, u') + \lambda(t)^T (f(t, x, u, u') - x') \right] dt$$

ist. Es gilt $\forall t \in [t_a, t_b] : (\ell_0, \lambda(t)) \neq 0$. Ferner lässt sich $\ell_0 = 1$ wählen, falls die in der Herleitung genannten Gradienten $\nabla G_k(0)$, $k = 1, \dots, n$ linear unabhängig sind.

Bemerkung (9.41)

- a) Die obige Beweistechnik lässt sich natürlich auch auf allgemeinere Variationsaufgaben mit Nebenbedingungen in Form von Differentialgleichungen ausdehnen.

Hat man z.B. ein Zielfunktional der Form

$$I(x, u) = g(x_a, x_b, u_a, u_b) + \int_{t_a}^{t_b} f_0(t, x, u, u') dt$$

und Randbedingungen der Gestalt

$$\begin{aligned} x_i(t_a) &= x_{i_a}, \quad (i \in I_a), & x_j(t_b) &= x_{j_b}, \quad (j \in I_b), \\ u_i(t_a) &= u_{i_a}, \quad (i \in J_a), & u_j(t_b) &= u_{j_b}, \quad (j \in J_b), \end{aligned}$$

so bleibt die Aussage von Satz (9.40) gültig. Zusätzlich ergeben sich die folgenden zugehörigen *natürlichen Randbedingungen*:

$$\begin{aligned} \lambda_i(t_a) &= -\ell_0 \frac{\partial g}{\partial x_{i_a}}, \quad (i \notin I_a), & \lambda_j(t_b) &= \ell_0 \frac{\partial g}{\partial x_{j_b}}, \quad (j \notin I_b), \\ \hat{f}_{u'_i}[t_a] &= \ell_0 \frac{\partial g}{\partial u_{i_a}}, \quad (i \notin J_a), & \hat{f}_{u'_j}[t_b] &= -\ell_0 \frac{\partial g}{\partial u_{j_b}}, \quad (j \notin J_b). \end{aligned}$$

- b) Für den Fall allgemeiner (nichtlinearer) Randbedingungen und das eventuelle Auftreten von Ecken sei auf die Ergebnisse aus Abschnitt 7 verwiesen.

Variationsaufgaben mit allgemeinen impliziten Differentialgleichungen als Nebenbedingungen und ev. nur stückweise glatten Extremalen werden z.B. in H. Sagan (1969), Theorem 6.2, behandelt.

Numerische Lösung (9.42)

Wir betrachten zwei Spezialfälle:

- a) **Fall 1:** Längs der Lösung (x_0, u_0) sei die HESSE-Matrix $\hat{f}_{u' u'}$ regulär.

Die EULER-LAGRANGE Gleichung $\hat{f}_u - \frac{d}{dt}\hat{f}_{u'} = 0$ lässt sich dann nach dem Satz über implizite Funktionen lokal nach u'' auflösen. Man erhält somit eine Differentialgleichung der Form $u'' = U(t, x, u, u', \lambda)$.

Zusammen mit den gegebenen Zustandsgleichungen und den adjungierten Differentialgleichungen ergibt sich somit die folgende wohldefinierte Randwertaufgabe:

$$\begin{aligned} x' &= f(t, x, u, u'), & x(t_a) &= x_a, & x(t_b) &= x_b, \\ u'' &= U(t, x, u, u', \lambda), & u(t_a) &= u_a, & u(t_b) &= u_b, \\ \lambda' &= -(\ell_0 f_0 + \lambda^T f)_x. \end{aligned}$$

- b) **Fall 2:** Das Variationsproblem sei unabhängig von u . Das Problem ist dann gerade von der Form einer *Optimalsteuerungsaufgabe* mit der (nurmehr stetigen) Steuerfunktion u' . Zur (eindeutigen) Festlegung von u wird $u(t_a) = 0$ gefordert, während $u(t_b)$ frei ist! An die Steuerung u' selbst können natürlich in diesem Zusammenhang keine Randbedingungen gestellt werden!

Die EULER-LAGRANGE Gleichung für u lautet dann $\frac{d}{dt}\hat{f}_{u'} = 0$. Zusammen mit der natürlichen Randbedingung $\hat{f}_{u'}[t_b] = 0$ ergibt sich also $\hat{f}_{u'}[t] = 0$, oder $H_{u'} = 0$, wobei

$$H = \ell_0 f_0(t, x, u') + \lambda^T f(t, x, u') \quad (9.43)$$

die HAMILTON-Funktion bezeichnet.

Nimmt man wieder an, dass die HESSE-Matrix $H_{u' u'}$ längs der Lösung regulär ist, so lässt sich die obige Gleichung nach dem Satz über implizite Funktionen lokal eindeutig nach u' auflösen: $u' = U(t, x, \lambda)$.

Diese Funktion wird nun in Zustands- und adjungierte Gleichungen eingesetzt. Dies liefert die folgende wohldefinierte Randwertaufgabe:

$$\begin{aligned} x' &= f(t, x, U(t, x, \lambda)), & x(t_a) &= x_a, & x(t_b) &= x_b, \\ \lambda' &= -(\ell_0 f_0 + \lambda^T f)_x. \end{aligned}$$

Beispiel (9.44) (Brachistochrone)

Wir werden das BERNOULLISCHE Problem der Bestimmung einer Kurve kürzester Fallzeit, das wir schon in Abschnitt 3 als Variationsaufgabe behandelt haben, nun als ein Optimalsteuerungsproblem formulieren. Dazu nutzen wir aus, dass beim Abrollen eines Massenpunktes (Kugel) auf einer Schiene ein Anteil der Schwerebeschleunigung \mathbf{g} senkrecht zur Schiene als *Zwangskraft* auf die Schiene wirkt und nicht zur

Beschleunigung des Massenpunktes beiträgt. Die Schwerebeschleunigung wird also zerlegt in $\mathbf{g} = \mathbf{n} + \mathbf{a}$ wobei \mathbf{n} senkrecht auf dem Geschwindigkeitvektor \mathbf{v} steht und \mathbf{a} die auf den Massenpunkt wirkende Beschleunigung beschreibt, vgl. dazu die Abbildung 9.3.

Der Normalanteil der Beschleunigung werde beschrieben durch

$$\mathbf{n} = u \mathbf{v}^\perp = u \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix},$$

wobei $u = u(t)$ ein unbestimmter Skalar (die Steuerung) ist.

Die Beschleunigung des Massenpunktes ist damit gegeben durch

$$\mathbf{a} = \mathbf{g} - \mathbf{n} = \begin{pmatrix} -u v_2 \\ -g + u v_1 \end{pmatrix}$$

und wir können das folgende Optimalsteuerungsproblem formulieren:

Man bestimme die Fallzeit $t_b > 0$ und eine Steuerung $u \in C^1([t_a, t_b], \mathbb{R})$, so dass das Funktional

$$I(x, v, u, t_b) := t_b = \int_0^{t_b} 1 dt$$

minimiert wird unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x_1' &= v_1, & x_1(0) &= 0, & x_1(t_b) &= 2, \\ x_2' &= v_2, & x_2(0) &= 0, & x_2(t_b) &= -1, \\ v_1' &= -u v_2, & v_1(0) &= 0, \\ v_2' &= -g + u v_1, & v_2(0) &= 0. \end{aligned}$$

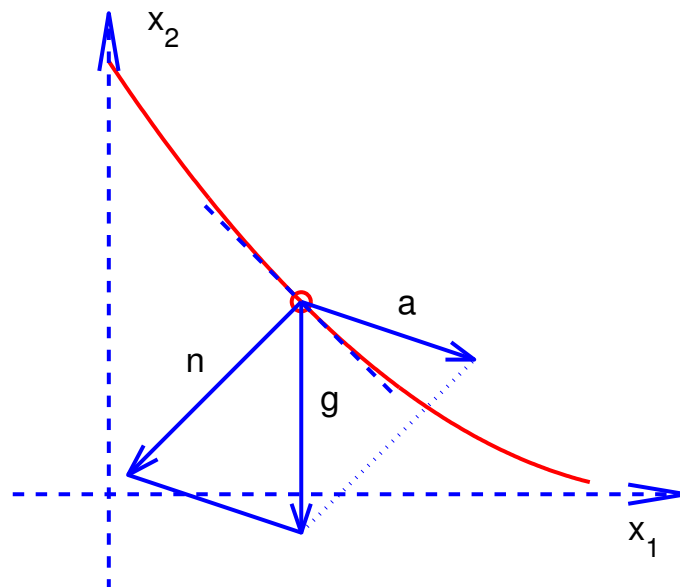


Abb. 9.3 Beschleunigungen bei der Brachistochrone.

Die Endzeit t_b und die Endgeschwindigkeit $(v_1(t_b), v_2(t_b))^T$ sind frei.

Wir stellen die notwendigen Bedingungen zusammen.

HAMILTON-Funktion :

$$\begin{aligned} H &= 1 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 - \lambda_3 v_2 u + \lambda_4 (v_1 u - g) \\ &= (1 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 - \lambda_4 g) + u (\lambda_4 v_1 - \lambda_3 v_2). \end{aligned}$$

Adjungierte Differentialgleichungen :

$$\begin{aligned} \lambda'_1 &= 0, \\ \lambda'_2 &= 0, \\ \lambda'_3 &= -\lambda_1 - u \lambda_4, \\ \lambda'_4 &= -\lambda_2 + u \lambda_3. \end{aligned}$$

Natürliche Randbedingungen :

$$\lambda_3(t_b) = \lambda_4(t_b) = 0, \quad H[t_b] = 0.$$

Optimale Steuerung :

Da die Steuerung linear in das Optimierungsproblem eingeht, hängt die Funktion $H_u = \lambda_4 v_1 - \lambda_3 v_2$ nicht von der Steuerung ab. Man nennt die Funktion H_u in solch einem Fall auch *Schaltfunktion* des Optimalsteuerungsproblems.

Der in (9.42) b) beschriebene Lösungsweg kann jedenfalls nicht verwendet werden, das Optimalsteuerungsproblem ist *singulär*.

Es gibt allerdings einen Trick, mit dessen Hilfe man in solch einem Fall mitunter doch Informationen über die optimale Steuerung erhält. Da H_u längs der Lösung identisch verschwindet, müssen auch sämtliche Zeitableitungen von H_u verschwinden. Mit etwas Mühe berechnet man

$$\begin{aligned} H_u &= \lambda_4 v_1 - \lambda_3 v_2 = 0, \\ \frac{d}{dt} H_u &= \lambda_1 v_2 - \lambda_2 v_1 + \lambda_3 g = 0, \\ \frac{d^2}{dt^2} H_u &= -2 \lambda_1 g + u (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 - \lambda_4 g) = 0. \end{aligned}$$

Da nun die HAMILTON-Funktion längs der Lösung konstant ist (das Problem ist autonom) und aufgrund der natürlichen Randbedingung sogar verschwindet, folgt mit $H_u = 0$ also: $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 - \lambda_4 g = -1$ und damit

$$u = -2 \lambda_1 g.$$

Damit folgt, dass die optimale Steuerung *konstant* sein muss, und wir können – sogar ohne Verwendung der adjungierten Variablen – die folgende Randwertaufgabe

(transformiert auf das feste Intervall $[0, 1]$) aufstellen:

$$\begin{aligned}
 x_1' &= t_b v_1, & x_1(0) &= 0, & x_1(1) &= 2, \\
 x_2' &= t_b v_2, & x_2(0) &= 0, & x_2(1) &= -1, \\
 v_1' &= -t_b u v_2, & v_1(0) &= 0, \\
 v_2' &= t_b (u v_1 - g), & v_2(0) &= 0. \\
 u' &= 0, \\
 t_b' &= 0.
 \end{aligned} \tag{9.45}$$

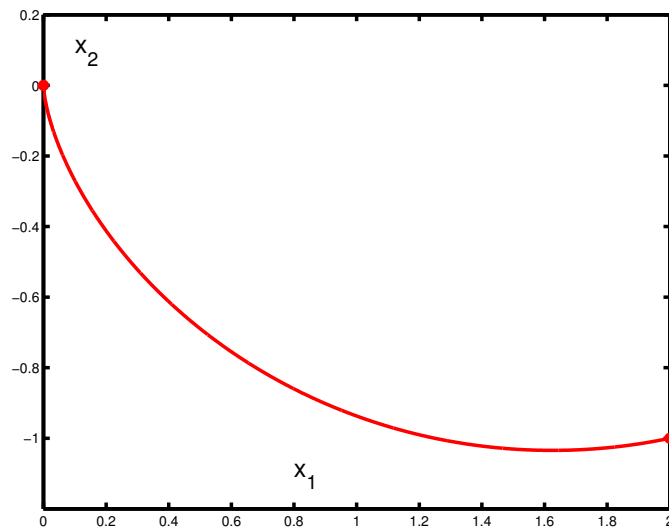


Abb. 9.4 Lösung der Randwertaufgabe (9.45).

Die Randwertaufgabe (9.45) lässt sich mit BNDSCO relativ leicht lösen. Man erhält in der Tat die schon aus Abschnitt 3 bekannte Lösung des Brachistochronenproblems mit relativ guter Genauigkeit, siehe Abbildung 9.4. Für die Endzeit liefert BNDSCO den Wert $t_b = 0.7978742726$, der auf zehn Dezimalen mit dem in Aufgabe 9 berechnetem Wert übereinstimmt, für die Steuerung ergibt sich $u = 4.397144875$. Hierbei wurde vereinfachend für die Erdbeschleunigung der Wert $g = 10$ verwendet.

In der folgenden Abbildung sind die Lösungskomponenten einschließlich der adjungierten Variablen λ_3 und λ_4 dargestellt. Für die konstanten adjungierten Variablen ergeben sich $\lambda_1 = -0.2198572437$ und $\lambda_2 = -0.04077735121$.

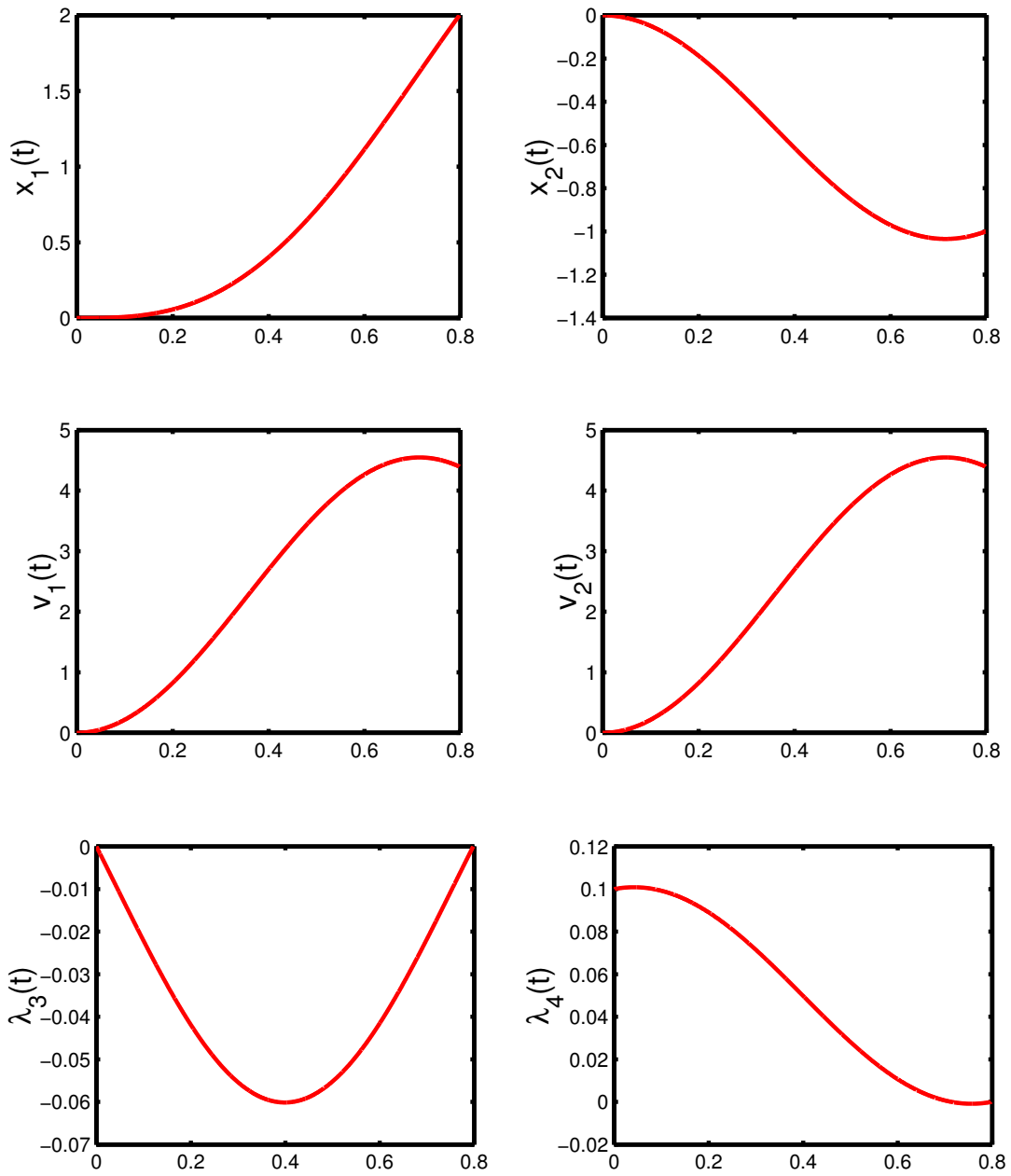


Abb. 9.5 Lösung der Randwertaufgabe (9.45).

10. Mehrpunkt–Randwertaufgaben, BNDSCO

Die notwendigen Bedingungen für Variationsaufgaben bzw. für Aufgaben der optimalen Steuerung führen, wie wir gesehen haben, in aller Regel auf *Randwertaufgaben für gewöhnliche Differentialgleichungen*.

Die allgemeine Problemstellung lautet dabei:

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)) \\ r(y(a), y(b)) &= 0 \\ \text{mit } y(t) \in \mathbb{R}^n, \quad r : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{10.46}$$

mit hinreichend glatten Funktionen f und r .

Bei Problem (10.1) handelt es sich um eine *Zweipunkt–Randwertaufgabe*.

Neben diesen *glatten* Randwertproblemen treten als notwendige Bedingungen von Optimalsteuerungsaufgaben aber auch Randwertprobleme auf, bei denen die rechte Seite f lediglich stückweise glatt ist und für die an diesen Unstetigkeitsstellen bzw. Knickstellen gewisse *innere* Punktbedingungen erfüllt werden müssen.

Solche Aufgaben sind dann vom Typ einer *Mehrpunkt–Randwertaufgabe* bzw. eines *Randwertproblems mit Schaltbedingungen*:

Problemstellung (Mehrpunkt–Randwertaufgabe)

Zu bestimmen ist ein Gitter $\Delta = (t_a, \tau_1, \dots, \tau_s, t_b) \in \mathbf{Z}_s[t_a, t_b]$ sowie eine *stückweise* C^1 -Funktion $y : \mathbb{C}_s^1(\Delta, \mathbb{R}^n)$ mit

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)), \\ f(t, y) &= \begin{cases} f_0(t, y) : & t_a \leq t < \tau_1 \\ f_1(t, y) : & \tau_1 \leq t < \tau_2 \\ \vdots & \vdots \\ f_s(t, y) : & \tau_s \leq t \leq t_b, \end{cases} \end{aligned} \tag{10.47}$$

$$y(\tau_k^+) = h_k(\tau_j, y(\tau_k^-)), \quad k = 1, \dots, s,$$

$$r(y(t_a), y(\tau_1^-), \dots, y(\tau_s^-), y(t_b)) = 0.$$

Hierbei sind die Funktionen $f_k : [t_a, t_b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $h_k : [t_a, t_b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $r : \mathbb{R}^{n(s+2)} \rightarrow \mathbb{R}^{n+s}$ als hinreichend glatt vorausgesetzt.

Wir beschreiben im Folgenden ein numerisches Verfahren, die *Mehrzielmethode*, zur Lösung derartiger Randwertaufgaben. Wir beginnen dabei mit dem sogenannten einfachen Schießverfahren (single shooting) und der Problemstellung (10.1).

A. Das einfache Schießverfahren

Die Grundidee der so genannten Schießverfahren ist die iterative Verwendung von numerischen Integrationsverfahren für Anfangswertaufgaben. Die bei der Randwertaufgabe (10.1) fehlenden Anfangsdaten werden zunächst geschätzt und sodann mit dem NEWTON-Verfahren iterativ verbessert, so dass im Grenzwert die Randbedingungen erfüllt werden.

Die zu (10.1) zugehörige Anfangswertaufgabe lautet

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)), & a \leq t \leq b, \\ y(a) &= z, \end{aligned} \tag{10.48}$$

wobei der Vektor $z \in \mathbb{R}^n$ die geschätzten Anfangsdaten bezeichnet.

Die Lösung von (10.3) werde mit $y(t; z)$ bezeichnet. Sie sei im gesamten Intervall $a \leq t \leq b$ definiert.

Damit ist die Randwertaufgabe in ein äquivalentes Nullstellenproblem für die Funktion

$$F(z) := r(z, y(b; z)) \tag{10.49}$$

überführt worden. $F : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist eine „glatte“ Funktion, sofern die Funktionen r und f hinreichend oft stetig differenzierbar sind. D ist eine offene Menge und enthält die Anfangswerte $z^* = y^*(a)$ der Lösungen y^* der Randwertaufgabe.

Zur numerischen Berechnung einer Nullstelle z^* lässt sich das gedämpfte (globalisierte) NEWTON-Verfahren verwenden. Der k -te Iterationsschritt lautet wie folgt:

$$\begin{aligned} JF(z^k) \Delta z^k &= -F(z^k) \\ z^{k+1} &:= z^k + \lambda_k \Delta z^k, & 0 < \lambda_k \leq 1. \end{aligned} \tag{10.50}$$

Hierbei beschreibt $JF(z)$ die JACOBI-Matrix von F und λ den Dämpfungsparameter (Schrittweitendämpfung).

Für die JACOBI-Matrix $JF(z)$ gilt:

$$\begin{aligned} JF(z) &= B_a + B_b \cdot Y(b) \\ B_a &:= \left. \frac{\partial}{\partial u} r(u, v) \right|_{(z, y(b; z))} \\ B_b &:= \left. \frac{\partial}{\partial v} r(u, v) \right|_{(z, y(b; z))} \\ Y(b) &:= \frac{\partial}{\partial z} y(b; z). \end{aligned} \tag{10.51}$$

Die Matrizen B_a und B_b beschreiben die Ableitungen der Randbedingungen. Sie lassen sich i. Allg. ohne Schwierigkeiten analytisch berechnen, werden in den Programmpaketen jedoch zumeist mittels numerischer Differentiation bestimmt.

Zur Berechnung der Matrix $Y(b)$ in (10.6) bieten sich zwei Wege an. Zum Einen lässt sich $Y(b)$ durch *numerische Differentiation* etwa mit Vorwärtsdifferenzen approximieren:

$$\begin{aligned}
 Y(b) &= (y_{ij}) \\
 y_{ij} &\approx \frac{y_i(b; z_1, \dots, z_j + \Delta z_j, \dots, z_n) - y_i(b; z_1, \dots, z_n)}{\Delta z_j}
 \end{aligned} \tag{10.52}$$

$$|\Delta z_j| \approx |z_j| \sqrt{\text{eps}}, \quad \text{eps: Maschinengenauigkeit.}$$

Zum Anderen könnte man $Y(b)$ auch durch numerische Integration der *Variationsgleichung* berechnen. Hierzu hat man die folgende Matrix–Anfangswertaufgabe zu lösen:

$$\begin{aligned}
 Y'(t) &= f_y(t, y(t; z)) Y(t), \quad a \leq t \leq b \\
 Y(a) &= I_n.
 \end{aligned} \tag{10.53}$$

Da die rechte Seite von (10.8) von der Trajektorie $y(t; z)$ abhängt, ist die simultane Integration des Matrix–Differentialgleichungssystems mit dem Ausgangssystem zu empfehlen.

Wählt man zur Approximation der JACOBI–Matrix das Verfahren der numerischen Differentiation, so erhält man den folgenden (groben) Algorithmus für das einfache Schießverfahren.

Algorithmus 10.9 (Einfaches Schießverfahren)

- (a) Wähle einen Startvektor $z^0 \in \mathbb{R}^n$; $k := 0$, $\lambda := 1$.
- (b) Löse die Anfangswertaufgabe (10.3) zur Berechnung von $y(b; z^{(k)})$ und setze

$$\begin{aligned}
 F(z^k) &:= r(z^k, y(b; z^k)); \\
 T^{(k)} &:= \|F(z^k)\|^2.
 \end{aligned}$$

Falls $k = 0$: gehe nach (d).

- (c) Falls $T^{(k)} > T^{(k-1)}$: $\ell := 1$, $\lambda := \lambda/2$;
 $z^k := z^{k-1} + \lambda \Delta z^{k-1}$;
 gehe nach (b).

Falls $\ell = 0$: $\lambda := \min(1, 2\lambda)$.

Falls $T^{(k)}$ hinreichend klein: *Abbruch!*

(d) NEWTON-Korrektur:

Für $j = 1, 2, \dots, n$:

$$\Delta z_j := \sqrt{\text{eps}} \max(1, |z_j^k|);$$

Berechnung von $y(b; z_1^k, \dots, z_j^k + \Delta z_j, \dots, z_n^k)$ nach (10.3).

Auswertung der JACOBI-Matrix $JF(z^k)$ nach (10.7);

Lösung des linearen Gleichungssystems $JF(z^k) \Delta z^k = -F(z^k)$.

Falls $\|\Delta z^k\|$ hinreichend klein: *Abbruch*;

Setze $k := k + 1$; $\ell := 0$; $z^k := z^{k-1} + \lambda \Delta z^{k-1}$.

Gehe nach (b).

Das einfache Schießverfahren besitzt zwei wesentliche Nachteile, die seine Anwendbarkeit bei komplizierteren Randwertaufgaben häufig stark einschränken. Beide Schwierigkeiten hängen damit zusammen, dass zur Auswertung von $F(z)$ und $JF(z)$ Anfangswertaufgaben über den gesamten Zeitbereich $a \leq t \leq b$ gelöst werden müssen.

Nun können nichtlineare Differentialgleichungen *bewegliche Singularitäten* besitzen, d.h., die Lösung $y(t; z)$ einer Anfangswertaufgabe existiert i. Allg. nur in einer von den Anfangswerten z abhängigen (maximalen) Umgebung $]t_{min}, t_{max}[$ der Anfangszeit $t = a$. Liegt die „Singularität“ t_{max} nun im inneren Intervall $]a, b[$, so ist die Auswertung von $F(z) = r(z, y(b; z))$ nicht möglich und das Verfahren bricht ab.

Beispiel (10.10) (nach Troesch ¹⁹)

Gegeben sei folgende Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} y'' &= \lambda \sinh(\lambda y) \\ y(0) &= 0, \quad y(1) = 1. \end{aligned}$$

Für $\lambda = 5$ besitzt die zugehörige Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} y'' &= \lambda \sinh(\lambda y) \\ y(0) &= 0, \quad y'(0) = z \end{aligned}$$

nur für $|z| \leq 0.05$ eine Lösung, die im ganzen Intervall $[0, 1]$ existiert; vgl. auch STOER, BULIRSCH, Abschnitt 7.3.

Für die tatsächliche Lösung der Randwertaufgabe erhält man: $z^* = 0.0457504 \dots$

¹⁹B.A. Troesch: A simple approach to a sensitive two-point boundary value problem. J. Computational Phys., vol. 21, 279–290, 1976.

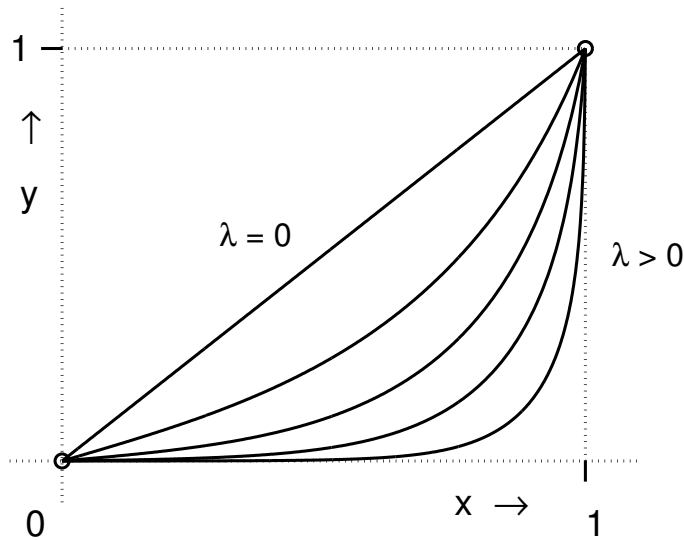


Abb. 10.1. Beispiel von TROESCH

Der zweite Nachteil des einfachen Schießverfahrens hängt mit der möglicherweise empfindlichen Abhängigkeit der Lösung $y(t; z)$ von den Anfangsdaten z zusammen. Die entsprechende Fehlerabschätzung lautet:

$$\|y(b; z) - y(b; \tilde{z})\| \leq e^{L|b-a|} \|z - \tilde{z}\|. \quad (10.11)$$

Hierbei bezeichnet L eine Lipschitz-Konstante von $f(t, y)$ bezüglich y . Vernachlässigt man die Abhängigkeit der Lipschitz-Konstanten von dem jeweils betrachteten (t, y) -Bereich, so hängt die Empfindlichkeit der Anfangswertaufgabe also im wesentlichen von dem Produkt aus Lipschitz-Konstanten und Integrationslänge $(b - a)$ ab.

Beispiel (10.12)

Gegeben sei die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} y'' &= 12y + y' \\ y(0) &= y(10) = 1. \end{aligned}$$

Die Lösung der zugehörigen Anfangswertaufgabe lautet:

$$y(t; z_1, z_2) = \frac{4z_1 - z_2}{7} e^{-3t} + \frac{3z_1 + z_2}{7} e^{4t}.$$

Setzt man diese in die Randbedingungen ein, so erhält man die (eindeutig bestimmten) Anfangsdaten

$$\begin{aligned} z_1^* &= y(0) = 1 \\ z_2^* &= y'(0) = -3 + 2.9 \dots 10^{-17}. \end{aligned}$$

Bei numerischer Rechnung wird man hierfür bestenfalls Approximationen

$$\tilde{z}_1 = 1, \quad \tilde{z}_2 = -3 + \varepsilon, \quad |\varepsilon| \approx \text{eps}$$

erwarten können. Die zugehörigen Lösungen $y(t; \tilde{z}_1, \tilde{z}_2)$ der Anfangswertaufgabe hängen jedoch sehr empfindlich von der Approximation für z_2^* ab.

So findet man:

$$\begin{aligned} y(10; 1, -3) &= e^{-30} \approx 9.36E - 14, \\ y(10; 1, -3 + 10^{-10}) &\approx \frac{1}{7} e^{30} \approx 1.53E + 12. \end{aligned}$$

Der gesuchte Anfangswert z_2^* lässt sich also numerisch gar nicht so genau berechnen, dass der Lösungsverlauf auch nur in etwa qualitativ richtig ist (für Maschinengenauigkeiten in der Größenordnung 10^{-10}).

Schätzt man die in (10.11) auftretenden Größen ab, so findet man für dieses Beispiel:

$$\begin{aligned} L &\approx 12, \quad b - a = 10, \\ e^{L(b-a)} &\approx 10^{52}, \\ \|z - \tilde{z}\| &\approx 10^{-10} \quad (\text{bei 10stelliger Rechnung}). \end{aligned}$$

B. Die Mehrzielmethode

Die Mehrzielmethode ist eine Modifikation des einfachen Schießverfahrens, welche die numerische Integration über „große“ Bereiche vermeidet und damit (in gewissem Umfang) eine Abhilfe für die genannten Probleme des einfachen Schießverfahrens bietet. Das Verfahren geht auf KELLER²⁰, OSBORNE²¹ und BULIRSCH²² zurück.

Die Grundidee des Verfahrens ist es, mit einer Intervallunterteilung zu arbeiten und Anfangswertaufgaben jeweils nur über diesen Teilintervallen zu lösen. Die Anfangswerte (für alle Teilintervalle) sind dann so zu bestimmen, dass im Grenzwert nicht nur die Randbedingungen erfüllt werden, sondern auch die aus den Teiltrajektorien zusammengesetzte Lösung glatt ist.

Wir betrachten wieder eine allgemeine Zweipunkt-Randwertaufgabe der Form (10.1). Ferner werde eine (feste) *Intervallunterteilung* vorgegeben:

²⁰H.B. Keller: Numerical Methods for Two-Point Boundary-Value Problems. Blaisdell, London 1968.

²¹M.R. Osborne: On shooting methods for boundary value problems. J. Math. Anal. Appl., vol. 27, 1969

²²R. Bulirsch: Die Mehrzielmethode zur numerischen Lösung von nichtlinearen Randwertproblemen und Aufgaben der optimalen Steuerung. Report der Carl-Cranz-Gesellschaft, 1971.

$$a = t_1 < t_2 < \dots < t_m = b. \quad (10.13)$$

Die t_j heißen *Mehrzielknoten*.

Für jedes Teilintervall werden Anfangswerte

$$z_j \approx y(t_j), \quad j = 1, \dots, m-1$$

geschätzt und die jeweiligen Anfangswertaufgaben auf den Teilintervallen

$$\begin{aligned} y' &= f(t, y), & t_j \leq t \leq t_{j+1} \\ y(t_j) &= z_j \end{aligned} \quad (10.14)$$

(numerisch) gelöst. Die Lösungen werden wie üblich mit $y(t; t_j, z_j)$ bezeichnet.

Die zusammengesetzte Trajektorie

$$y(t; z_1, \dots, z_{m-1}) := \begin{cases} y(t; t_1, z_1) & : t_1 \leq t < t_2 \\ y(t; t_2, z_2) & : t_2 \leq t < t_3 \\ \vdots & \vdots \\ y(t; t_{m-1}, z_{m-1}) & : t_{m-1} \leq t \leq t_m \end{cases} \quad (10.15)$$

löst nun die Randwertaufgabe genau dann, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} F_j(z_j, z_{j+1}) &:= y(t_{j+1}; t_j, z_j) - z_{j+1} = 0, & j = 1, 2, \dots, m-2 \\ F_{m-1}(z_1, z_{m-1}) &:= r(z_1, y(t_m; t_{m-1}, z_{m-1})) = 0. \end{aligned} \quad (10.16)$$

Die ersten Bedingungen sind die *Sprungbedingungen*, die letzte Bedingung beschreibt die vorgegebenen Randbedingungen. Damit ist die Randwertaufgabe wieder in ein äquivalentes Nullstellenproblem für die zusammengesetzte Funktion

$$F = (F_1, \dots, F_{m-1})^T : \mathbb{R}^{(m-1)n} \supset D \rightarrow \mathbb{R}^{(m-1)n}$$

überführt worden.

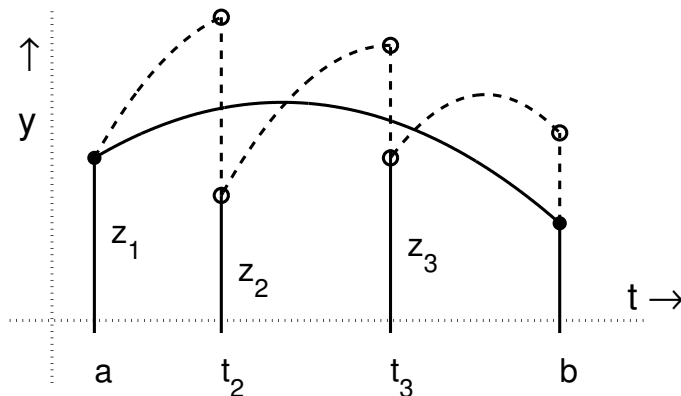


Abb. 10.2. Mehrzielmethode

Zur Nullstellenbestimmung wird das globalisierte (gedämpfte) NEWTON–Verfahren verwendet. Für die hierzu benötigte JACOBI–Matrix (auch *Mehrzielmatrix* genannt) $JF(z)$, $z = (z_1, \dots, z_{m-1})^T$ erhält man die folgende Blockstruktur:

$$JF(z) = \begin{pmatrix} Y_1 & -I_n & & & 0 \\ & Y_2 & -I_n & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & Y_{m-2} & -I_n \\ B_a & 0 & \cdots & 0 & B_b Y_{m-1} \end{pmatrix} \quad (10.17)$$

wobei

$$\begin{aligned} Y_j &:= \frac{\partial}{\partial z_j} y(t_{j+1}; t_j, z_j), \quad j = 1, \dots, m-1 \\ B_a &:= \frac{\partial}{\partial z_1} r(z_1, y(t_m; t_{m-1}, z_{m-1})) \\ B_b &:= \frac{\partial}{\partial z_m} r(z_1, y(t_m; t_{m-1}, z_{m-1})) \quad . \end{aligned} \quad (10.18)$$

Die Berechnung der Variations- oder auch Propagationsmatrizen Y_j , $j = 1, \dots, m-1$, kann wie beim einfachen Schießverfahren mittels numerischer Differentiation erfolgen. Der folgende Satz belegt die Regularität dieser Matrizen.

Satz (10.19)

Ist f eine C^1 –Funktion und sind die $z_j \in \mathbb{R}^n$ so gewählt, dass die Anfangswertaufgabe (10.14) eine Lösung $y(t; t_j, z_j)$ besitzt, die im gesamten Intervall $t_j \leq t \leq t_{j+1}$ existiert, so ist $Y_j \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ regulär.

Beweis:

$y(\cdot; t_j, z)$ ist zugleich Lösung der AWA $y' = f(t, y)$, $y(t_{j+1}) = y(t_{j+1}; t_j, z)$, also: $z = y(t_j; t_{j+1}, y(t_{j+1}; t_j, z))$. Dies gilt für alle z in einer Umgebung von z_j .

Die Differentiation dieser Identität nach z und Einsetzen von $z = z_j$ liefert:

$$I_n = \left[\frac{\partial}{\partial z_{j+1}} y(t_j; t_{j+1}, z_{j+1}) \right] \cdot Y_j .$$

Hieraus folgt die Regularität von Y_j . \square

Zur Anwendung des NEWTON–Verfahrens wird nun aber die Regularität der JACOBI–Matrix benötigt. Hierzu lässt sich der folgende Zusammenhang aufzeigen, der im Wesentlichen besagt, dass aus der Regularität der JACOBI–Matrix für das einfache Schießverfahren auf die Regularität der Mehrzielmatrix geschlossen werden kann.

Satz (10.20)

Die Randwertaufgabe (10.1) habe eine Lösung y^* .

Ferner sei $z_j^* := y^*(t_j)$ und $z^* = (z_1^*, \dots, z_{m-1}^*)^T$.

Die Abbildung $\Psi(z_1) := r(z_1, y(t_m; t_1, z_1))$ ist dann in einer Umgebung von z_1^* wohldefiniert. Die Abbildung sei regulär, d.h., sie besitze eine reguläre JACOBI-Matrix:

$$E^* := J\Psi(z_1^*) \in \mathbb{R}^{(n,n)}.$$

Dann folgt: $JF(z^*)$ ist regulär.

Beweis

Wir betrachten das Gleichungssystem $JF(z) \Delta z = -F(z)$ und schreiben die Variablen in der Reihenfolge:

$$(\Delta z_2, \Delta z_3, \dots, \Delta z_{m-1}, \Delta z_1).$$

Man erhält dann die folgende Blockstruktur des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} -I & & & 0 & Y_1 \\ Y_2 & -I & & & \\ & Y_3 & -I & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & Y_{m-2} & -I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & & & (B_b Y_{m-1}) & B_a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta z_2 \\ \Delta z_3 \\ \vdots \\ \Delta z_{m-1} \\ \Delta z_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ F_{m-1} \end{pmatrix}.$$

Hierauf wenden wir nun Block-GAUSS-Elimination an.

Die Pivotelemente sind dabei gerade die $(-I)$ -Matrizen. Es folgt:

$$\begin{pmatrix} (-I) & & & & Y_1 \\ & (-I) & & & [Y_2 Y_1] \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & (-I) & [Y_{m-2} \dots Y_1] \\ \mathbf{0} & & & & \{B_a + B_b Y_{m-1} \dots Y_1\} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta z_2 \\ \Delta z_3 \\ \vdots \\ \Delta z_{m-1} \\ \Delta z_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \widetilde{F}_1 \\ \widetilde{F}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \widetilde{F}_{m-1} \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} \widetilde{F}_1 &:= F_1 \\ \widetilde{F}_2 &:= F_2 + Y_2 F_1 \\ \widetilde{F}_3 &:= F_3 + Y_3 F_2 + Y_3 Y_2 F_1 \\ &\vdots \\ \widetilde{F}_{m-1} &:= F_{m-1} + Y_{m-1} F_{m-2} + \dots + Y_{m-1} \dots Y_2 F_1. \end{aligned}$$

Da die GAUSS–Elimination den (absoluten) Wert der Determinante erhält, folgt hiermit:

$$\det(JF(z)) = \pm \det(B_a + B_b Y_{m-1} \cdot Y_{m-2} \cdot \dots \cdot Y_1) = \pm \det E.$$

Setzt man hierin $z_j = z_j^*$ ein, so folgt schließlich:

$$\begin{aligned} E &= \frac{\partial r}{\partial z_1} + \frac{\partial r}{\partial z_m} \cdot \left(\frac{\partial y^*(t_m)}{\partial z_{m-1}} \right) \cdot \left(\frac{\partial y^*(t_{m-1})}{\partial z_{m-2}} \right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{\partial y^*(t_2)}{\partial z_1} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial z_1} [r(z_1, y(t_m; t_1, z_1))] \Big|_{z_1=z_1^*} \\ &= E^* \quad \text{regulär!} \end{aligned}$$

□

Der Beweis zu Satz (10.20) liefert zugleich eine schnelle und sparsame Methode zur Berechnung der NEWTON–Korrekturen Δz_j :

- a) Berechne $E := B_a + B_b Y_{m-1} \dots Y_1$
und $\tilde{F}_{m-1} := F_{m-1} + Y_{m-1} F_{m-2} + \dots + Y_{m-1} \dots Y_2 F_1$
- b) Löse $E \cdot \Delta z_1 = \tilde{F}_{m-1}$ (10.21)
- c) Berechne rekursiv:

$$\Delta z_{j+1} = Y_j \Delta z_j + F_j \quad (j = 1, \dots, m-2).$$

Der obige Algorithmus (manchmal auch „condensing algorithm“ genannt) ist jedoch nur dann numerisch brauchbar, falls das lineare Gleichungssystem (10.21)b) nicht zu schlecht konditioniert ist. Andernfalls ist der Algorithmus instabil, und es empfiehlt sich, statt dessen die direkte Auflösung des „großen“ linearen Gleichungssystems $JF(z) = -F(z)$ etwa mittels QR–Zerlegung vorzunehmen.

Aus dem Beweis zu (10.20) lässt sich auch umgekehrt folgern: Ist die Mehrzielmatrix $JF(z)$ in Lösungspunkt z^* regulär, so ist auch die Matrix $E^* = J\Psi(z_1^*)$ regulär.

Nach dem Umkehrsatz existieren daher Umgebungen

$$\begin{aligned} U_y &\subset \mathbb{R}^n \quad \text{von } z_1^* \\ U_0 &\subset \mathbb{R}^n \quad \text{von } 0, \end{aligned}$$

so dass $\Psi|_{U_y} : U_y \rightarrow U_0$ sogar bijektiv ist. Dies bedeutet, dass die Randwertaufgabe eine „isolierte“ Lösung besitzt und sogar bei Störung der Randdaten immer noch (lokal) eindeutig lösbar ist.

Dies ist die wesentliche Aussage des folgenden Einbettungssatzes.

Satz (10.22) (Einbettungssatz)

Das Randwertproblem (10.1) besitze eine Lösung y^* . Zu einer vorgegebenen Intervallunterteilung (10.13) und $z_j^* := y^*(t_j)$, $j = 1, \dots, m-1$ sei die Mehrzielmatrix $JF(z^*)$ regulär.

Dann existieren Umgebungen $U_y \subset \mathbb{R}^n$ von $\mathbf{y}^*(a)$ und U_0 von $0 \in \mathbb{R}^n$, so dass für jeden Vektor $\varepsilon \in U_0$ das „gestörte“ Randwertproblem:

$$y' = f(t, y); \quad r(y(a), y(b)) = \varepsilon$$

genau eine Lösung $y^*(\cdot; \varepsilon)$ mit $y^*(a, \varepsilon) \in U_y$ besitzt.

Insbesondere ist die Lösung der ursprünglichen Randwertaufgabe lokal eindeutig.

Beispiel (10.23)

Wir betrachten nochmals die lineare Randwertaufgabe aus Beispiel 10.12:

$$\begin{aligned} y'' &= 12y + y' \\ y(0) &= y(10) = 1. \end{aligned}$$

Akzeptiert man eine lokale Fehlerverstärkung von $e^{L(t_{j+1}-t_j)} \approx 10^5$, so genügt es offenbar, die Intervalllänge auf $|t_{j+1} - t_j| = 1$ zu reduzieren.

In der Tat liefert die Mehrzielmethode für dieses Beispiel mit $m = 11$ äquidistanten Mehrzielknoten, die in der folgenden Tabelle angegebenen Approximationen für $y(t_j)$ und $y'(t_j)$, $j = 1, \dots, 11$, die auf etwa fünf Dezimalstellen mit der exakten Lösung übereinstimmen.

| T(J) | Y(1, J) | Y(2, J) |
|------|-----------------|------------------|
| 0 | 0.1000 0000E+01 | -0.3000 0000E+01 |
| 1 | 0.4978 7068E-01 | -0.1493 6121E+00 |
| 2 | 0.2478 7522E-02 | -0.7436 2565E-02 |
| 3 | 0.1234 0980E-03 | -0.3702 2941E-03 |
| 4 | 0.6144 2501E-05 | -0.1843 2486E-04 |
| 5 | 0.3079 6345E-06 | -0.9094 6245E-06 |
| 6 | 0.1277 6450E-06 | 0.4044 4808E-06 |
| 7 | 0.6144 9072E-05 | 0.2457 4329E-04 |
| 8 | 0.3354 6162E-03 | 0.1341 8460E-02 |
| 9 | 0.1831 5503E-01 | 0.7326 2024E-01 |
| 10 | 0.9999 9267E+00 | 0.3999 9707E+01 |

C. Mehrpunkt–Randwertaufgaben

Wir beschreiben im Folgenden eine Variante der Mehrzielmethode, mit der auch Mehrpunkt–Randwertprobleme von Typ (10.2) behandelt werden können. Wir wiederholen nochmals die Problemstellung, genauer handelt es sich hierbei um eine Randwertaufgabe mit Schaltbedingungen.

Problemstellung (10.24)

Zu bestimmen ist ein Gitter $\Delta = (t_a, \tau_1, \dots, \tau_s, t_b) \in \mathbf{Z}_s[t_a, t_b]$ sowie eine *stückweise* C^1 -Funktion $y : [t_a, t_b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$(a) \quad y'(t) = f(t, y) = \begin{cases} f_0(t, y) : & t_a \leq t < \tau_1 \\ f_1(t, y) : & \tau_1 \leq t < \tau_2 \\ \vdots & \vdots \\ f_s(t, y) : & \tau_s \leq t \leq t_b, \end{cases}$$

$$(b) \quad y(\tau_k^+) = h_k(\tau_k, y(\tau_k^-)), \quad k = 1, \dots, s,$$

$$(c) \quad r(y(t_a), y(\tau_1^-), \dots, y(\tau_s^-), y(t_b)) = 0.$$

Die Funktionen $f_k : [t_a, t_b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $h_k : [t_a, t_b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $r : \mathbb{R}^{n(s+2)} \times \mathbb{R}^{n+s}$ werden als hinreichend glatt vorausgesetzt.

Um die Idee des Mehrzielverfahrens zur numerischen Lösung anzuwenden, setzen wir (formal)

$$z(t)^T := (y(t)^T, \tau_1, \dots, \tau_s) \in \mathbb{R}^{n+s}. \quad (10.25)$$

Nun werden (feste) Mehrzielknoten t_1, \dots, t_m wie in (10.13) gewählt. Wir nehmen an, dass die Mehrzielknoten von den Schaltpunkten (für alle Iterierten der Schaltpunkte) verschieden sind.

Dann lassen sich – bei Kenntnis von hinreichend genauen Schätzwerten für die Schaltpunkte τ_1, \dots, τ_s und hinreichend genauen Anfangsdaten y_j – die folgenden Anfangswertaufgaben in den Mehrzielintervallen $[t_j, t_{j+1}]$, $j = 1, \dots, m-1$ lösen:

$$z'(t) = \begin{pmatrix} f(t, y(t)) \\ 0 \end{pmatrix}; \quad z(t_j) = z_j := \begin{pmatrix} y_j \\ \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_s \end{pmatrix}. \quad (10.26)$$

Dazu werden zunächst diejenigen Schaltpunkte $\tau_{k_j}, \tau_{k_j+1}, \dots, \tau_{k_{j+1}-1}$ bestimmt, die in dem jeweiligen Mehrzielintervall $]t_j, t_{j+1}[$ liegen. Sodann wird mit dem Anfangswert y_j und der rechten Seite $f_{k_{j-1}}$ im Intervall $[t_j, \tau_{k_j}]$ integriert. In τ_{k_j} wird die

Integration gestoppt, die Sprungbedingung (10.24) (b) wird ausgeführt und es wird so fortfahrend mit der neuen rechten Seite f_{k_j} im Intervall $[\tau_{k_j}, \tau_{k_{j+1}}]$ weiterintegriert, bis schließlich t_{j+1} erreicht ist.

Nach der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen hängt die hiermit berechnete Trajektorie $z(t; t_j, z_j)$, $t_j \leq t \leq t_{j+1}$, in C^2 -weise von den Variablen (t, z_j) ab, wobei die hinreichende Glattheit der Funktionen f_k und h_k vorausgesetzt wurde.

Die zusammengesetzte Trajektorie

$$y(t; z_1, \dots, z_{m-1}) := \begin{cases} y(t; t_1, z_1) & : t_1 \leq t < t_2 \\ y(t; t_2, z_2) & : t_2 \leq t < t_3 \\ \vdots & \vdots \\ y(t; t_{m-1}, z_{m-1}) & : t_{m-1} \leq t \leq t_m \end{cases} \quad (10.27)$$

löst nun wie zuvor die Randwertaufgabe (10.24) genau dann, falls das folgende nicht-lineare Gleichungssystem in den Schätzwerten z_1, \dots, z_{m-1} erfüllt wird:

$$\begin{aligned} F_j(z_j, z_{j+1}) &:= z(t_{j+1}; t_j, z_j) - z_{j+1} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m-2, \\ F_{m-1}(z_1, \dots, z_{m-1}) &:= r(y_1, y(\tau_1^-), \dots, y(\tau_s^-), y(t_m; t_{m-1}, z_{m-1})) = 0. \end{aligned} \quad (10.28)$$

Dabei bezeichnet $y(\tau_k^-)$ den linksseitigen Grenzwert der Trajektorie im Schaltpunkt τ_k . Dieser lässt sich in Abhängigkeit der Schätzungen z_j schreiben: $y(\tau_k^-) = y(\tau_k^-; t_{j_k}, z_{j_k})$ mit einem Index $j_k \in \{1, \dots, m-1\}$ gegeben durch $t_{j_k} < \tau_k < t_{j_k+1}$. Daher hängt $y(\tau_k^-)$ in C^2 -weise von den Schätzungen z_1, \dots, z_{m-1} ab. Insbesondere sind die in (10.28) definierten Funktionen F_j also C^2 -Funktionen.

Für die JACOBI-Matrix (*Mehrzielmatrix*) der durch (10.28) definierten Abbildung

$$F = (F_1, \dots, F_{m-1})^T : \mathbb{R}^{(m-1)(n+s)} \supset D \rightarrow \mathbb{R}^{(m-1)(n+s)}$$

ergibt sich eine Blockstruktur analog zu (10.17):

$$JF(z) = \begin{pmatrix} Y_1 & -I_n & & & 0 \\ & Y_2 & -I_n & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & Y_{m-2} & -I_n \\ B_1 & B_2 & \cdots & B_{m-2} & B_{m-1} \end{pmatrix}. \quad (10.29)$$

Hierbei ist

$$\begin{aligned} Y_j &:= \frac{\partial}{\partial z_j} z(t_{j+1}; t_j, z_j), \quad j = 1, \dots, m-1 \\ B_j &:= \frac{\partial}{\partial z_j} F_{m-1}(z_1, \dots, z_{m-1}), \quad j = 1, \dots, m-1. \end{aligned} \quad (10.30)$$

Die Gleichung für die NEWTON-Korrektur Δz (ℓ bezeichne den Iterationsindex):

$$JF(z^\ell) \Delta z^\ell = -F(z^\ell) \quad (10.31)$$

lässt sich aufgrund der Matrix-Blockstruktur durch einen *condensing*-Algorithmus analog zu (10.21) lösen

$$\begin{aligned} \text{a) Berechne } E &:= \sum_{j=1}^{m-1} B_j Y_{j-1} \dots Y_1 \\ \text{und } \tilde{F}_{m-1} &:= \sum_{j=1}^{m-1} \left(\sum_{i=j+1}^{m-1} B_i Y_{i-1} \dots Y_{j+1} \right) F_j \end{aligned} \quad (10.32)$$

$$\text{b) Löse } E \cdot \Delta z_1 = \tilde{F}_{m-1}$$

c) Berechne rekursiv:

$$\Delta z_{j+1} = Y_j \Delta z_j + F_j \quad (j = 1, \dots, m-2).$$

Die Matrix E entspricht dabei wieder der JACOBI-Matrix für das einfache Schießverfahren, vgl. Satz (10.20). Ist diese im Lösungspunkt regulär, so ist auch die Mehrzielmatrix regulär und es gilt $\det(JF(z)) = \pm \det E$.

Aufgrund dieses Zusammenhangs lässt sich nun auch der *Einbettungssatz* (10.22) relativ leicht auf Randwertaufgaben mit Schaltbedingungen erweitern: Besitzt die Randwertaufgabe (10.24) eine Lösung mit regulärer Mehrzielmatrix $JF(z^*)$, so besitzt auch die in den Rand- und Schaltbedingungen gestörte Randwertaufgabe für hinreichend kleine Störungen eine lokal eindeutige Lösung, die zudem glatt von den Störungsparametern abhängt

Allerdings zeigen praktische Anwendungen, dass die Matrix E häufig deutlich schlechter konditioniert ist als die Mehrzielmatrix. Hierin spiegelt sich gerade die Überlegenheit des Mehrzielverfahrens gegenüber dem einfachen Schießverfahren wieder. Die Anwendung des *condensing* Verfahrens (10.32) würde dagegen zu einem numerisch instabilen Algorithmus führen.

In der Realisierung BNDSCO wird daher das lineare Gleichungssystem (10.31) durch ein Orthogonalisierungsverfahren (*QR-Zerlegung*) mittels HOUSEHOLDER-Spiegelungen weitgehend stabil gelöst. Dabei wird das HOUSEHOLDER-Verfahren in einer modifizierten Form angewendet, die die Blockstruktur der Matrix $JF(z^\ell)$ berücksichtigt.

Die Basis des Mehrzielverfahrens BNDSCO zur Lösung von Randwertaufgaben mit Schaltbedingungen ist wie zuvor das gedämpfte NEWTON-Verfahren zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems (10.28). Das Verfahren verwendet eine Dämpfungsstrategie nach DEUFLHARD²³ und eine – wiederum an die spezielle Blockstruktur angepasste BROYDEN-Approximation²⁴ der Jacobi-Matrizen $JF(z^\ell)$.

²³P. Deuffhard: A Relaxation Strategy for the Modified Newton Method, in: Bulirsch, Oettli, Stoer: Lecture Notes in Mathematics, Bd. 477, Springer, 1975.

²⁴H.J. Oberle: Appl. Math. Optim., Vol 5, 297–314, 1979.

Beispiel (10.33)

Wir betrachten die folgende Variationsaufgabe:

Gesucht sei eine stückweise C^1 -Funktion $y \in C_s^{0,1}[1, 9]$, die das Funktional

$$I(y) = \int_1^9 \frac{\sqrt{1 + y'(t)^2}}{y(t)} dt$$

unter den Nebenbedingungen $y(1) = y(9) = 3$ und $y(t) \leq y_{\max}$ minimiert.

Die notwendigen Bedingungen führen auf die folgende Randwertaufgabe mit einer Schaltbedingung für eine *stetige* Funktion $y \in C^{0,1}[1, 9]$ und zwei Schaltpunkten τ_1, τ_2 :

$$y' = \begin{cases} \sqrt{y_{\max}^2 - y^2}/y & : t \in [1, \tau_1] \\ 0 & : t \in [\tau_1, \tau_2] \\ -\sqrt{y_{\max}^2 - y^2}/y & : t \in [\tau_2, 9] \end{cases}$$

$$y(1) = y(9) = 3, \quad y(\tau_1) = y_{\max}.$$

Diese Randwertaufgabe lässt sich numerisch allerdings nicht direkt behandeln, da die rechten Seiten f_1 und f_3 in $y = y_{\max}$ nicht LIPSCHITZ-stetig, also unsere Glattheitsvoraussetzungen nicht erfüllt sind.

Es ist nun naheliegend, die störende Wurzel in der Differentialgleichung durch die Transformation $y(t) =: y_{\max} \cos(z(t))$ zu beseitigen.

Hierdurch ergibt sich dann die Mehrpunkt-Randwertaufgabe

$$z' = \begin{cases} -1/(y_{\max} \cos z) & : t \in [1, \tau_1] \\ 0 & : t \in [\tau_1, \tau_2] \\ 1/(y_{\max} \cos z) & : t \in [\tau_2, 9] \end{cases}$$

$$z(1) = z(9) = \arccos(3/y_{\max}), \quad z(\tau_1) = 0.$$

Für $y_{\max} = 4$ und $m = 11$ (äquidistante Mehrzielknoten) ist diese Randwertaufgabe mit BNDSCO problemlos lösbar. Trotz der groben Startschätzung

$$z^0(t) = \arccos(3/y_{\max}), \quad \tau_1 = 2, \quad \tau_2 = 8$$

liefert das Mehrzielverfahren nach neun Iterationen die Lösung mit etwa zehnstelliger Genauigkeit. Insbesondere stimmen die numerisch berechneten Schaltpunkte ebenfalls auf zehn Dezimalstellen mit den exakten Werten

$$\tau_1 = 1 + \sqrt{7}, \quad \tau_2 = 9 - \sqrt{7}$$

überein.

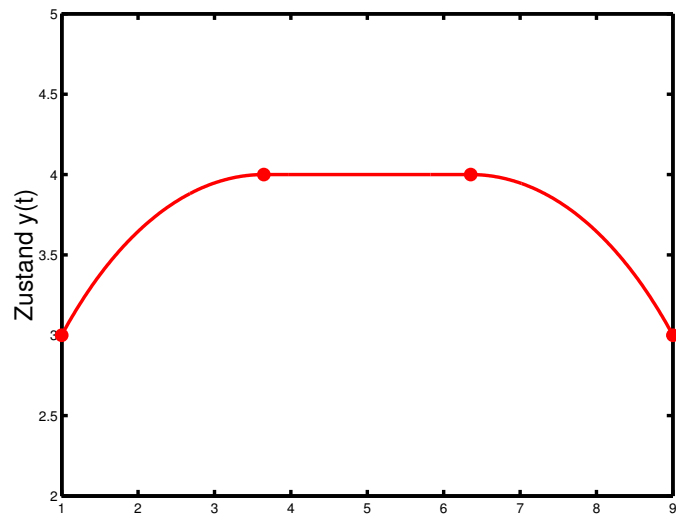


Abb. 10.3. Lösungskurve für Beispiel (10.33)

11. Die Legendre Bedingung

Bisher haben wir für verschiedene Variationsaufgaben bzw. Aufgaben der optimalen Steuerung die notwendigen Bedingungen *erster Ordnung* hergeleitet. Diese Bedingungen bedeuten die *Stationarität* des Zielfunktional für ein lokales bzw. globales Minimum. Daneben sind natürlich auch notwendige Bedingungen *zweiter Ordnung* zur Kennzeichnung einer minimierenden Extremalen hilfreich. Erst hierdurch lässt sich ja gegebenenfalls zwischen einem Minimum und einem Maximum des Zielfunktional unterscheiden.

Im endlich dimensionalen Fall $J : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ (offen), $x_0 \in D$ lokales Minimum von J , lautet die notwendige Bedingung zweiter Ordnung bekanntlich

$$\nabla^2 J(x_0) \quad \text{positiv semidefinit.} \quad (11.33)$$

Wie lässt sich diese Bedingung nun auf die verschiedenen Typen von Variationsaufgaben übertragen?

Wir beginnen mit den klassischen Variationsaufgaben. Die notwendigen Bedingungen zweiter Ordnung gehen hierbei auf LEGENDRE²⁵ zurück.

Problemstellung (11.2)

Zu minimieren sei das Funktional

$$I(y) := \int_a^b f(t, y(t), y'(t)) dt, \quad y \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n),$$

unter den Nebenbedingungen

$$y_i(a) = y_{i a}, \quad y_j(b) = y_{j b}, \quad i \in I_a, j \in I_b.$$

Sei nun $y_0 \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ eine Lösung der Variationsaufgabe, $v \in X_0^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ eine zulässige Variation. Für $\varepsilon \in \mathbb{R}$ werde – wie zuvor – gesetzt:

$$y(t, \varepsilon) := y_0(t) + \varepsilon v(t). \quad (11.3)$$

Durch (11.3) ist dann eine zulässige Einbettung der Lösung y_0 gegeben.

Die C^2 -Funktion $J(\varepsilon) := \int_a^b f(t, y(t, \varepsilon), y'(t, \varepsilon)) dt$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ besitzt daher in $\varepsilon = 0$

²⁵Adrien-Marie Legendre (1752–1833); Paris

ein globales Minimum. Insbesondere gilt also $J'(0) = 0$ und $J''(0) \geq 0$.

Für die erste Ableitung ergab sich

$$J'(\varepsilon) = \int_a^b f_y(t, y(t, \varepsilon), y'(t, \varepsilon))^T v(t) + f_{y'}(t, y(t, \varepsilon), y'(t, \varepsilon))^T v'(t) dt.$$

Sie hat in $\varepsilon = 0$ eine Nullstelle:

$$J'(0) = \int_a^b f_y[t]^T v(t) + f_{y'}[t]^T v'(t) dt = 0. \quad (11.4)$$

Aus dieser Bedingung hatten wir in Abschnitt 2 die EULER-LAGRANGE Gleichungen hergeleitet.

Für die zweite Ableitung in $\varepsilon = 0$ erhalten wir

$$J''(0) = \int_a^b \left(v(t)^T f_{yy}[t] v(t) + 2 v(t)^T f_{yy'}[t] v'(t) + v'(t)^T f_{y'y'}[t] v'(t) \right) dt. \quad (11.5)$$

Dieser Ausdruck heißt auch *die zweite Variation* des Funktional an der Stelle y_0 in Richtung v und wird zumeist mit $\delta_2 I(y_0)(v)$ bezeichnet.

Welche Folgerung ergibt sich nun aus der notwendigen Bedingung

$$\forall v \in X_0^1[a, b] : \quad \delta_2 I(y_0)(v) \geq 0? \quad (11.6)$$

Wir folgen zunächst dem historischen Weg von LEGENDRE für *eine* abhängige Variable ($n = 1$).

Hierfür lautet (11.5), (11.6)

$$\forall v \in X_0^1[a, b] : \quad \int_a^b \left(f_{yy}[t] v^2 + 2 f_{yy'}[t] v v' + f_{y'y'}[t] v'^2 \right) dt \geq 0.$$

Die Idee von LEGENDRE bestand nun darin, unter dem Integral ein vollständiges Quadrat zu erzeugen. Dazu addierte er zu dem obigen Integral den Term

$$\int_a^b \frac{d}{dt} (v^2 w) dt = (v^2 w) \Big|_a^b = 0,$$

wobei w eine beliebige C^1 -Funktion auf $[a, b]$ ist.

Es folgt

$$\begin{aligned}
J''(0) &= \int_a^b [f_{yy} v^2 + 2 f_{yy'} v v' + f_{y'y'} v'^2] + [2 v v' w + v^2 w'] dt \\
&= \int_a^b [(f_{yy} + w') v^2 + 2 (f_{yy'} + w) v v' + f_{y'y'} v'^2] dt \\
&= \int_a^b f_{y'y'} \left\{ \left(\frac{f_{yy} + w'}{f_{y'y'}} \right) v^2 + 2 \left(\frac{f_{yy'} + w}{f_{y'y'}} \right) v v' + v'^2 \right\} dt.
\end{aligned}$$

Hierbei wurde zusätzlich vorausgesetzt, dass das Variationsproblem regulär sei, also $f_{y'y'}[t] \neq 0$, $\forall t \in [a, b]$, gilt.

Die geschweifte Klammer ergibt nun genau dann für alle $v \in X_0^1$ ein vollständiges Quadrat, wenn gilt

$$\left(\frac{f_{yy'} + w}{f_{y'y'}} \right)^2 = \left(\frac{f_{yy} + w'}{f_{y'y'}} \right),$$

oder umgeformt

$$w' = \frac{(f_{yy'} + w)^2}{f_{y'y'}} - f_{yy}. \quad (11.7)$$

(11.7) ist eine so genannte **RICCATISCHE**²⁴ Differentialgleichung. Besitzt diese eine (beliebige) Lösung $w \in C^1[a, b]$, so folgt mit (11.6) und der obigen Umformung

$$\forall v \in X_0^1 : \quad J''(0) = \int_a^b \left(\frac{f_{yy'} + w}{f_{y'y'}} v + v' \right)^2 f_{y'y'}[t] dt \geq 0. \quad (11.8)$$

Da diese Relation nun für beliebige $v \in X_0^1$ gelten muss, ergibt sich mithin die *notwendige Bedingung von LEGENDRE*:

$$\forall t \in [a, b] : \quad f_{y'y'}(t, y_0(t), y_0'(t)) \geq 0. \quad (11.9)$$

Die obige Herleitung der **LEGENDRE**-Bedingung muss aus heutiger Sicht kritisch beurteilt werden. Zum Einen musste die Regularität der Variationsaufgabe (11.2) vorausgesetzt werden, zum Andern – und das ist gewichtiger – wurde vorausgesetzt, dass die **RICCATI**-Gleichung (11.7) eine Lösung besitzt, die auf dem gesamten Intervall $[a, b]$ definiert ist. Nun ist (11.7) aber eine *nichtlineare* Differentialgleichung, deren Lösungen i. Allg. Singularitäten besitzen. Es kann also a priori nicht ausgeschlossen werden, dass *jede* Lösung von (11.6) eine Singularität im Intervall $[a, b]$ besitzt und somit die obige Umformung gar nicht möglich ist.

²⁶Jacopo Francesco Riccati (1676–1754); Padua

Beweis der notwendigen Bedingung von Legendre:

Wir geben im Folgenden nun einen korrekten Beweis von (11.9) an, der auch die Regularität der Variationsaufgabe nicht benötigt. Allerdings erfolgt der Beweis indirekt und gibt somit weniger Einblick in die zweite Variation als der Ansatz von LEGENDRE.

Angenommen, es gäbe einen Punkt $t_1 \in]a, b[$ für den $f_{y'y'}[t_1] < 0$ gilt. Aus Stetigkeitsgründen lassen sich dann $h, C > 0$ finden mit

$$[t_1 - 3h, t_1 + 3h] \subset]a, b[\quad \text{und} \quad \forall |t - t_1| \leq 3h : f_{y'y'}[t] \leq -C < 0.$$

Wir konstruieren eine zulässige Variation $v \in X_0^1[a, b]$ wie folgt:

$$v(t) := \begin{cases} 0 & : |t - t_1| \geq 3h \\ \frac{1}{4h^2} (|t - t_1| - 3h)^2 & : 2h \leq |t - t_1| \leq 3h \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{2h} (2h - |t - t_1|) & : h \leq |t - t_1| \leq 2h \\ 1 - \frac{1}{4h^2} (t - t_1)^2 & : |t - t_1| \leq h \end{cases}$$

Man sieht, dass v tatsächlich stetig differenzierbar ist und in a und b verschwindet. Ferner gelten die folgenden Eigenschaften (vgl. die Abbildung 11.1)

$$\begin{aligned} |v(t)| &\leq 1, & |v'(t)| &\leq \frac{1}{2h}, \\ |v'(t)| &= \frac{1}{2h} & \iff & h \leq |t - t_1| \leq 2h. \end{aligned} \tag{11.10}$$

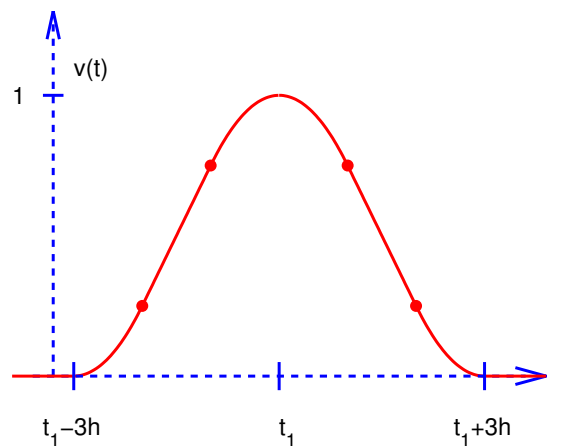


Abb. 11.1 Zulässige C^1 -Variation.

Für die zweite Variation gilt dann

$$J''(0) = \int_{t_1-3h}^{t_1+3h} [f_{yy} v^2 + 2 f_{yy'} v v' + f_{y'y'} v'^2] dt$$

Nun sind $f_{yy}[\cdot]$ und $f_{yy'}[\cdot]$ als stetige Funktionen über dem Kompaktum $[a, b]$ beschränkt mit (von v unabhängigen) Konstanten $M_1, M_2 > 0$:

$$|f_{yy}[t]| \leq M_1, \quad |f_{yy'}[t]| \leq M_2, \quad \forall t \in [a, b].$$

Für das Integral über die ersten beiden Summanden folgt damit die Abschätzung

$$\left| \int_{t_1-3h}^{t_1+3h} [f_{yy} v^2 + 2 f_{yy'} v v'] dt \right| \leq 6h M_1 + 6 M_2.$$

Für das Integral über den dritten Summanden gilt nach Annahme und (11.10)

$$\begin{aligned} \int_{t_1-3h}^{t_1+3h} f_{y'y'} v'^2 dt &< \int_{t_1-2h}^{t_1-h} f_{y'y'} v'^2 dt + \int_{t_1+h}^{t_1+2h} f_{y'y'} v'^2 dt \\ &\leq 2h(-C) \left(\frac{1}{2h}\right)^2 = -\frac{C}{2h} < 0. \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich also die folgende Abschätzung für die zweite Variation

$$J''(0) \leq 6h M_1 + 6 M_2 - \frac{C}{2h}.$$

Dieser Ausdruck wird aber für hinreichend kleine $h > 0$ negativ, im Widerspruch zur notwendigen Bedingung $J''(0) \geq 0$. Damit ist die notwendige Bedingung von LEGENDRE (11.8) bewiesen. \square

Die Konstruktion von C^1 -Variationen wie oben ist oft recht mühsam. Es ist daher hilfreich festzustellen, dass man auch mit weniger glatten Variationen $v \in C_s^{0,1}$ auskommt. Hierzu beweisen wir in einem ersten Schritt ein Glättungslemma.

Glättungslemma (11.11)

Zu jeder stückweisen C^1 -Funktion $v \in C_s^{0,1}[a, b]$ und jedem hinreichend kleinen $\delta > 0$ existiert eine C^1 -Funktion $w = w_\delta \in C^1[a, b]$ mit den folgenden Eigenschaften.

- a) Es gilt $w(t) = v(t)$ für alle $t \in [a, b]$ mit Abstand $|t - \tau_k| \geq \delta$ für alle Ecken τ_1, \dots, τ_s der Funktion v .

b) Für jede dieser Ecken τ_k , $k \in \{1, \dots, s\}$, gilt die Fehlerabschätzung

$$\max_{|t-\tau_k| \leq \delta} |w'(t)| \leq 4 \sup_{|t-\tau_k| \leq \delta} |v'(t)|.$$

Beweis: Zu einer vorgegebenen Funktion $v \in C_s^{0,1}[a, b]$ mit den Ecken $\tau_1, \dots, \tau_s \in]a, b[$ sei $\delta_0 > 0$ so klein gewählt, dass die Intervalle $[\tau_k - \delta_0, \tau_k + \delta_0]$, $k = 1, \dots, s$, disjunkt sind und im offenen Intervall $]a, b[$ liegen.

Zu einem beliebigen, im Folgenden aber festen $\delta \in]0, \delta_0]$ sei $w(t) := w_\delta(t) := v(t)$ außerhalb der Intervalle $[\tau_k - \delta, \tau_k + \delta]$ gesetzt.

Innerhalb eines der Intervalle $[\tau_k - \delta, \tau_k + \delta]$ setzen wir mit einem zunächst beliebigen $h_k \in \mathbb{R}$:

$$w'_k(t) := \begin{cases} v'(\tau_k - \delta) + \frac{t - \tau_k + \delta}{\delta} (h_k - v'(\tau_k - \delta)) & : t \in [\tau_k - \delta, \tau_k] \\ v'(\tau_k + \delta) - \frac{t - \tau_k - \delta}{\delta} (h_k - v'(\tau_k + \delta)) & : t \in [\tau_k, \tau_k + \delta] \end{cases}$$

$$w_k(t) := v(\tau_k - \delta) + \int_{\tau_k - \delta}^t w'_k(\tau) d\tau. \quad (11.12)$$

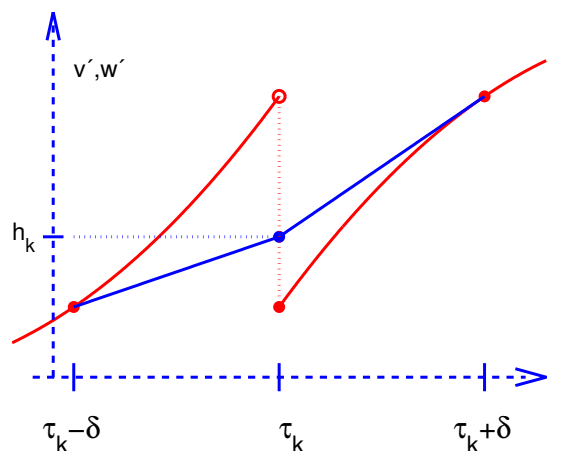


Abb. 11.2 Konstruktion einer C^1 -Funktion w .

Nach Konstruktion ist w_k damit eine C^1 -Funktion auf dem Intervall $[\tau_k - \delta, \tau_k + \delta]$ und es gelten $w_k(\tau_k - \delta) = v(\tau_k - \delta)$, $w'_k(\tau_k - \delta) = v'(\tau_k - \delta)$ und $w'_k(\tau_k + \delta) = v'(\tau_k + \delta)$.

Damit auch $w_k(\tau_k + \delta) = v(\tau_k + \delta)$ gilt, wird $h_k = h_k(\delta)$ (in Abhängigkeit von δ) so bestimmt, dass gilt

$$\int_{\tau_k - \delta}^{\tau_k + \delta} w'_k(\tau) d\tau = \int_{\tau_k - \delta}^{\tau_k + \delta} v'(\tau) d\tau =: A_\delta.$$

Für die linke Seite ergibt sich mit (11.12):

$$\int_{\tau_k - \delta}^{\tau_k + \delta} w'_k(\tau) d\tau = \frac{v'(\tau_k - \delta) + h_k}{2} \delta + \frac{v'(\tau_k + \delta) + h_k}{2} \delta$$

und somit

$$h_k = h_k(\delta) = \frac{A_\delta}{\delta} - \frac{v'(\tau_k - \delta) + v'(\tau_k + \delta)}{2}.$$

Mit diesem h_k wird also vermöge

$$w(t) = w_\delta(t) := \begin{cases} w_k(t) & : |t - \tau_k| \leq \delta, k \in \{1, \dots, s\}, \\ v(t) & : t \notin \bigcup_k [\tau_k - \delta, \tau_k + \delta] \end{cases}$$

eine C^1 -Funktion definiert, die Teil a) des Satzes erfüllt.

Aus der Definition von A_δ folgt die Abschätzung $|A_\delta| \leq \|v'\|_\infty \cdot 2\delta$ und damit

$$|h_k(\delta)| \leq \frac{|A_\delta|}{\delta} + \|v'\|_\infty \leq 3\|v'\|_\infty.$$

Diese Abschätzung zusammen mit der Definition (11.12) ergibt dann unmittelbar

$$\|w'_\delta\|_\infty \leq 4\|v'\|_\infty. \quad \square$$

Folgerung (11.13)

Für ein zulässiges $\delta > 0$ und ein zugehöriges w_δ aus dem Glättungslemma (11.11) gilt

$$\|v - w_\delta\|_\infty \leq 5\|v'\|_\infty \delta.$$

Beweis: Für ein $t \in [\tau_k - \delta, \tau_k]$ schätzt man mit dem Mittelwertsatz ab:

$$\begin{aligned} |v(t) - w_\delta(t)| &= |(v(t) - v(\tau_k - \delta)) + (w_\delta(\tau_k - \delta) - w_\delta(t))| \\ &\leq \|v'\|_\infty \delta + \|w'_\delta\|_\infty \delta \\ &\leq 5\|v'\|_\infty \delta \quad (\text{nach (11.11 b)}). \end{aligned}$$

Für $\tau_k \leq t \leq \tau_k + \delta$ erfolgt die Abschätzung analog. □

Satz (11.14) (Lemma von der Abrundung der Ecken)

Ist $I(v) := \int_a^b g(t, v, v') dt$ ein Funktional in Integralform mit $g \in C([a, b] \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, so gibt es zu jedem $v \in C_s^{0,1}[a, b]$ und $\varepsilon > 0$ ein $w \in C^1[a, b]$ mit $w(a) = v(a)$, $w(b) = v(b)$ und

$$\|v - w\|_\infty < \varepsilon, \quad |I(v) - I(w)| < \varepsilon.$$

Beweis: Es seien wieder τ_1, \dots, τ_s die Ecken von v .

Wie im Glättungslemma sei $\delta_0 > 0$ so klein gewählt, dass die Intervalle $[\tau_k - \delta_0, \tau_k + \delta_0]$ disjunkt sind und im offenen Intervall $]a, b[$ liegen.

Wie setzen nun

$$\delta_1 := 5 \|v'\|_\infty \delta_0 + \|v\|_\infty, \quad \delta_2 := 4 \|v'\|_\infty.$$

Die stetige Funktion g ist dann beschränkt auf dem Kompaktum $K := [a, b] \times [-\delta_1, \delta_1] \times [-\delta_2, \delta_2]$:

$$\forall (t, v, w) \in K : |g(t, v, w)| \leq C_g.$$

Für $0 < \delta \leq \delta_0$ werde $w_\delta \in C^1[a, b]$ nach dem Glättungslemma bestimmt.

Dann folgt

$$\begin{aligned} |I(v) - I(w_\delta)| &= \left| \int_a^b (g(t, v, v') - g(t, w_\delta, w'_\delta)) dt \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^s \int_{\tau_k - \delta}^{\tau_k + \delta} (g(t, v, v') - g(t, w_\delta, w'_\delta)) dt \right| \\ &\leq 2 \delta s (\|g(t, v, v')\|_\infty + \|g(t, w_\delta, w'_\delta)\|_\infty). \end{aligned}$$

Nach Definition der δ_1, δ_2 gelten $\|v\|_\infty \leq \delta_1, \|v'\|_\infty \leq \delta_2$ und weiterhin mit (11.13) und (11.11b)

$$\begin{aligned} \|w_\delta\|_\infty &\leq \|w_\delta - v\|_\infty + \|v\|_\infty \\ &\leq 5 \|v'\|_\infty \delta_0 + \|v\|_\infty = \delta_1, \end{aligned}$$

$$\|w'_\delta\|_\infty \leq 4 \|v'\|_\infty = \delta_2.$$

Damit liegen beide Argumente $(t, v(t), v'(t))$ und $(t, w_\delta(t), w'_\delta(t))$ im Kompaktum K und es folgt $\|g(t, v, v')\|_\infty, \|g(t, w_\delta, w'_\delta)\|_\infty \leq C_g$. Damit erhalten wir

$$|I(v) - I(w_\delta)| \leq 4 s C_g \delta < \varepsilon,$$

für hinreichend kleines $\delta > 0$. Damit ist die zweite Abschätzung in der Behauptung bewiesen.

Die erste Abschätzung folgt für hinreichend kleine δ aus (11.13). □

Folgerung (11.15)

Ist $y_0 \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ ein starkes lokales Minimum der Variationsaufgabe (11.2), d.h. ein lokales Minimum bezüglich der Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$, so ist y_0 zugleich auch ein starkes lokales Minimum der Variationsaufgabe über den zulässigen Vergleichskurven in $C_s^{0,1}([a, b], \mathbb{R}^n)$.

Beweis: Nach Annahme minimiert y_0 das Zielfunktional für alle zulässigen C^1 -Funktionen y in einer Kugelumgebung $\|y - y_0\|_\infty < r$. Gäbe es nun eine zulässige $C_s^{0,1}$ -Funktion v in dieser Umgebung mit $I(v) < I(y_0)$, so gäbe es nach dem Lemma von der Abrundung der Ecken auch eine zulässige C^1 -Funktion w mit

$$|I(w) - I(v)| < \frac{1}{2} (I(y_0) - I(v)), \quad \|w - v\|_\infty < r - \|v - y_0\|_\infty.$$

Damit läge die C^1 -Funktion w aber in der r -Kugel um y_0 :

$$\|w - y_0\|_\infty \leq \|w - v\|_\infty + \|v - y_0\|_\infty < r,$$

und hätte einen kleineren Zielfunktionalwert als y_0 :

$$I(w) = (I(w) - I(v)) + I(v) < \frac{1}{2} (I(y_0) - I(v)) + I(v) < I(y_0).$$

Dies widerspricht der vorausgesetzten lokalen Optimalität von y_0 bezüglich C^1 -Vergleichsfunktionen. □

Bemerkung (11.16)

Man hätte den Beweis der LEGENDRE-Bedingung (11.9) also auch mit der einfacheren $C_3^{0,1}$ -Variation

$$v_h(t) := \begin{cases} 0 & : |t - t_1| \geq h \\ \frac{1}{h} (h - |t - t_1|) & : |t - t_1| \leq h \end{cases}$$

durchführen können, vgl. Abbildung 11.3.

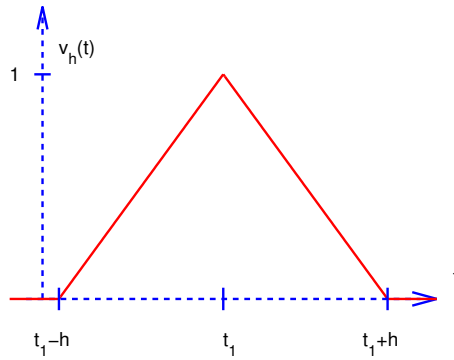


Abb. 11.3 Zulässige $C_s^{0,1}$ -Variation.

Dass die LEGENDRE-Bedingung nur *notwendig*, aber i. Allg. *nicht hinreichend* ist, zeigt das folgende Beispiel.

Beispiel (11.17)

Zu minimieren sei das Funktional

$$I(y) = \int_0^1 y'^2 (1 + y') dt, \quad y \in C^1[0, 1],$$

unter den Nebenbedingungen $y(0) = y(1) = 0$.

Die Funktion $y_0 := 0$ ist offensichtlich eine Lösung der zugehörigen EULER-LAGRANGE-Gleichung und erfüllt die Randbedingungen.

Ferner ist die LEGENDRE-Bedingung mit $f_{y'y'}(t, y_0, y_0') = 2 > 0$ sogar strikt erfüllt.

Trotzdem ist y_0 kein starkes Minimum der Variationsaufgabe.

Für $p \in]0.5, 1[$ und $\varepsilon > 0$, hat die (zulässige) $C^{0,1}$ -Vergleichsfunktion

$$v_p(t) := \begin{cases} \varepsilon t/p & : 0 \leq t \leq p \\ \varepsilon (1-t)/(1-p) & : p \leq t \leq 1 \end{cases}$$

nämlich die Norm $\|v_p\|_\infty = \varepsilon$ und liefert den folgenden Wert für das Zielfunktional

$$I(v_p) = \frac{\varepsilon^2}{p} + \frac{\varepsilon^3}{p^2} + \frac{\varepsilon^2}{(1-p)^2} (1-p-\varepsilon).$$

Für festes $\varepsilon > 0$ und $p \uparrow 1$ folgt somit $I(v_p) \rightarrow -\infty$. Es gibt also in jeder starken Nullumgebung zulässige $C^{0,1}$ -Vergleichsfunktionen mit beliebig kleinem Zielfunktionalwert. Die Variationsaufgabe besitzt also über $C_s^{0,1}[0, 1]$ keine Lösung und damit nach dem Lemma von der Eckenabrundung auch keine Lösung über $C^1[0, 1]$.

Die Legendre–Bedingung für mehrere abhängige Variable.

Kehren wie zum allgemeinen Variationsproblem (11.2) zurück.

Es sei $y_0 \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^n)$, beziehungsweise $y_0 \in C_s^{0,1}([a, b]; \mathbb{R}^n)$, ein starkes lokales Minimum der Variationsaufgabe. Dann genügt y_0 der EULER–LAGRANGE–Gleichung und den natürlichen Randbedingungen.

Wir wählen nun zu $t_1 \in]a, b[$ und einem hinreichend kleinen $h > 0$ Variationen der Form

$$v_i(t) = \alpha_i v_h(t), \quad a \leq t \leq b, \quad i = 1, \dots, n, \quad (11.18)$$

wobei v_h die in (11.16) definierte (von t_1 und h abhängige) Dachfunktion und $\alpha_i \in \mathbb{R}$ beliebig ist ($i = 1, \dots, n$).

Mit (11.5) und $v := (v_1, \dots, v_n)^T$ wird dann

$$\begin{aligned} \delta_2 I(y_0)(v) &= \int_a^b [v(t)^T f_{yy}[t]v(t) + 2v(t)^T f_{yy'}[t]v'(t) + v'(t)^T f_{y'y'}[t]v'(t)] dt \\ &= \int_{t_1-h}^{t_1+h} \sum_{i,k} \left(f_{y_i y_k} v_i v_k + 2 f_{y_i y'_k} v_i v'_k + f_{y'_i y'_k} v'_i v'_k \right) dt. \end{aligned}$$

Die ersten beiden Summanden werden zu einem Integral J_1 zusammengefasst mit der Abschätzung

$$\begin{aligned} |J_1| &= \left| \int_{t_1-h}^{t_1+h} \sum_{i,k} \left(f_{y_i y_k} v_i v_k + 2 f_{y_i y'_k} v_i v'_k \right) dt \right| \\ &\leq \int_{t_1-h}^{t_1+h} \sum_{i,k} \left(|f_{y_i y_k}| |\alpha_i| |\alpha_k| + 2 |f_{y_i y'_k}| |\alpha_i| \frac{|\alpha_k|}{h} \right) dt \\ &\leq 2h \left(C_1 \|\alpha\|_\infty^2 + C_2 \frac{\|\alpha\|_\infty^2}{h} \right) \end{aligned}$$

mit geeigneten (von y_0 abhängigen) Konstanten $C_1, C_2 > 0$.

Für das verbleibende Integral

$$J_2 := \int_{t_1-h}^{t_1+h} \sum_{i,k} f_{y'_i y'_k} v'_i v'_k dt$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
J_2 &= \int_{t_1-h}^{t_1} \sum_{i,k} f_{y'_i y'_k} \left(\frac{\alpha_i}{h} \right) \left(\frac{\alpha_k}{h} \right) dt + \int_{t_1}^{t_1+h} \sum_{i,k} f_{y'_i y'_k} \left(-\frac{\alpha_i}{h} \right) \left(-\frac{\alpha_k}{h} \right) dt \\
&= \frac{1}{h^2} \int_{t_1-h}^{t_1+h} \left(\alpha^T f_{y' y'}[t] \alpha \right) dt.
\end{aligned}$$

Wäre nun $f_{y' y'}[t] \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ nicht für alle $t \in [a, b]$ positiv semidefinit, so gäbe es $\alpha \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $t_1 \in]a, b[$ und $h_0, K > 0$, so dass für alle $0 < h \leq h_0$ gilt

$$\int_{t_1-h}^{t_1+h} \left(\alpha^T f_{y' y'}[t] \alpha \right) dt \leq -K h.$$

Damit folgt aber

$$\begin{aligned}
\delta_2 I(y_0)(v) &= J_1(h) + J_2(h) \\
&\leq 2h C_1 \|\alpha\|_\infty^2 + 2C_2 \|\alpha\|_\infty^2 - \frac{K}{h} < 0
\end{aligned}$$

für hinreichend kleine $h > 0$. Dies steht aber im Widerspruch zur Minimalität von y_0 .

Insgesamt haben wir damit der folgende Satz bewiesen:

Satz (11.19) (Notwendige Bedingung zweiter Ordnung)

Ist y_0 eine C^1 -Lösung der Variationsaufgabe (11.2), so gilt **die notwendige Bedingung von Legendre und Clebsch** ²⁷:

$$\forall t \in [a, b] : \quad f_{y' y'}[t] \in \mathbb{R}^{(n,n)} \quad \text{positiv semidefinit.}$$

Bemerkungen (11.20)

- Die notwendige Bedingung von LEGENDRE und CLEBSCH gilt ebenfalls (intervallweise), wenn in Problem (11.2) sogar $C_s^{0,1}$ -Vergleichskurven zugelassen werden.
- Die so genannte **verschärfte Legendre–Clebsch–Bedingung**

$$\forall t \in [a, b] : \quad f_{y' y'}[t] \in \mathbb{R}^{(n,n)} \quad \text{positiv definit} \quad (11.21)$$

(d.h. Regularität plus LEGENDRE–CLEBSCH–Bedingung) ist weder notwendig noch hinreichend.

²⁷Rudolf Friedrich Alfred Clebsch (1833–1872); Berlin, Karlsruhe, Göttingen

Beispiel (11.22) (Bolza, 1902)

Zu minimieren sei das Funktional

$$I(y) = \int_0^1 y'^2 (1 + y')^2 dt, \quad y \in C^1[0, 1],$$

unter den Nebenbedingungen $y(0) = y_a$, $y(1) = y_b$.

Wir rechnen unmittelbar nach, dass die Verbindungsgerade $y_0(t) := y_a + t(y_b - y_a)$ die notwendigen Bedingungen erster Ordnung erfüllt. Für diese Extremale ist also $y'_0 = y_b - y_a =: c$ konstant.

Wegen $f_{y'y'} = 2(6y'^2 + 6y' + 1)$ ist die LEGENDRE-Bedingung nur für $c \notin]c_1, c_2[$ mit $c_{1,2} := -1/2 \pm \sqrt{1/12}$ erfüllt.

Für $c \in]-1, c_1[\cup]c_2, 0[$ ist y_0 ein schwaches lokales Minimum, also ein lokales Minimum bezüglich der Norm

$$\|y\|_{1,\infty} := \|y\|_\infty + \|y'\|_\infty.$$

Dies folgt aus der lokalen Konvexität von f für kleine Werte von $\|y - y_0\|_{1,\infty}$.

Andererseits ist y_0 für diese Werte von c kein starkes lokales Minimum!

Es gibt nämlich in jeder $\|\cdot\|_\infty$ -Umgebung von y_0 stetige und stückweise lineare Vergleichsfunktionen y mit Steigungen $y' \in \{0, -1\}$, für die demnach $I(y)$ verschwindet.

In Abbildung 11.4. ist die Konstruktion einer solchen Vergleichsfunktion y dargestellt. Jedenfalls hat die Vergleichsfunktion y damit einen kleineren Funktionalwert als y_0 . Nach dem Lemma von der Abrundung der Ecken ist y_0 damit kein starkes lokales Minimum der Variationsaufgabe.

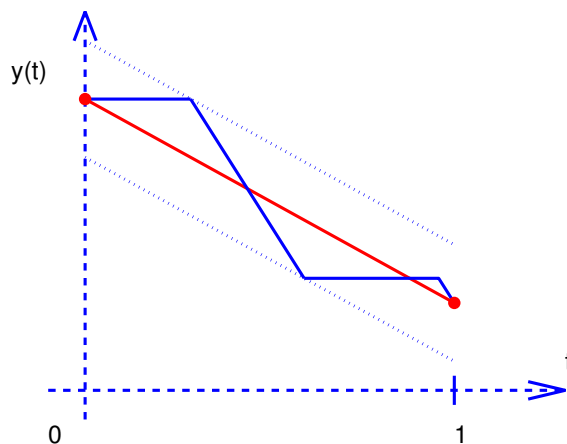


Abb. 11.4 Extremale y_0 und zulässige Vergleichsfunktion y .

12. Die Legendre Bedingung für Aufgaben der optimalen Steuerung

Wir betrachten den folgenden Spezialfall einer Optimalsteuerungsproblems

Problemstellung (12.1)

Zu minimieren sei das Funktional

$$I(x, u) := g(x(t_b)) + \int_{t_a}^{t_b} f_0(t, x(t), u(t)) dt$$

über $(x, u) \in C_s^{0,1}([t_a, t_b], \mathbb{R}^n) \times C_s([t_a, t_b], \mathbb{R}^m)$ unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x, u), \quad t_a \leq t \leq t_b, \\ x(t_a) &= x_a. \end{aligned}$$

Die Einschränkung dieser Problemstellung besteht darin, dass der Zustandsvektor zur Anfangszeit t_a vollständig gegeben und zur Endzeit t_b vollständig frei sein soll.

(x_0, u_0) sei eine Lösung der Optimalsteuerungsaufgabe. Wir betten diese nun folgendermaßen in eine Schar von Vergleichsfunktionen ein:

Zu beliebigem $w \in C_s([t_a, t_b], \mathbb{R}^m)$ sei ein zugehöriges $v \in C_s^{0,1}([t_a, t_b], \mathbb{R}^n)$ durch die folgende lineare Anfangswertaufgabe bestimmt:

$$v'(t) = f_x[t]^T v(t) + f_u[t]^T w(t), \quad v(t_a) = 0. \quad (12.2)$$

Mit diesen Funktionen wird nun definiert

$$\begin{aligned} x(t, \varepsilon) &:= x_0(t) + \varepsilon v(t) + \alpha(t, \varepsilon), \\ u(t, \varepsilon) &:= u_0(t) + \varepsilon w(t). \end{aligned} \quad (12.3)$$

Das Restglied α sei dabei so festgelegt, dass die Variation $(x(\cdot, \varepsilon), u(\cdot, \varepsilon))$ zulässig ist, dass also gilt

$$\begin{aligned} \alpha'(t, \varepsilon) &:= f(t, x_0 + \varepsilon v + \alpha, u_0 + \varepsilon w) - f[t] - \varepsilon (f_x[t]^T v + f_u[t]^T w), \\ \alpha(t_a, \varepsilon) &:= 0. \end{aligned} \quad (12.4)$$

Für hinreichend kleine $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ besitzt die Anfangswertaufgabe (12.4) eine eindeutig bestimmte Lösung auf $[t_a, t_b]$ und diese ist – unter Glattheitsvoraussetzungen an (x_0, u_0) – eine C^2 -Funktion von (t, ε) .

Differenziert man (12.4) nach ε und setzt anschließend $\varepsilon = 0$, so findet man

$$\alpha'_\varepsilon(t, 0) = f_x[t]^\top \alpha_\varepsilon(t, 0), \quad \alpha_\varepsilon(t_a, 0) = 0.$$

Dies ist eine lineare, homogene Anfangswertaufgabe für α_ε . Der Eindeigkeitsatz für Anfangswertprobleme liefert:

$$\alpha_\varepsilon(t, 0) = 0, \quad \forall t \in [t_a, t_b]. \quad (12.5)$$

Damit ist gezeigt, dass $\alpha(t, \varepsilon)$ tatsächlich eine Variation zweiter Ordnung ist.

Wir setzen nun die Variation (12.3) in das erweiterte Zielfunktional ein:

$$J(\varepsilon) = \hat{I}(x, u) := \int_{t_a}^{t_b} F(t, x, u, x', \lambda) dt$$

mit $F(t, x, u, x', \lambda) := \ell_0 f_0(t, x, u) + \lambda^\top (f(t, x, u) - x')$. Dabei bezeichnet (ℓ_0, λ) die adjungierten Variablen zur Lösung (x_0, u_0) , die aufgrund der notwendigen Bedingungen (9.40) existieren, $\ell_0 \in \{0, 1\}$.

Man beachte, dass die Zustandsdifferentialgleichung aufgrund unserer Konstruktion der Vergleichsfunktionen für alle (betragsmäßig kleinen) ε erfüllt ist, dass also das erweiterte Zielfunktional mit dem ursprünglichen Zielfunktional übereinstimmt.

Wir werten nun die notwendige Bedingung zweiter Ordnung für J aus. Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{d\varepsilon} &:= \int_{t_a}^{t_b} \left(F_x^\top x_\varepsilon + F_{x'}^\top x'_\varepsilon + F_u^\top w \right) dt \\ \frac{d^2J}{d\varepsilon^2} &:= \int_{t_a}^{t_b} \left[\left(x_\varepsilon^\top F_{xx} x_\varepsilon + 2 x_\varepsilon^\top F_{xx'} x'_\varepsilon + (x'_\varepsilon)^\top F_{x'x'} x'_\varepsilon \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(F_x^\top x_{\varepsilon\varepsilon} + F_{x'}^\top x'_{\varepsilon\varepsilon} \right) + 2 \left(x_\varepsilon^\top F_{xu} w + (x'_\varepsilon)^\top F_{x'u} w \right) + w^\top F_{uu} w \right] dt. \end{aligned}$$

Mit $F_{xx'} = F_{x'x'} = 0$, $F_{x'u} = 0$ und $x_\varepsilon(\cdot, 0) = v$, vgl. (12.5), reduziert sich der Ausdruck auf

$$\frac{d^2J}{d\varepsilon^2}(0) = \int_{t_a}^{t_b} \left(v^\top F_{xx} v + 2 v^\top F_{xu} w + w^\top F_{uu} w \right) dt + \int_{t_a}^{t_b} \left(F_x^\top x_{\varepsilon\varepsilon} + F_{x'}^\top x'_{\varepsilon\varepsilon} \right) dt.$$

Das zweite Integral wird nun mittels partieller Integration umgeformt. Dazu seien mit τ_1, \dots, τ_s die eventuell auftretenden Sprungstellen von u , bzw. Ecken von x bezeichnet. Wir erhalten (mit $\tau_0 := t_a$ und $\tau_{s+1} := t_b$)

$$\int_{t_a}^{t_b} \left(F_x^\top x_{\varepsilon\varepsilon} + F_{x'}^\top x'_{\varepsilon\varepsilon} \right) dt = \sum_{k=0}^s F_{x'}^\top x_{\varepsilon\varepsilon} \Big|_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} + \int_{t_a}^{t_b} \left(F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} \right)^\top x_{\varepsilon\varepsilon} dt$$

Die Ausdrücke auf der rechten Seite verschwinden sämtlich: Es gilt nämlich $x_{\varepsilon}(t_a, 0) = 0$ (aufgrund der vorgegebenen Anfangswerte), $F_{x'}$ ist stetig in den Ecken (WEIERSTRASS - ERDMANNSCHE Eckenbedingung), $F_{x'}[t_b] = 0$ (aufgrund der natürlichen Randbedingung in t_b) und schließlich gilt die EULER - LAGRANGE Gleichung bzgl. der Zustandsvariablen x .

Somit bleibt nun die folgende notwendige Bedingung zweiter Ordnung: Für alle Variationen $w \in C_s$ und $v \in C_s^{0,1}$ mit (12.3) gilt

$$\frac{d^2 J}{d\varepsilon^2}(0) = \int_{t_a}^{t_b} \left(v^T F_{xx} v + 2 v^T F_{xu} w + w^T F_{uu} w \right) dt \geq 0. \quad (12.6)$$

Konstruktion spezieller Variationen.

Wir wollen nun in Analogie zum Vorgehen in Abschnitt 11 aus (12.6) folgern, dass die Matrix F_{uu} längs der Lösung (x_0, u_0) positiv semidefinit sein muss. Hierzu konstruieren wir spezielle Variationen.

Es sei $t_1 \in [t_a, t_b[$ ein beliebig vorgegebener Zeitpunkt, $h > 0$ sei hinreichend klein und $a \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ ein beliebiger Vektor. Wir wählen $w = (w_1, \dots, w_m)^T$ gemäß

$$w_k(t) = \begin{cases} a_k, & \text{für } t_1 \leq t < t_1 + h, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (12.7)$$

Ferner wird $v \in C_2^{0,1}$ in Abhängigkeit von w mittels der linearen Anfangswertaufgabe (12.2) festgelegt. Im Intervall $[t_a, t_1]$ verschwindet v somit.

Im Intervall $[t_1, t_1 + h]$ genügt v der inhomogenen linearen Anfangswertaufgabe

$$v'(t) = f_x[t]^T v(t) + f_u[t]^T a, \quad v(t_1) = 0.$$

Es bezeichne $Y(t) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ nun das Hauptfundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung. Dieses hängt nur von der Lösung (x_0, u_0) und t_1 , nicht aber von h und a ab. Mittels Variation der Konstanten gilt dann die folgende Lösungsdarstellung für $v(t) = v(t; h)$:

$$v(t; h) = \int_{t_1}^t Y(t) Y(\tau)^{-1} f_u[\tau]^T a \, d\tau, \quad t_1 \leq t \leq t_1 + h.$$

Da der Integrand stetig und (von h unabhängig) beschränkt ist, ergibt sich für v eine Abschätzung der Form

$$\|v(t; h)\| \leq C \|a\| h = O(h), \quad t_1 \leq t \leq t_1 + h, \quad (12.8)$$

mit einer geeigneten Konstanten $C > 0$ und dem LANDAU-Symbol O . Dabei ist $\|\cdot\|$ irgendeine Vektornorm im \mathbb{R}^n .

Mit $v_1(h) := v(t_1 + h; h)$ hat man nun in dem verbleibenden Teilintervall $[t_1 + h, t_b]$ die folgende homogene lineare Anfangswertaufgabe zu lösen:

$$v'(t) = f_x[t]^T v(t), \quad v(t_1 + h) = v_1(h).$$

Hierfür hat man nun in Abhängigkeit vom Anfangswert eine Abschätzung der Form

$$\|v(t)\| \leq \|v_1(h)\| \exp(L|t_b - t_1 - h|), \quad t_1 + h \leq t \leq t_b.$$

Dabei ist $L > 0$ eine geeignete (von h unabhängige) LIPSCHITZ Konstante der rechten Seite des Differentialgleichungssystems, etwa $L := \max_{t \in [t_a, t_b]} \|f_x[t]\|$.

Zusammen mit (12.8) ergibt sich also die Abschätzung

$$\|v(t; h)\| \leq C \|a\| h \exp(L|t_b - t_1 - h|) = O(h), \quad t_1 + h \leq t \leq t_b. \quad (12.9)$$

Mittels der Beziehungen (12.7)–(12.9) erhalten wir nun das folgende asymptotische Verhalten der zweiten Variation (12.6) für $h \downarrow 0$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 J}{d\varepsilon^2}(0) &= \int_{t_a}^{t_b} \left(v^T F_{xx} v + 2 v^T F_{xu} w + w^T F_{uu} w \right) dt \\ &= \int_{t_a}^{t_1} \dots + \int_{t_1}^{t_1+h} \dots + \int_{t_1+h}^{t_b} \dots \\ &= 0 + h \left\{ O(h^2) + O(h) + a^T F_{uu}[t_1 + \Theta h] a \right\} \\ &\quad + (t_b - t_1 - h) O(h^2) \\ &= h \left(a^T F_{uu}[t_1 + \Theta h] a \right) + O(h^2) \geq 0. \end{aligned}$$

Hierbei ist $t_1 + \Theta h$ nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung eine Zwischenstelle, also $0 \leq \Theta = \Theta(h) \leq 1$.

Für $h \downarrow 0$ ergibt sich unmittelbar (per indirektem Beweis) die notwendige Bedingung $a^T F_{uu}[t_1] a \geq 0$.

Dies gilt für alle $a \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ und $t_1 \in [t_a, t_b[$. Aus Stetigkeitsgründen gilt dies darüber hinaus auch für $t_1 = t_b$, so dass wir nun insgesamt die positive Semidefinitheit der HESSE-Matrix $F_{uu}[t]$ längs der Lösung (x_0, u_0) gezeigt haben.

Wegen der Form des erweiterten Integranden liefert diese Bedingung nun auch die positive Semidefinitheit von $H_{uu}[t]$, wobei H wieder die übliche HAMILTON-Funktion $H := \ell_0 f_0 + \lambda^T f$ bezeichnet. Diese notwendige Bedingung heißt (wie auch bei mehrdimensionalen Variationsaufgaben) **Legendre–Clebsch Bedingung der Optimalsteuerungsaufgabe (12.1)**.

Natürlich lässt sich die obige Beweistechnik mit den Ideen aus Abschnitt 6 auch auf Optimalsteuerungsaufgaben mit allgemeineren Randbedingungen erweitern. Wir formulieren den Satz daher gleich für diesen allgemeineren Fall.

Satz (12.10) (Notwendige Bedingung erster und zweiter Ordnung)

Es sei $(x_0, u_0) \in C_s^{0,1}([t_a, t_b], \mathbb{R}^n) \times C_s([t_a, t_b], \mathbb{R}^m)$ eine Lösung des Optimalsteuerungsproblems

$$\text{Minimiere} \quad I(x, u) := g(x(t_a), x(t_b)) + \int_{t_a}^{t_b} f_0(t, x(t), u(t)) dt$$

unter den Nebenbedingungen

$$x'(t) = f(t, x, u), \quad r(x(t_a), x(t_b)) = 0,$$

Die Regularitätsbedingung (6.19) sei erfüllt, also $\text{Rang}[Jr(x_0(t_a), x_0(t_b))]$ maximal. Dann existieren LAGRANGE Multiplikatoren (ℓ_0, ν, λ) , $\ell_0 \in \{0, 1\}$, $\nu \in \mathbb{R}^k$, $\lambda \in C_s^{0,1}([t_a, t_b], \mathbb{R}^n)$, so dass mit der HAMILTON-Funktion

$$H(t, x, u, \lambda) := \ell_0 f_0(t, x, u) + \lambda^T f(t, x, u)$$

die folgenden notwendigen Bedingungen gelten:

a) Adjungierte Differentialgleichungen:

$$\lambda'(t) = -H_x(t, x_0(t), u_0(t), \lambda(t)),$$

b) Natürliche Randbedingungen:

$$\lambda(t_a) = -\frac{\partial}{\partial x(t_a)} [\ell_0 g + \nu^T r], \quad \lambda(t_b) = \frac{\partial}{\partial x(t_b)} [\ell_0 g + \nu^T r],$$

c) Freie Endzeit: Ist t_b frei – in diesem Fall können die Funktionen g und r auch explizit von t_b abhängen, so gilt

$$H[t_b] = -\frac{\partial}{\partial t_b} [\ell_0 g + \nu^T r],$$

d) Ecken: Ist die optimale Steuerung in Punkten $t_1, \dots, t_s \in]t_a, t_b[$ unstetig, so gelten die Weierstrass-Erdmannschen Eckenbedingungen

$$\lambda(t_j^-) = \lambda(t_j^+), \quad H[t_j^-] = H[t_j^+], \quad j = 1, \dots, s,$$

e) Stationarität der HAMILTON-Funktion bezüglich der Steuerung:

$$H_u(t, x_0(t), u_0(t), \lambda(t)) = 0,$$

f) LEGENDRE-CLEBSCH Bedingung:

$$\forall t \in [t_a, t_b]: \quad H_{uu}(t, x_0(t), u_0(t), \lambda(t)) \quad \text{positiv semidefinit.}$$

Ferner verschwinden die LAGRANGE Multiplikatoren nirgendwo gleichzeitig, d.h. $\forall t \in [t_a, t_b]: (\ell_0, \nu, \lambda(t)) \neq 0$.

Bemerkung (12.11)

Die beiden notwendigen Bedingungen, $H_u[t] = 0$ und H_{uu} positiv semidefinit, bilden zusammen gerade die notwendigen Bedingungen für die endlich dimensionale Minimierungsaufgabe

$$u_0(t) \in \operatorname{argmin}\{H(t, x_0(t), u, \lambda(t)) : u \in \mathbb{R}^m\},$$

d.h. $u_0(t)$ ist ein globales Minimum der HAMILTON-Funktion (bei fester Zeit t , festem Zustand $x_0(t)$ und festen adjungiertem Variablen $\lambda(t)$).

Diese Aussage, das so genannte *Minimumprinzip*, ist natürlich stärker als die beiden notwendigen Bedingungen c) und d) aus (12.10). Selbst wenn die strikte LEGENDRE-CLEBSCH Bedingung erfüllt ist, folgt aus (12.10) lediglich, dass $u_0(t)$ ein striktes *lokales* Minimum der HAMILTON-Funktion ist.

In der Tat ist aber die obige stärkere Aussage allgemein gültig, ja sie gilt sogar bei eingeschränktem Steuerbereich.

In der Literatur findet man das Minimumprinzip zumeist unter dem Stichwort *PONTRYAGINsches Maximumprinzip*. Es wurde Anfang der sechziges Jahre des vorigen Jahrhunderts von der russischen Schule um PONTYRAGIN und der amerikanischen Schule um HESTENES unabhängig voneinander gefunden.

Wir geben den entsprechenden Satz hier ohne Beweis an. In Abschnitt 13 werden wir einen zumindest heuristischen Beweis nachliefern. Für einen exakten Beweis sei auf die Literatur verwiesen, z.B. Hestenes, Kapitel 7, Theorem 8.1, oder Luenberger, Abschnitt 9.6, oder Sagan, Theorem 5.7.2.

Satz (12.12) (Minimumprinzip)

Gegeben sei die Optimalsteuerungsaufgabe aus (12.10) mit der zusätzlichen Nebenbedingung

$$\forall t \in [t_a, t_b] : u(t) \in U,$$

wobei $U \subset \mathbb{R}^m$ ein vorgegebener nichtleerer, abgeschlossener und konvexer Steuerbereich sei.

Ist (x_0, u_0) eine Lösung, so existieren LAGRANGE-Multiplikatoren (ℓ_0, ν, λ) wie in (12.10), die nirgendwo gleichzeitig verschwinden, so dass die notwendigen Bedingungen a) und b) aus (12.10) gelten, sowie (an Stelle von c) und d)):

c') Minimumprinzip:

$$\forall t \in [t_a, t_b], u \in U : H(t, x_0(t), u_0(t), \lambda(t)) \leq H(t, x_0(t), u, \lambda(t)).$$

Als Anwendung für die LEGENDRE-CLEBSCH Bedingung, bzw. das Minimumproblems betrachten wir das so genannte Re-entry Problem. Das Beispiel beschreibt den Wiedereintritt eines Raumfahrzeugs in die Erdatmosphäre und hat im Wesentlichen zu Ziel, das hiermit verbundene Abbremsmaneuver möglichst optimal, d.h.

mit möglichst geringer Aufheizung des Raumfahrzeugs, zu gestalten. Die Modellierung, die hierbei verwendet wird, ist relativ einfach (zweidimensionale Bahnen). Sie geht auf Scharmack²⁸ zurück und ist u. a. auch im Lehrbuch von Stoer und Bulirsch beschrieben. Das Re-entry Problem war über lange Zeit ein schwieriger benchmark Test für numerische Verfahren zur Lösung von Optimalsteuerungsproblemen. In Varianten tritt das Problem (und auch die hiermit verbundenen numerischen Schwierigkeit) natürlich bei vielen Bahnoptimierungsproblemen der Luft- und Raumfahrt auf.

Beispiel (12.13) (Das Re-entry Problem)

Eine Raumsonde vom Typ eine Apollokapsel ist beim Wiedereintritt in die Erdatmosphäre durch den Anstellwinkel (also ohne Schub) so zu steuern, dass die Aufheizung der Kapsel minimiert wird.

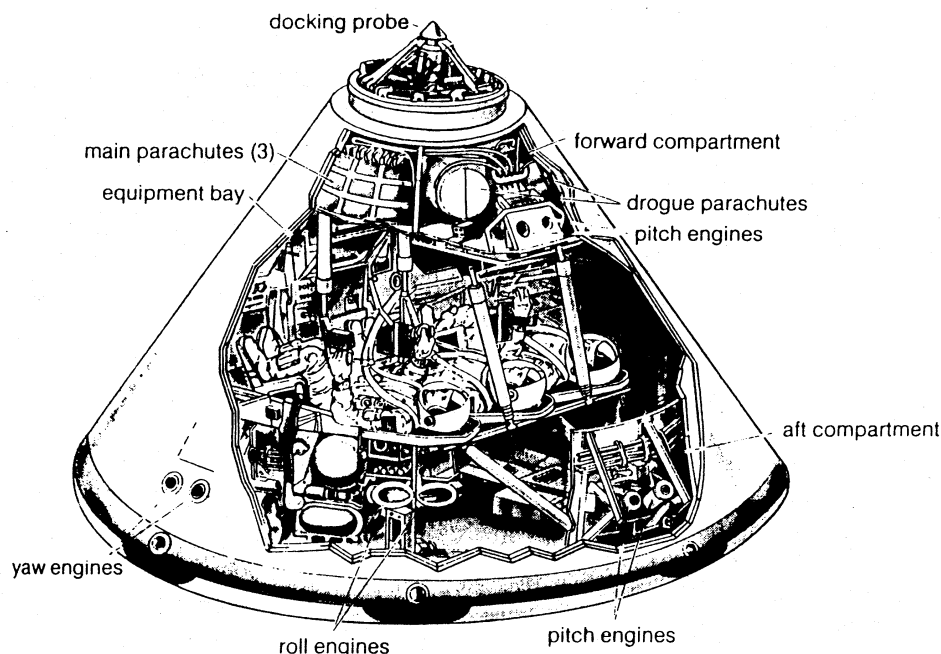


Abb. 12.1 Kommandomodul der Apollokapsel.

In der Abbildung 12.1 ist das Kommandomodul der Apollokapsel dargestellt. Nur dieses kehrt mit den drei Astronauten zur Erde zurück. Das erheblich größere Servicemodul wird kurz vor dem Eintritt in die Atmosphäre abgetrennt. Die Kapsel wiegt 5.9 Tonnen, sie hat eine Höhe von 3.23 m und einen Durchmesser 3.91 m. Gesteuert wird die Kapsel durch Anpassung ihre Position relativ zum Geschwindigkeitsvektor. Dies geschieht mit Hilfe von zehn Steuerdüsen, im Heck des Moduls.

²⁸D.K. Scharmack: An Initial value method of Trajectory Optimization Problems.
In: C.T. Leondes: Advances in Control Systems, Academic Press, New York, 1967.

Die mathematische Modellierung der zweidimensionalen Bewegung der Kapsel geschieht mittels der Zustandsgrößen v : Geschwindigkeitsbetrag, γ : Bahnneigungswinkel und ξ : relative Höhe ($= h/R = \text{Höhe/Erdradius}$). Mitunter tritt als vierte Zustandsgröße ζ noch die zurückgelegte Strecke auf der Erdoberfläche auf. Da wir hier jedoch keine Vorschriften für den Landeort machen wollen, kann diese entfallen.

Gesteuert wird die Kapsel durch den Winkel u zwischen der Symmetrieachse der Kapsel und dem Geschwindigkeitsvektor. Der Winkel u beeinflusst direkt die aerodynamischen Kräfte Auftrieb und Widerstand. Dieser Einfluss wird folgendermaßen durch die Beiwerte (Widerstandsbeiwert C_D und Auftriebsbeiwert C_L) modelliert.

$$\begin{aligned} C_D(u) &= C_{D0} - C_{D1} \cos u, \\ C_L(u) &= C_{L1} \sin u. \end{aligned} \tag{12.14}$$

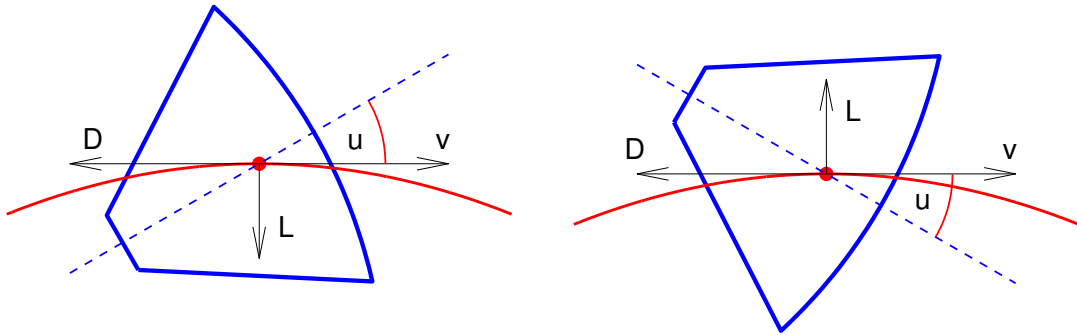


Abb. 12.2 Steuerung von Widerstands- und Auftriebskraft.

Die Bewegungsgleichungen lauten

$$\begin{aligned} v' &= -\frac{S \rho v^2}{2m} C_D(u) - \frac{g \sin \gamma}{(1 + \xi)^2} \\ \gamma' &= \frac{S \rho v}{2m} C_L(u) + \frac{v \cos \gamma}{R(1 + \xi)} - \frac{g \cos \gamma}{v(1 + \xi)^2} \\ \xi' &= \frac{v \sin \gamma}{R} \end{aligned} \tag{12.15}$$

Hierbei ist S die Querschnittsfläche und m die Masse der Kapsel, g ist die Erdbeschleunigung und $\rho = \rho_0 \exp(-\beta R \xi)$ beschreibt die Luftdichte.

Die (skalierten²⁹) Parameter lauten: $C_{D0} = 1.174$, $C_{D1} = 0.9$, $C_{L1} = 0.6$, $R = 209$, $g = 3.2172 \times 10^{-4}$, $\beta = 4.26$, $\rho_0 = 2.704 \times 10^{-3}$, $S/m = 53200$.

Aufgabe ist es, die Kapsel von einem vorgegebenen Anfangszustand in einen vorgegebenen Endzustand so zu steuern, dass die Aufheizung der Kapsel, gemessen

²⁹Die verwendete Längeneinheit ist $10^5 \text{ft} \approx 30.48 \text{km}$.

durch das Funktional

$$I(u) = \int_0^{t_b} 10 v^3 \sqrt{\rho} dt, \quad (12.16)$$

minimiert wird. Die Randdaten, die Anfangs- und Endzustand beschreiben, lauten

$$\begin{aligned} v(0) &= 0.36, & v(t_b) &= 0.27, \\ \gamma(0) &= -8.1, & \gamma(t_b) &= 0, \\ \xi(0) &= 4/R, & \xi(t_b) &= 2.5/R. \end{aligned} \quad (12.17)$$

Damit sind alle Zutaten der Optimalsteuerungsaufgabe zusammengetragen. Man beachte, dass es sich um ein Problem mit freier Endzeit handelt, die Steuerung u ist keinen weiteren Restriktionen unterworfen. Sie tritt allerdings nur über $\sin u$ und $\cos u$ (nichtlinear) im Problem auf und ist daher auch nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt.

Wir stellen die notwendigen Bedingungen zusammen. Dabei nehmen wir an, dass das Optimalsteuerungsproblem eine *reguläre* Lösung besitzt, wir also $\ell_0 = 1$ setzen können.

Die HAMILTON-Funktion lautet dann

$$H = 10 v^3 \sqrt{\rho} + \lambda_v v' + \lambda_\gamma \gamma' + \lambda_\xi \xi',$$

woraus sich (mit etwas Aufwand) die folgenden adjungierten Differentialgleichungen ergeben.

$$\begin{aligned} \lambda'_v &= -30\sqrt{\rho} v^2 + \lambda_v \frac{S \rho v}{m} C_D(u) \\ &\quad - \lambda_\gamma \left(\frac{S \rho}{2m} C_L(u) + \frac{\cos \gamma}{R(1+\xi)} + \frac{g \cos \gamma}{v^2(1+\xi)^2} \right) - \lambda_\xi \frac{\sin \gamma}{R}, \\ \lambda'_\gamma &= \lambda_v \frac{g \cos \gamma}{(1+\xi)^2} + \lambda_\gamma \frac{\sin \gamma}{1+\xi} \left(\frac{v}{R} - \frac{g}{v(1+\xi)} \right) - \lambda_\xi \frac{v \cos \gamma}{R}, \\ \lambda'_\xi &= 5\beta R \sqrt{\rho} v^3 - \lambda_v \left(\frac{S \beta R \rho v^2}{2m} C_D(u) + \frac{2g \sin \gamma}{(1+\xi)^3} \right) \\ &\quad + \lambda_\gamma \left(\frac{S \beta R \rho v}{2m} C_L(u) + \frac{v \cos \gamma}{R(1+\xi)^2} - \frac{2g \cos \gamma}{v(1+\xi)^3} \right). \end{aligned} \quad (12.18)$$

Zur Berechnung der optimalen Steuerung verwenden wir die Bedingungen e) und f) aus Satz (12.10)

$$\begin{aligned}
H_u &= \frac{S \rho v}{2m} \left(-v \lambda_v \frac{\partial C_D}{\partial u} + \lambda_\gamma \frac{\partial C_L}{\partial u} \right) \\
&= \frac{S \rho v}{2m} \left(-v \lambda_v C_{D1} \sin u + \lambda_\gamma C_{L1} \cos u \right) = 0, \\
H_{uu} &= \frac{S \rho v}{2m} \left(-v \lambda_v C_{D1} \cos u - \lambda_\gamma C_{L1} \sin u \right) \geq 0.
\end{aligned}$$

Da wir annehmen können, dass der Faktor $(S \rho v)/(2m)$ längs einer physikalisch sinnvollen Lösung positiv ist, liefern diese beiden Bedingungen eine eindeutig bestimmte Lösung für der Einheitsvektor $(\cos u, \sin u)^T$, nämlich

$$\begin{aligned}
\sin u &= - \frac{\lambda_\gamma C_{L1}}{\sqrt{(\lambda_\gamma C_{L1})^2 + (v \lambda_v C_{D1})^2}}, \\
\cos u &= - \frac{v \lambda_v C_{D1}}{\sqrt{(\lambda_\gamma C_{L1})^2 + (v \lambda_v C_{D1})^2}}.
\end{aligned} \tag{12.19}$$

Man erkennt, dass die LEGENDRE-CLEBSCH Bedingung auch tatsächlich benötigt wird, um das Vorzeichen in (12.19) entscheiden zu können. Im Übrigen sind durch (12.19) auch tatsächlich die globalen Minima der HAMILTON-Funktion bezüglich der Steuerung u charakterisiert.

Es verbleiben nun noch die natürlichen Randbedingungen, die sich wegen der vorgegebenen Anfangs- und Endzustände lediglich auf die freie Endzeit beziehen. Nach (6.24) gilt daher

$$H[t_b] = 0. \tag{12.20}$$

Das Randwertproblem ist nunmehr vollständig aufgestellt: Wir haben die sechs Differentialgleichungen (12.15) und (12.18), die wegen der freien Endzeit auf $[0, 1]$ transformiert werden, sowie eine triviale Differentialgleichung für die Endzeit t_b . In den Differentialgleichungen sind die Steuerungsterme $\cos u$ und $\sin u$ durch (12.19) zu ersetzen. Weiterhin haben wir sechs Randbedingungen in (12.17), sowie die zusätzliche (nichtlineare) Randbedingung (12.20).

Diese resulierende Randwertaufgabe lässt sich sodann mit dem Mehrzielverfahren BNDSCO relativ mühelos numerisch lösen.

In den folgenden Abbildungen 12.3 und 12.4 sind die sich ergebenden Verläufe der Zustandsgrößen, der Steuerung und der adjungierten Variablen dargestellt. Ferner ist auch der Verlauf der Funktion $H_{uu}[t]$ dargestellt, um sicher zu gehen, dass die numerische Lösung auch die strikte LEGENDRE-CLEBSCH Bedingung erfüllt.

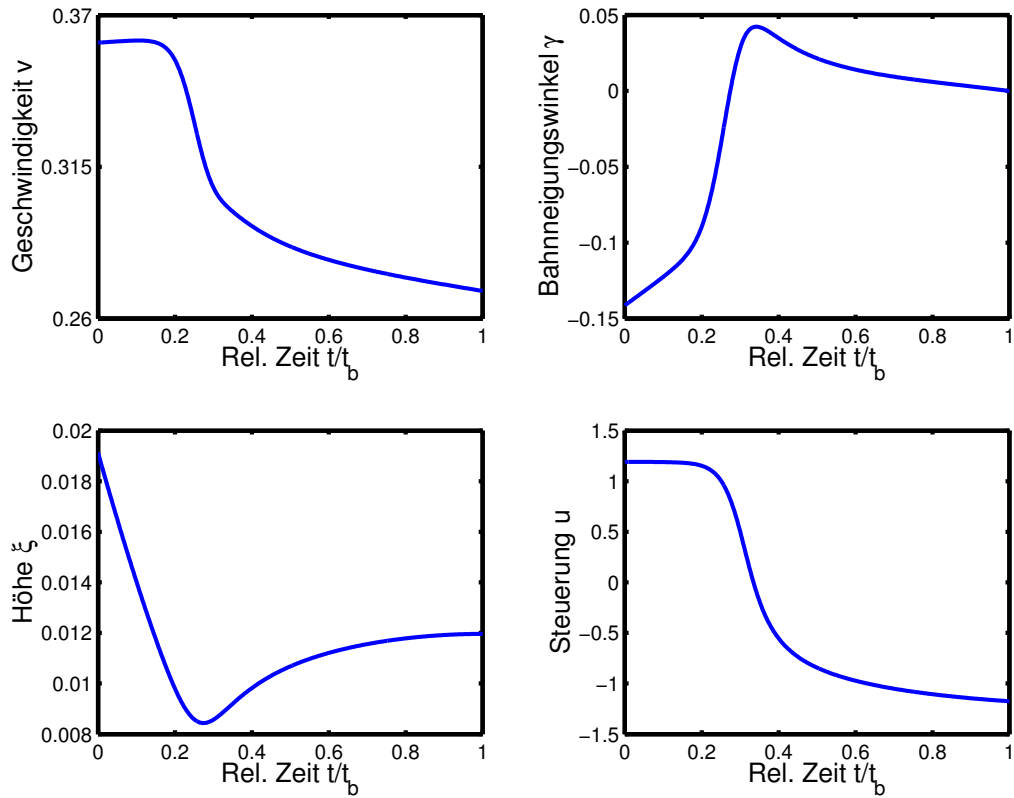


Abb. 12.3 Reentry Problem: Zustandsgrößen und Steuerung.

Für die adjungierten Variablen und die freie Endzeit hat BNDSCO die folgenden Daten berechnet

$$\begin{aligned}
 \lambda_v(0) &= -0.5114325104 \times 10^0 & \lambda_v(t_b) &= -0.1423407313 \times 10^1 \\
 \lambda_\gamma(0) &= -0.6912051015 \times 10^0 & \lambda_\gamma(t_b) &= 0.1383359196 \times 10^1 \\
 \lambda_\xi(0) &= -0.2412468164 \times 10^1 & \lambda_\xi(t_b) &= -0.1313762727 \times 10^2 \\
 t_b &= 0.2249007559 \times 10^3
 \end{aligned} \tag{12.21}$$

Die HAMILTON-Funktion, die ja für dieses autonome Optimalsteuerungsproblem konstant sein muss, lässt sich längs der numerisch berechneten Lösung auswerten. Man erhält tatsächlich Werte, die (betragsmässig) in der Größenordnung der Maschinengenauigkeit, also zwischen 10^{-15} und 10^{-16} liegen.

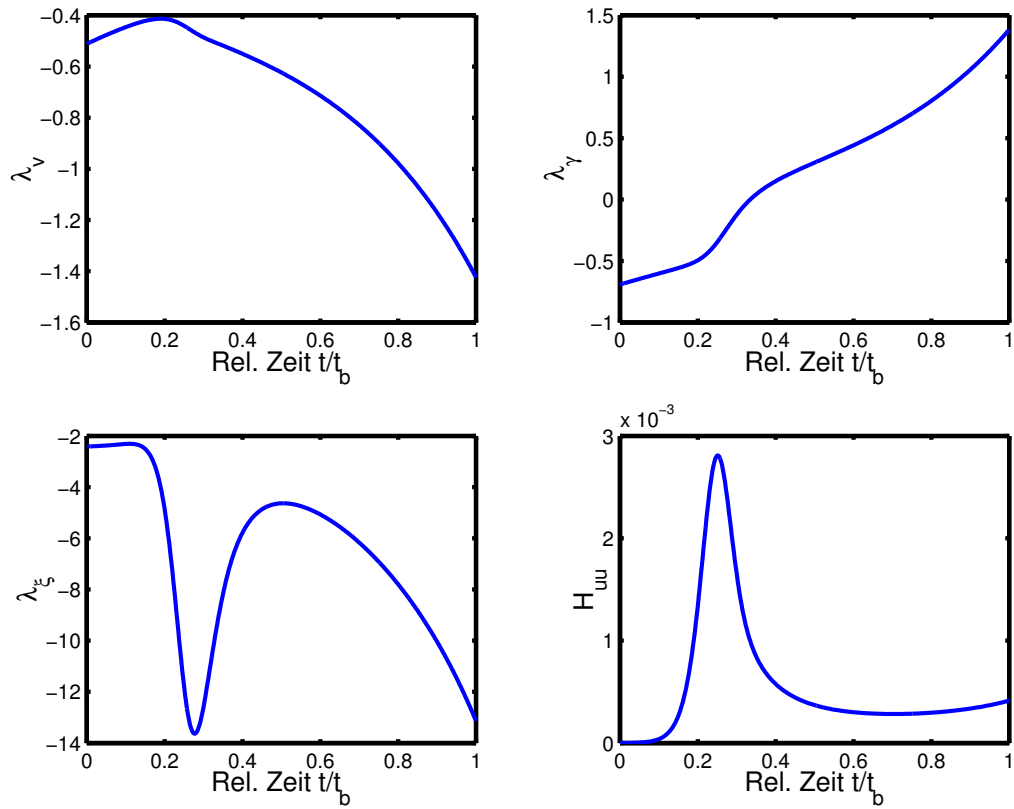


Abb. 12.4 Reentry Problem: Adjungierte Variable und die Funktion H_{uu} .

13. Aufgaben mit kompaktem Steuerbereich

Das Minimumprinzip (12.12) ist auch auf Aufgaben der optimalen Steuerung anwendbar, bei denen nur Steuerfunktionen mit Werten aus einem vorgegebenem kompaktem Steuerbereich zugelassen sind. Derartige Probleme treten in den Anwendungen außerordentlich häufig auf. Wir wollen uns für diesen Fall einige Folgerungen aus dem Minimumprinzip ansehen. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den Fall einer skalaren Steuerfunktion, d.h. $m = 1$. Wir unterscheiden hierbei die Fälle, dass die Steuerung linear bzw. nichtlinear in die Aufgabenstellung eingeht. Dabei wird sich erstaunlicherweise zeigen, dass die linear auftretenden Steuerungen zumeist schwerer zu behandeln sind als die nichtlinear auftretenden.

A. Nichtlinear auftretende Steuerfunktion.

Wir betrachten ein autonomes Optimalsteuerungsproblem der Form

Problemstellung (13.1)

Zu minimieren sei ein Funktional der Form

$$I(u) = g(x(t_a), x(t_b)) + \int_{t_a}^{t_b} f_0(x(t), u(t)) dt$$

unter den Nebenbedingungen

$$x'(t) = f(x(t), u(t)), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n,$$

$$r(x(t_a), x(t_b)) = 0 \in \mathbb{R}^k,$$

$$u(t) \in U := [u_{\min}, u_{\max}] \subset \mathbb{R}, \quad \forall t \in [t_a, t_b].$$

Die Randbedingungen mögen wieder die Regularitätsvoraussetzung (6.19) erfüllen. Ferner sei (x_0, u_0) eine Lösung des Problems (13.1), wobei sich die optimale Steuerung u bezüglich der Steuerbeschränkung aus endlich vielen *inneren Teilstücken* und *Randstücken* zusammen setzen möge. D.h. es gebe eine Zerlegung

$$t_a = t_0 < t_1 < \dots < t_s < t_{s+1} = t_b,$$

so dass für jedes Teilintervall $[t_j, t_{j+1}]$ entweder $u_{\min} < u_0(t) < u_{\max}$ (für $t_j < t < t_{j+1}$), oder $u_0(t) = u_{\min}$ bzw. $u_0(t) = u_{\max}$ (für $t_j < t < t_{j+1}$) gilt. Im ersten Fall heißt $[t_j, t_{j+1}]$ ein *inneres Teilstück*, im zweiten Fall ein *Randstück* der Steuerungsrestriktion. Im Fall eines Randstücks kann darüber hinaus vorausgesetzt werden, dass t_j minimal und t_{j+1} maximal (mit der obigen Eigenschaft) gewählt worden sind.

Die optimale Steuerung u_0 erfüllt nun das Minimumprinzip, d.h. die HAMILTON-Funktion des Optimalsteuerungsproblems

$$H(x, u, \lambda) := \ell_0 f_0(x, u) + \lambda^T f(x, u)$$

wird durch $u_0(t)$ für festes $x = x_0(t)$ und $\lambda = \lambda(t)$ über U minimiert.

Liegt $u_0(t)$ für ein t im Innern des Steuerbereichs, so folgen hieraus die notwendigen Bedingungen nach (12.10):

$$H_u[t] = 0, \quad H_{uu}[t] \geq 0. \quad (13.2)$$

Setzen wir weiter voraus, dass für solche t sogar die strikte LEGENDRE-CLEBSCH-Bedingung $H_{uu}[t] > 0$ erfüllt ist, so lässt sich die Gleichung $H_u = 0$ nach dem Satz über implizite Funktionen dort lokal eindeutig nach der Steuerung auflösen und wir erhalten die so genannte *freie Steuerung* in Form einer Relation

$$u = u_{\text{frei}}(x, \lambda) \quad (13.3)$$

mit einer – unter entsprechenden Voraussetzungen an f und f_0 – glatten Funktion u_{frei} .

Zur Bestimmung der *Schaltpunkte* zwischen freien Teilstücken und Randstücken (oder auch zwischen Randstücken verschiedenen Typs) substituieren wir die Steuerung vermöge

$$u = u_{\min} + (u_{\max} - u_{\min}) \sin^2 \omega \quad (13.4)$$

mit einer neuen, nunmehr unbeschränkten Steuerfunktion ω . Die erste Variation dieser transformierten Optimalsteuerungsaufgabe in ω liefert die folgende WEIERSTRASS–ERDMANNsche Eckenbedingungen: Sowohl die adjungierten Variablen λ wie auch die HAMILTON–Funktion sind stetig in t_j

$$\lambda(t_j^-) = \lambda(t_j^+), \quad H[t_j^-] = H[t_j^+]. \quad (13.5)$$

Diese Bedingung legt die Schaltpunkte t_j fest und schränkt die möglichen Übergänge ein.

So ist ein Sprung vom Typ $u_{\min} - u_{\max}$ (oder umgekehrt) demnach nur möglich, falls gilt

$$H(x_0(t_j), u_{\min}, \lambda(t_j)) = H(x_0(t_j), u_{\max}, \lambda(t_j)).$$

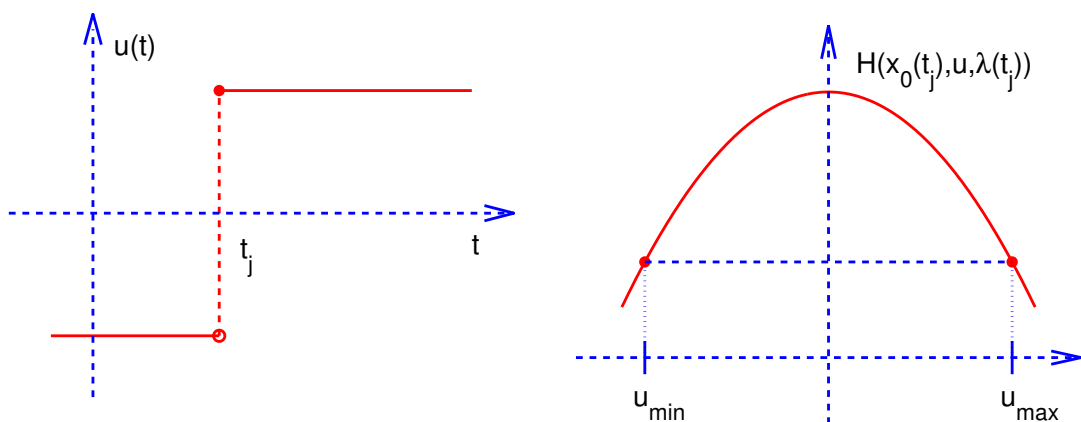


Abb. 13.1 Sprungstelle t_j der Steuerfunktion.

Um die obige Situation a priori ausschließen zu können, definiert man:

Definition (13.6)

Die HAMILTON-Funktion H des Optimalsteuerungsproblems (13.1) heißt *regulär* (bezogen auf eine Lösung (x_0, u_0) mit zugehörigen adjungierten Variablen λ), falls die Funktion $u \mapsto H(x_0(t), u, \lambda(t))$ für jedes $t \in [t_a, t_b]$ ein *eindeutig bestimmtes* Minimum $u_0(t)$ über U besitzt.

Folgerungen (13.7)

Bei regulärer HAMILTON-Funktion gelten somit die folgenden Eigenschaften

- a) Es gibt keine Sprünge vom Typ $u_{\max} - u_{\min}$ oder $u_{\min} - u_{\max}$.
- b) An einem Schaltpunkt t_j zwischen zwei Teilstücken mit den Steuermoden $u_{\text{frei}} - u_{\min}$ bzw. $u_{\text{frei}} - u_{\max}$ (oder umgekehrt) ist die optimale Steuerung u_0 stetig, d.h. es gilt

$$u_{\text{frei}}(t_j) = u_{\min}, \quad \text{bzw.} \quad u_{\text{frei}}(t_j) = u_{\max}. \quad (13.8)$$

Diese Bedingung lässt sich als *Schaltbedingung* zur Bestimmung von t_j verwenden.

Beispiel (13.9)

Zu minimieren sei das Funktional

$$I(u) = \int_0^{t_b} \left(\frac{u^2}{2} - x \right) dt$$

unter den Nebenbedingungen

$$x' = u, \quad x(0) = x_0, \quad 0 \leq u(t) \leq 1.$$

(i) Wir untersuchen zunächst *das freie Optimalsteuerungsproblem*, also obiges Problem ohne die Steuerungsbeschränkung. Die HAMILTON-Funktion lautet

$$H = \ell_0 \left(\frac{u^2}{2} - x \right) + \lambda u.$$

Sie liefert die adjungierte Differentialgleichung

$$\lambda' = \ell_0, \quad \lambda(t_b) = 0.$$

Hieran erkennen wir, dass das Problem regulär ist. Wäre nämlich $\ell_0 = 0$, so würde auch λ identisch verschwinden, was den notwendigen Bedingungen aus (12.10) widerspricht. Diese Schlussweise lässt sich vielfach auf Optimalsteuerungsprobleme mit freiem Endzustand übertragen.

Damit kann $\ell_0 = 1$ gesetzt werden und die HAMILTON-Funktion ist als Parabel in u mit positivem führenden Koeffizienten regulär. Das (eindeutig bestimmte) Minimum liegt bei $u_0 = -\lambda$. Wir haben damit die lineare Randwertaufgabe

$$\begin{aligned}x' &= -\lambda, & x(0) &= x_0, \\ \lambda' &= 1, & \lambda(t_b) &= 0,\end{aligned}$$

mit der eindeutig bestimmten Lösung

$$\begin{aligned}x_0(t) &= x_0 + t_b t - 0.5 t^2, \\ \lambda(t) &= t - t_b.\end{aligned}$$

(ii) Für *das restringierte Optimalsteuerungsproblem* bleibt die Argumentation bezüglich der Regularität des Problems und der HAMILTON-Funktion unverändert. H ist allerdings jetzt über dem Intervall $U = [0, 1]$ zu minimieren und wir erhalten daher

$$u_0(t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \lambda(t) > 0, \\ -\lambda, & \text{falls } \lambda(t) \in [-1, 0], \\ 1, & \text{falls } \lambda(t) < -1. \end{cases}$$

Da die Lösung der adjungierten Differentialgleichung unverändert bleibt, $\lambda_0(t) = t - t_b$, liegt somit auch die *optimale Steuerungsstruktur* fest:

- (i) für $t_b \leq 1$: $u_0 \equiv u_{\text{frei}} = -\lambda$
- (ii) für $t_b > 1$: $u_0 : u_{\text{max}} - u_{\text{frei}}$.

In letzten Fall liegt der Schaltpunkt t_1 aufgrund der Stetigkeit der Steuerung nach (13.7) fest, nämlich $t_1 = t_b - 1$, und wir erhalten die (wiederum eindeutig bestimmte) Lösung

$$\begin{aligned}x_0(t) &= \begin{cases} x_0 + t, & 0 \leq t \leq t_1, \\ x_0 + t_b - 0.5(1 + (t_b - t)^2), & t_1 \leq t \leq t_b, \end{cases} \\ u_0(t) &= \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq t_1, \\ t_b - t, & t_1 \leq t \leq t_b, \end{cases} \\ \lambda(t) &= t - t_b.\end{aligned}$$

Die optimalen Steuerungen des freien und des restringierten Problems sind in Abbildung 13.2 wiedergegeben.

(iii) Wir können nun auch für das restringierte Optimalsteuerungsproblem relativ einfach zeigen, dass die oben berechnete Vergleichskurve (x_0, u_0) tatsächlich ein striktes globales Minimum liefert.

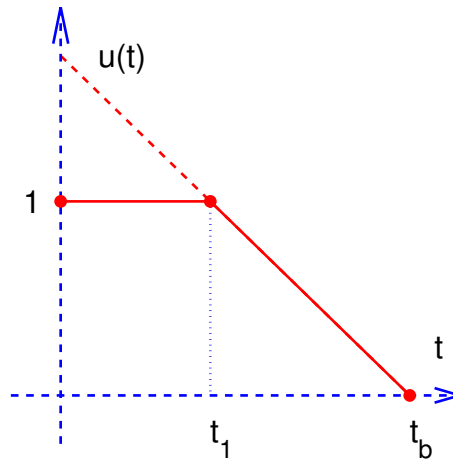


Abb. 13.2 Optimale Steuerung für Beispiel (13.9).

Dazu sei $\delta u \in C_s[0, t_b]$ eine zulässige Korrektur der Steuerung u_0 . Für den zu $u = u_0 + \delta u$ zugehörigen Zustand $x = x_0 + \delta x$ gilt dann

$$x' = u \implies \delta x' = \delta u, \quad \delta x(0) = 0.$$

Damit folgt für die Differenz der Zielfunktionale mittels partieller Integration

$$\begin{aligned} I(u) - I(u_0) &= \int_0^{t_b} \left(\frac{\delta u^2}{2} \right) dt + \int_0^{t_b} (u_0 \delta u - \delta x) dt \\ &= \int_0^{t_b} \left(\frac{\delta u^2}{2} \right) dt + (u_0 \delta x) \Big|_0^{t_1} + (u_0 \delta x) \Big|_{t_1}^{t_b} - \int_0^{t_b} (u'_0 + 1) \delta x dt \\ &= \int_0^{t_b} \left(\frac{\delta u^2}{2} \right) dt - \int_0^{t_1} \delta x dt \end{aligned}$$

Die ausintegrierten Bestandteile verschwinden, da $\delta x(0) = 0$, u_0 und δx stetig in t_1 und $u_0(t_b) = 0$ gelten. Ferner ist $u'_0 = 0$ in $[0, t_1]$ und $u'_0 = -1$ in $[t_1, t_b]$ (einseitige Grenzwerte an den Intervallenden!).

Da nun u_0 auf $[0, t_1]$ am oberen Rand des Steuerbereichs liegt, gilt dort notwendigerweise $\delta u \leq 0$ und somit auch $\delta x \leq 0$.

Somit ist gezeigt, dass $I(u) \geq I(u_0)$ gilt, wobei Gleichheit nur möglich ist, wenn δu an nur endlich vielen Stellen nicht verschwindet. \square

Wir werden die obige Beweistechnik aus (iii) später auf allgemeinere konvexe Funktionale und konvexe Steuerungsrestriktionen übertragen (vgl. Abschnitt 15).

Wir untersuchen noch ein weiteres, numerisch etwas anspruchsvolleres Beispiel, das eine wirtschaftswissenschaftliche Anwendung behandelt.

Beispiel (13.10) (Kapitalakkumulationsmodell nach Ramsey)

Es ist dies eine Variante des Kapitalakkumulationsmodells nach Ramsey (1928) für einen endlichen Zeithorizont. Das Problem lässt sich folgendermaßen beschreiben: Wieviel sollte eine zentral gesteuerte Volkswirtschaft von ihrem zur Zeit t erwirtschafteten Einkommen investieren, um den Gesamtnutzen aus dem Konsum über einem gewissen Zeitraum zu maximieren?

Es bezeichne t die Zeit in Jahren, $K(t)$ den Kapitalstock, $u(t) \in [0, 1]$ die Investitionsrate und $f(K)$ die Produktionsfunktion (mit $f'(K) > 0$ und $f''(K) \leq 0$).

Dann beschreibt $C := (1 - u)f(K)$ den Konsum und $I = uf(K)$ die Investitionen. Der momentane Nutzen werde durch eine Funktion $U(C)$ gemessen, wobei $U(C) > 0$, $U'(C) > 0$ und $U''(C) < 0$. Hiermit lässt sich nun das folgende Optimalsteuerungsproblem formuliert:

Zu minimieren ist das Funktional $J(u) := - \int_0^{t_b} U(C) dt$ unter den Nebenbedingungen

$$K'(t) = u(t)f(K(t)), \quad K(0) = K_0 > 0, \quad 0 \leq u(t) \leq 1.$$

Da der Endzustand $K(t_b)$ frei ist, ist das Problem wie in (13.9) regulär ($\ell_0 = 1$).

Wir wählen die einfachen Ansätze $f(K) := K$ und $U(C) := 1 - e^{-C}$, die die obigen Vorzeichenvoraussetzungen erfüllen. Dann lautet die konkrete Aufgabe

$$\text{Minimiere} \quad J(u) = \int_0^{t_b} (e^{-(1-u)K} - 1) dt$$

unter den Nebenbedingungen (13.11)

$$K' = uK, \quad K(0) = K_0, \quad 0 \leq u(t) \leq 1.$$

Mit der HAMILTON-Funktion $H = [e^{-(1-u)K} - 1] + \lambda uK$ lautet die adjungierte Differentialgleichung sowie die natürliche Randbedingung

$$\lambda' = (1 - u)e^{-(1-u)K} - \lambda u, \quad \lambda(t_b) = 0.$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned} H_u &= K e^{-(1-u)K} + \lambda K \\ H_{uu} &= K^2 e^{-(1-u)K} > 0, \end{aligned}$$

d.h. H ist (für $K > 0$) bezüglich u strikt konvex und besitzt daher über dem Kompaktum $[0, 1]$ ein eindeutig bestimmtes Minimum. Die HAMILTON-Funktion ist also regulär, die optimale Steuerung damit stetig.

Für die freie Steuerung erhalten wir aus $H_u = 0$

$$u_{\text{frei}} = 1 + \ln(-\lambda)/K. \quad (13.12)$$

Damit muss die adjungierte Variable auf freien Teilstücken negativ sein und für t nahe bei t_b kann aufgrund der natürlichen Randbedingung nur eine Randsteuerung möglich sein.

Aus Plausibilitätsgründen erwarten wir bei kleinem Anfangskapital K_0 die Steuerungsstruktur $u_0 : u_{\max} - u_{\text{frei}} - u_{\min}$.

Hierfür ergibt sich damit das folgenden *Mehrpunkt-Randwertproblem*

$$\begin{aligned} K' &= u K, \\ \lambda' &= (1 - u) e^{-(1-u)K} - \lambda u, \\ u &= \begin{cases} 1, & \text{für } 0 \leq t < t_1, \\ 1 + \ln(-\lambda)/K, & \text{für } t_1 \leq t < t_2, \\ 0, & \text{für } t_2 \leq t < t_b, \end{cases} \end{aligned} \quad (13.13)$$

$$K(0) = K_0, \quad \lambda(t_b) = 0,$$

$$\lambda(t_1) = 1, \quad \lambda(t_2) + \exp(-K(t_2)) = 0.$$

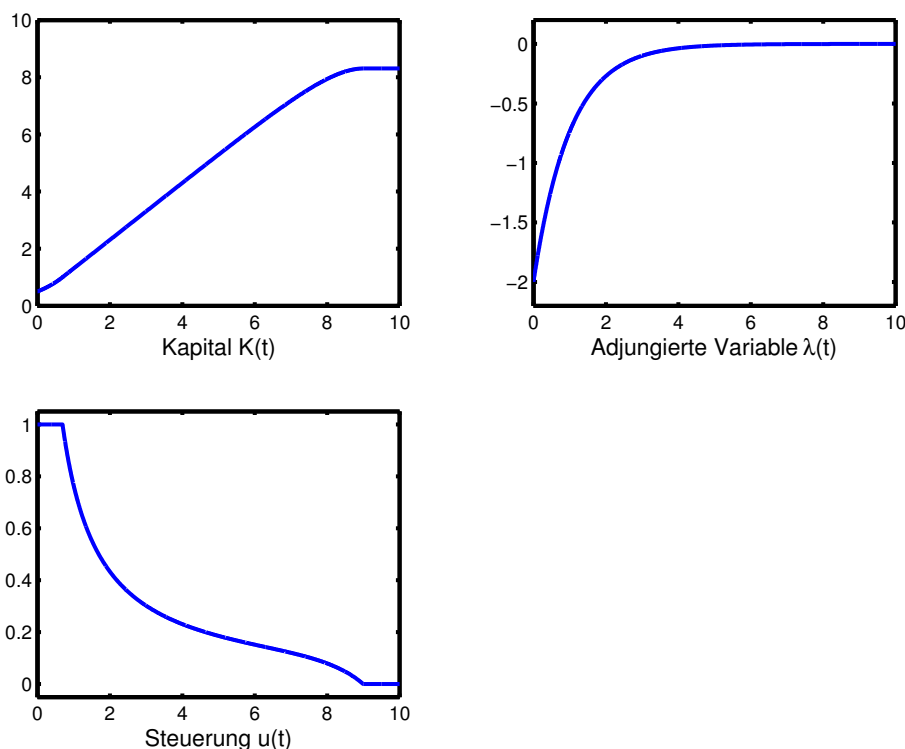


Abb. 13.3 Kapitalakkumulationsmodell von Ramsey.

In Abbildung 13.3 ist die mit BNDSCO berechnete Lösung dieser Randwertaufgabe für die Parameter $t_b = 10$ und $K_0 = 0.5$ dargestellt.

Die charakteristischen Größen dieser numerischen Lösung sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst.

$$\begin{aligned} t_1 &= 0.6929\ 0039, & \lambda(0) &= -1.9995\ 0648 \\ t_2 &= 9.0000\ 0000, & J(u_0) &= -8.3070\ 9960 \end{aligned}$$

B. Linear auftretende Steuerfunktion.

Wir betrachten wieder eine Optimalsteuerungsaufgabe vom Typ (13.1), wobei wir jetzt voraussetzen wollen, dass die Steuerung u affin-linear in die Problemstellung eingeht.

Damit lautet die Aufgabenstellung

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & I(u) = g(x(t_a), x(t_b)) + \int_{t_a}^{t_b} (f_{00}(x) + u f_{01}(x)) dt \\ \text{u.d. Nebenbed.} \quad & x' = f_0(x) + u f_1(x), \quad t_a \leq t \leq t_b, \\ & r(x(t_a), x(t_b)) = 0, \\ & u(t) \in U = [u_{\min}, u_{\max}]. \end{aligned} \tag{13.14}$$

Natürlich ist die HAMILTON-Funktion damit ebenfalls affin-linear bezüglich u , genauer:

$$\begin{aligned} H(x, u, \lambda) &= H_0(x, \lambda) + u S(x, \lambda), \\ H_0(x, \lambda) &:= \ell_0 f_{00}(x) + \lambda^T f_0(x), \\ S(x, \lambda) &:= \ell_0 f_{01}(x) + \lambda^T f_1(x). \end{aligned} \tag{13.15}$$

Die Funktion $S : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Schaltfunktion* des Optimalsteuerungsproblems bezüglich der Steuerung u .

Das Minimumprinzip (12.10) liefert nun die folgende Aussage über die optimale Steuerung:

$$u_0(t) = \begin{cases} u_{\max}, & \text{falls } S[t] < 0, \\ u_{\min}, & \text{falls } S[t] > 0, \end{cases} \tag{13.16}$$

wobei wie früher $S[t] := S(x_0(t), \lambda(t))$ die Schaltfunktion längs der jeweils betrachteten Lösung bezeichnet.

Besitzt die Funktion $S[\cdot]$ also nur isolierte Nullstellen, so folgt mit (13.16), dass die optimale Steuerung nur aus Teilstücken mit $u_0 = u_{\max}$ bzw. $u_0 = u_{\min}$ besteht, also

stets am Rand des zulässigen Steuerbereichs liegt. Dies ist das so genannte *Bang-bang Prinzip*. Man spricht in diesem Fall dann von einer *bang-bang Steuerung*, siehe auch die Abbildung 13.4.

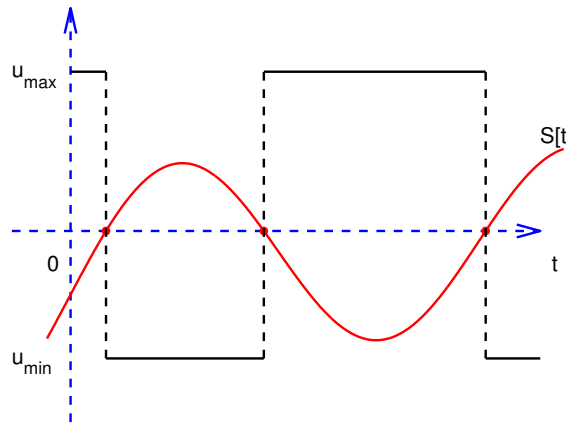


Abb. 13.4 Bang-bang Steuerung.

Beispiel (13.17)

Wir betrachten eine Variante des Problems (13.9), bei der die Steuerung im Ziel-funktional statt in der L_2 in der L_1 -Norm gemessen wird:

$$\text{Minimiere} \quad I(u) = \int_0^{t_b} (u - x) dt$$

unter den Nebenbedingungen

$$x' = u, \quad x(0) = x_0, \quad 0 \leq u(t) \leq 1.$$

Das Problem ist wieder regulär. Für die HAMILTON-Funktion erhalten wir

$$H = (u - x) + \lambda u = -x + (\lambda + 1) u,$$

so dass sich genau wie in (13.9) ergibt

$$\lambda' = 1, \quad \lambda(t_b) = 0 \quad \implies \quad \lambda(t) = t - t_b.$$

Die Schaltfunktion lautet damit

$$S = H_u = 1 + \lambda = 1 + t - t_b.$$

Für $t_b > 1$ hat $S[t]$ somit genau eine isolierte Nullstelle in $t_1 = t_b - 1$ (gleicher Schaltpunkt wie in Beispiel (13.9)!) und für die optimale Steuerung ergibt sich nach dem Minimumprinzip

$$u_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < t_1, \\ 0, & t_1 \leq t \leq t_b. \end{cases}$$

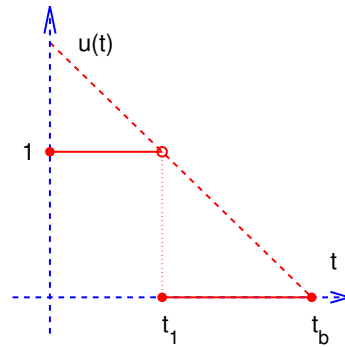


Abb. 13.5 Optimale Steuerung für Beispiel (13.17).

Singuläre Steuerung.

Die obige Annahme, dass die Schaltfunktion $S[t]$ nur isolierte Nullstellen besitzt, ist natürlich eine Zusatzvoraussetzung, die nicht notwendig erfüllt sein muss. So kann es durchaus Teilintervalle positiver Länge geben, auf denen die Schaltfunktion $S[t]$ (längs der Lösung) identisch verschwindet. Ein solches (maximales) Teilintervall $[t_1, t_2] \subset [t_a, t_b]$ mit

$$\forall t \in [t_1, t_2]: S[t] = 0 \quad (13.18)$$

heißt ein *singuläres Teilstück*. Die optimale Steuerung auf diesem Teilstück heißt *singuläre Steuerung*.

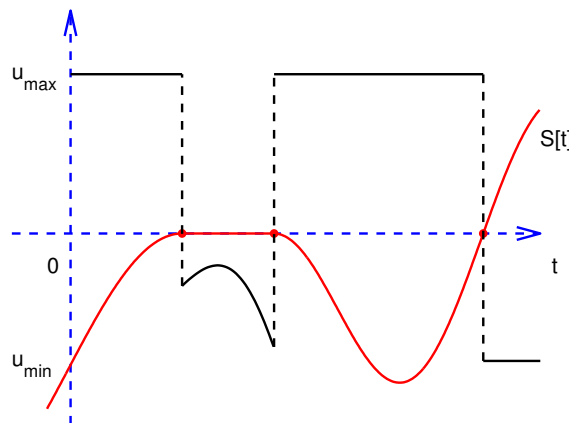


Abb. 13.6 Singuläre Steuerung.

Die singuläre Steuerung lässt sich nicht direkt über das Minimumprinzip bestimmen, da die HAMILTON-Funktion auf dem singulären Teilstück von der Steuerung selbst unabhängig ist. Um trotzdem zu einem numerisch auswertbaren Ausdruck für die singuläre Steuerung zu kommen, kann man die (totale) zeitlichen Ableitungen der Schaltfunktion verwenden.

Dazu definieren wir rekursiv

$$S^{(0)}(x, \lambda) := S(x, \lambda)$$

und, falls $S^{(k)}$ für alle (x, λ) mit $S^{(0)} = S^{(1)} = \dots = S^{(k-1)} = 0$ nur von x und λ abhängt,

$$S^{(k+1)}(x, u, \lambda) := S_x^{(k)\top} f(x, u) - S_\lambda^{(k)\top} H_x(x, u, \lambda), \quad k = 0, 1, \dots \quad (13.19)$$

Hierbei wird natürlich die ausreichende stetige Differenzierbarkeit der beteiligten Funktionen vorausgesetzt.

Wir nehmen nun an, dass die obige Rekursion nach endlich vielen Schritten abbricht. Genauer: Es gebe eine kleinste Ableitungsordnung $q \in \mathbb{N}$, so dass die $S^{(j)}$ für $j = 0, \dots, q-1$ längs der Lösung (x_0, λ) von der Steuerung u unabhängig sind, während es für die q -te Zeitableitung wenigstens ein $t \in [t_1, t_2]$ gibt mit

$$\frac{\partial}{\partial u} S^{(q)}(x_0(t), \lambda(t), u_0(t)) \neq 0. \quad (13.20)$$

Aufgrund der vorausgesetzten (affinen) Linearität bzgl. der Steuerung hat nun auch die q -te Ableitung der Schaltfunktion die Form

$$S^{(q)}(x, u, \lambda) = A_q(x, \lambda) + u B_q(x, \lambda), \quad (13.21)$$

wobei $B_q(x_0(t), \lambda(t))$ auf $[t_1, t_2]$ nicht identisch verschwindet. Es gelten nun die folgenden notwendigen Bedingungen.

Satz (13.22) (ROBBINS und KELLEY, KOPP, MOYER ³⁰)

- a) q ist stets eine gerade Zahl, $q = 2p$, $p \in \mathbb{N}$,
 p heißt auch die Ordnung der singulären Steuerung.
- b) Es gilt die verallgemeinerte Bedingung von LEGENDRE und CLEBSCH

$$(-1)^p B_{2p}(x_0(t), \lambda(t)) \geq 0, \quad \forall t \in [t_1, t_2].$$

- c) Gilt die verallgemeinerte LEGENDRE–CLEBSCH–Bedingung sogar strikt, so lässt sich die singuläre Steuerung folgendermaßen berechnen

$$u_0 = u_{\text{sing}}(x, \lambda) = - \frac{A_{2p}(x, \lambda)}{B_{2p}(x, \lambda)}.$$

Die verallgemeinerte LEGENDRE–CLEBSCH–Bedingung ist eine Vorzeichenbedingung, die für ermittelte Lösungskandidaten für die singulären Teilstücke zu überprüfen ist. Sie ersetzt gewissermaßen auf diesen Teilstücken das Minimumprinzip.

³⁰H.M. Robbins: A Generalized Legendre – Clebsch Condition for the Singular Cases of Optimal Control, IBM J. Res. Develop. 11, 1967.

H.J. Kelley, R.E. Kopp, H.G. Moyer: Singular Extremals. In G. Leitmann: Topics in Optimization, Academic Press, New York, 1967.

Drückt man die Bedingung mittels der ursprünglichen HAMILTON-Funktion aus, so lautet sie

$$(-1)^p \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^{2p}}{dt^{2p}} H_u \right) \geq 0. \quad (13.23)$$

Formal erkennt man für $p = 0$ hier die alte LEGENDRE-CLEBSCH-Bedingung wieder.

Beispiel (13.24) (Kelley, Kopp, Moyer, 1967)

Zu minimieren sei das Funktional $I(u) := \int_0^2 x(t)^2 dt$ unter den Nebenbedingungen

$$x' = u, \quad x(0) = 1, \quad x(2) = x_b, \quad -1 \leq u(t) \leq 1.$$

Aufgrund des Vergleichssatzes für gewöhnliche Differentialgleichungen ist klar, dass Zustandsfunktionen x zu zulässigen Steuerungen wie folgt eingeschlossen werden

$$1 - t \leq x(t) \leq 1 + t.$$

Zulässige Steuerungen existieren also nur für Endwerte $x_b \in [-1, 3]$. Die Ränder dieses *Erreichbarkeitsbereiches* werden genau für die konstanten Steuerungen $u = -1$ bzw. $u = 1$ erreicht. Wir setzen im Folgenden voraus, dass x_b im offenen Intervall $] -1, 3[$ liegt.

Mit der HAMILTON-Funktion $H = \ell_0 x^2 + \lambda u$ hat man die adjungierte Differentialgleichung $\lambda' = -2\ell_0 x$.

Den singulären Fall $\ell_0 = 0$ können wir sofort ausschließen, da dann λ konstant wäre und aufgrund des Minimumprinzips und der obigen Annahme über x_b sogar verschwinden müsste, im Widerspruch zu den notwendigen Bedingungen. Somit haben wir also $\ell_0 = 1$ und damit

$$H = x^2 + \lambda u, \quad \lambda' = -2x, \quad S = \lambda$$

sowie die bang-bang Steuerung

$$u_0(t) = \begin{cases} -1, & \text{falls } \lambda(t) > 0, \\ 1, & \text{falls } \lambda(t) < 0, \end{cases}$$

Zur Untersuchung einer singulären Steuerung stellen wir fest

$$S^{(0)} = \lambda, \quad S^{(1)} = -2x, \quad S^{(2)} = -2u.$$

Somit lautet die singuläre Steuerung $u_{\text{sing}} = 0$. Sie hat die Ordnung $p = 1$. Die verallgemeinerte LEGENDRE-CLEBSCH-Bedingung ist strikt erfüllt

$$(-1)^1 \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2}{dt^2} H_u \right) = 2 > 0.$$

Schließlich ergeben sich für ein singuläres Teilstück $[t_1, t_2]$ aus $S^{(0)} = S^{(1)} = 0$ die *Verknüpfungsbedingungen*

$$\lambda(t_1) = x(t_1) = 0.$$

Beachtet man, dass zu jedem Zeitpunkt t nur Steuerungen $u(t) \in \{-1, 0, 1\}$ möglich sind, dass eine singuläre Steuerung $u = 0$ nur für $x = 0$ möglich ist, und dass das Zielfunktional umso kleiner wird, je länger singulär gesteuert werden kann, so erhält man eine vollständige Klassifikation der optimalen *Steuerungsstruktur*:

$$\begin{aligned} x_b = -1 & & : & & u_{\min} \\ x_b \in]-1, 0[& & : & & u_{\min} - u_{\text{sing}} - u_{\min} \\ x_b = 0 & & : & & u_{\min} - u_{\text{sing}} \\ x_b \in]0, 1[& & : & & u_{\min} - u_{\text{sing}} - u_{\max} \\ x_b \in [1, 3[& & : & & u_{\min} - u_{\max} \\ x_b = 0 & & : & & u_{\max} \end{aligned}$$

In der Abbildung 13.7 sind einige optimale Trajektorien dargestellt. Die singulären Teilstücke befinden sich auf der t -Achse zwischen $t = 1$ und $t = 2$.

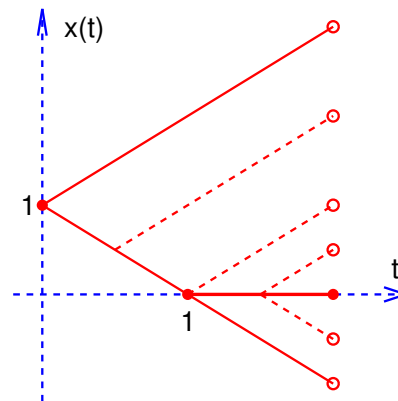


Abb. 13.7 Trajektorien für Beispiel (13.24).

Zu Demonstrationszwecken sei auch eine Mehrpunkt-Randwertaufgabe zur numerischen Lösung des obigen Problems angegeben (Dies ist hier freilich so einfach, dass es keiner Numerik bedarf.) Wir betrachten den Fall $x_b \in]0, 1[$, haben also die Steuerungsstruktur $u_{\min} - u_{\text{sing}} - u_{\max}$.

Randwertaufgabe: (Drei Differentialgleichungen, zwei Schaltpunkte)

$$\begin{aligned} x_1' &= u, & x_1(0) &= 1, & x_1(2) &= x_b, \\ x_2' &= x_1^2, & x_2(0) &= 0, \\ \lambda' &= -2x_1, & x_1(t_1) &= 0, & \lambda(t_1) &= 0, \end{aligned}$$

Dabei ist die Steuerung u festgelegt durch

$$u(t) = \begin{cases} -1, & \text{für } 0 \leq t < t_1, \\ 0, & \text{für } t_1 \leq t < t_2, \\ +1, & \text{für } t_2 \leq t < 2. \end{cases}$$

Die Differentialgleichung für x_2 wird lediglich mitgeführt, um das Zielfunktional auszuwerten.

14. Das Minimumprinzip

In diesem Abschnitt behandeln wir die Idee der *dynamischen Programmierung*, die auf BELLMANN³¹ (1957) zurückgeht und geben in diesem Zusammenhang eine heuristische Herleitung des Minimumprinzips an.

Dazu betrachten wir (wie in Abschnitt 12) einen Spezialfall einer Optimalsteuerungsaufgabe, der dadurch gekennzeichnet ist, dass der Zustandsvektor im Anfangspunkt vollständig vorgegeben und im Endpunkt vollständig frei ist.

Problemstellung (14.1)

Zu minimieren sei das Funktional

$$I(u) := g(x(t_b)) + \int_{t_a}^{t_b} f_0(t, x(t), u(t)) dt$$

über $(x, u) \in C_s^{0,1}([t_a, t_b], \mathbb{R}^n) \times C_s([t_a, t_b], \mathbb{R}^m)$ unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x, u), & t_a \leq t \leq t_b, \\ x(t_a) &= x_a, \\ u(t) &\in U \subset \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

U sei wiederum ein konvexer und abgeschlossener Steuerbereich.

Wir betrachten nun den (optimalen) Wert des Zielfunktionals in Abhängigkeit von den Anfangsdaten (t_0, x_0) . Genauer definieren wir zu $\hat{t} \in [t_a, t_b]$ und $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$

$$V(\hat{t}, \hat{x}) := \hat{I}_{\text{Opt}}, \quad (14.2)$$

wobei \hat{I}_{Opt} erhalten wird durch Lösung eines *Hilfsproblems*, genauer durch Minimierung des Funktionals (Restwert)

$$\hat{I}(u) := g(x(t_b)) + \int_{\hat{t}}^{t_b} f_0(t, x(t), u(t)) dt \quad (14.3)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x, u), & \hat{t} \leq t \leq t_b, \\ x(\hat{t}) &= \hat{x}, \\ u(t) &\in U, & \hat{t} \leq t \leq t_b. \end{aligned}$$

$V(\hat{t}, \hat{x})$ heißt die *Wertfunktion* des Optimalsteuerungsproblems (14.1).

³¹Richard Bellman (1920–1984); Princeton, RAND Corporation, University of Southern California

Annahme (14.4)

Wir nehmen im Folgenden an, dass V für alle $\hat{t} \in [t_a, t_b]$ und $|\hat{x} - x_0(\hat{t})| < \varepsilon$ definiert sei (wobei (x_0, u_0) eine Lösung des Problems (14.1) und $\varepsilon > 0$ sei) und dass V auf diesem Bereich eine C^2 -Funktion sei.

Aus der Definition der Wertfunktion folgt dann unmittelbar, dass

$$V(t_b, \hat{x}) = g(\hat{x}), \quad \text{für } |\hat{x} - x_0(t_b)| < \varepsilon,$$

und hieraus durch Differentiation nach \hat{x} :

$$V_x(t_b, \hat{x}) = \nabla g(\hat{x}). \quad (14.5)$$

Zur Auswertung von $V(\hat{t}, \hat{x})$ ist eine optimale Steuerung für das Teilintervall $[\hat{t}, t_b]$ bezogen auf den Anfangswert \hat{x} zu bestimmen. Wird nun speziell $\hat{x} := x_0(\hat{t})$ gewählt, so ist zu erwarten, dass dieses Optimierungsproblem gerade von der Restriktion der (globalen) optimalen Steuerung u_0 auf das Teilintervall $[\hat{t}, t_b]$ gelöst wird. Dies ist der Inhalt des so genannten *BELLMANNschen Optimalitätsprinzips*.

Satz (14.6) (Bellmannsches Optimalitätsprinzip)

Liegt der Anfangspunkt (\hat{t}, \hat{x}) auf der Lösung des Ausgangsproblems, d.h. gilt $\hat{x} = x_0(\hat{t})$, so ist die optimale Steuerung für das Hilfsproblem (14.3) gegeben durch $u_0(t)$, $\hat{t} \leq t \leq t_b$.

Mit anderen Worten: Teilsteuerungen $u_0|_{[\hat{t}, t_b]}$ des Ausgangsproblems sind optimal für das Teilstück $[\hat{t}, t_b]$ und den Anfangszustand $x_0(\hat{t})$.

Beweis: Gäbe es eine Steuerung $\tilde{u} \in C_s([\hat{t}, t_b], U)$ mit $\hat{I}(\tilde{u}) < \hat{I}(u_0)$, so setze man diese folgendermaßen fort

$$\hat{u}(t) := \begin{cases} u_0(t), & 0 \leq t < \hat{t} \\ \tilde{u}(t), & \hat{t} \leq t \leq t_b \end{cases}.$$

\hat{u} ist dann eine zulässige Steuerung für das Ausgangsproblem und liefert wegen $\hat{x} = x_0(\hat{t})$ den zugehörigen Zustandsvektor

$$\hat{x}(t) := \begin{cases} x_0(t), & 0 \leq t < \hat{t} \\ \tilde{x}(t), & \hat{t} \leq t \leq t_b \end{cases},$$

wobei \tilde{x} der zu \tilde{u} zugehörige Zustand des Hilfsproblems ist. Damit folgt

$$\begin{aligned} I(\hat{u}) &= \int_{t_a}^{\hat{t}} f_0(t, x_0, u_0) dt + \hat{I}(\tilde{u}) \\ &< \int_{t_a}^{\hat{t}} f_0(t, x_0, u_0) dt + \hat{I}(u_0) = I(u_0), \end{aligned}$$

im Widerspruch zur vorausgesetzten Optimalität von u_0 . \square

Wir betrachten nun die folgende *Konstruktion von Vergleichssteuerungen*:

Zu einem Punkt $(\hat{t}, \hat{x}) \in [t_a, t_b[\times \mathbb{R}^n$ in der Nähe der optimalen Zustandstrajektorie und hinreichend kleinem $h > 0$ werde die optimale Steuerung im Intervall $[\hat{t}, \hat{t} + h[$ ersetzt durch eine beliebige stetige Funktion $u \in C([\hat{t}, \hat{t} + h], U)$. Der zugehörige Zustand $x(t)$, $\hat{t} \leq t \leq \hat{t} + h$ wird dann durch Lösung der Anfangswertaufgabe

$$x'(t) = f(t, x, u), \quad x(\hat{t}) = \hat{x}$$

bestimmt. Der Rest der Vergleichstrajektorie $(x(t), u(t))$, $t \in [\hat{t} + h, t_b]$ wird wiederum optimal gewählt im Sinn des Hilfsproblems (6.70) zum Anfangspunkt $(\hat{t} + h, x(\hat{t} + h))$.

Damit folgt die *BELLMANNsche Rekursion*:

$$V(\hat{t}, \hat{x}) = \min \left\{ \int_{\hat{t}}^{\hat{t}+h} f_0(t, x, u) dt + V(\hat{t} + h, x(\hat{t} + h)) \mid u \in C([\hat{t}, \hat{t} + h], U) \right\} \quad (14.7)$$

Wird ferner $\hat{x} = x_0(\hat{t})$ gewählt, so wird das Minimum in (14.7) gerade für $u_0(t)$, $\hat{t} \leq t \leq \hat{t} + h$ angenommen.

Wir bilden nun die *TAYLOR*-Entwicklung der rechten Seite von (14.7) bezüglich der Größe h . Dabei sei nun u eine feste (von h unabhängige) stetige Funktion auf $[\hat{t}, \hat{t} + h_{\max}]$ in U .

$$\begin{aligned} \int_{\hat{t}}^{\hat{t}+h} f_0(t, x, u) dt &= f_0(\hat{t}, \hat{x}, u(\hat{t})) h + O(h^2) \\ V(\hat{t} + h, x(\hat{t} + h)) &= V(\hat{t}, \hat{x}) + \left(V_t(\hat{t}, \hat{x}) + V_x(\hat{t}, \hat{x})^T x'(\hat{t}) \right) h + O(h^2). \end{aligned}$$

Setzt man dies in (14.7) ein, so folgt

$$0 = \min \left\{ \left(f_0(\hat{t}, \hat{x}, u(\hat{t})) + V_t(\hat{t}, \hat{x}) + V_x(\hat{t}, \hat{x})^T x'(\hat{t}) \right) h + O(h^2) \mid u(\hat{t}) \in U \right\}$$

und schließlich für $h \downarrow 0$:

$$0 = \min \left\{ f_0(\hat{t}, \hat{x}, u(\hat{t})) + V_t(\hat{t}, \hat{x}) + V_x(\hat{t}, \hat{x})^T f(\hat{t}, \hat{x}, u(\hat{t})) \mid u(\hat{t}) \in U \right\} \quad (14.8)$$

Wir geben noch eine etwas ausführlichere Begründung für (14.8):

1.) Zunächst folgt mit der *BELLMANN* Rekursion (14.7) für alle hinreichend kleinen $h > 0$:

$$\int_{\hat{t}}^{\hat{t}+h} f_0(t, x, u) dt + V(\hat{t} + h, x(\hat{t} + h)) - V(\hat{t}, \hat{x}) \geq 0.$$

Die linke Seite wird bzgl. h nach TAYLOR entwickelt um $h = 0$. Der führende Term muss dann auch nichtnegativ sein:

$$f_0(\hat{t}, \hat{x}, u(\hat{t})) + V_t(\hat{t}, \hat{x}) + V_x(\hat{t}, \hat{x})^T f(\hat{t}, \hat{x}, u(\hat{t})) \geq 0.$$

2.) Wählt man u nun optimal im Sinne des Hilfsproblems (14.3), so gilt nach dem BELLMANNschen Optimalitätsprinzip

$$\int_{\hat{t}}^{\hat{t}+h} f_0(t, x, u) dt + V(\hat{t} + h, x(\hat{t} + h)) - V(\hat{t}, \hat{x}) = 0.$$

Hier muss nun auch der führende Term der TAYLOR Entwicklung verschwinden:

$$f_0(\hat{t}, \hat{x}, u(\hat{t})) + V_t(\hat{t}, \hat{x}) + V_x(\hat{t}, \hat{x})^T f(\hat{t}, \hat{x}, u(\hat{t})) = 0.$$

Aus diesen beiden Relationen zusammen folgt die Beziehung (14.8).

Darüber hinaus folgt: Im Fall $\hat{x} = x_0(\hat{t})$ wird das Minimum in (14.8) gerade für $u(\hat{t}) = u_0(\hat{t})$ angenommen.

Definieren wir nun

$$\begin{aligned} \lambda(t) &:= V_x(t, x_0(t)) \quad (\text{adjungierte Variable}), \\ H(t, x, u, \lambda) &:= f_0(t, x, u) + \lambda^T f(t, x, u) \quad (\text{HAMILTON-Funktion}). \end{aligned} \tag{14.9}$$

so lautet (14.8) nun

$$-V_t(\hat{t}, \hat{x}) = \min \left\{ H(\hat{t}, \hat{x}, \hat{u}, V_x(\hat{t}, \hat{x})) \mid \hat{u} \in U \right\}, \tag{14.10}$$

wobei das Minimum im Fall $\hat{x} = x_0(\hat{t})$ gerade für $\hat{u} = u_0(\hat{t})$ angenommen wird.

(14.10) ist eine (i. Allg. nichtlineare) partielle Differentialgleichung erster Ordnung für die Wertfunktion. sie heißt HAMILTON-JACOBI-BELLMANN *Gleichung*.

Zugleich folgt mit (14.10), dass die optimale Steuerung $u_0(t)$ die HAMILTON-Funktion längs der optimalen Trajektorie minimiert:

$$H(\hat{t}, x_0(\hat{t}), u_0(\hat{t}), \lambda(\hat{t})) = \min \left\{ H(\hat{t}, x_0(\hat{t}), u, \lambda(\hat{t})) \mid u \in U \right\}. \tag{14.11}$$

Dies ist gerade der Inhalt des *Minimumprinzips*.

Es bleibt nun noch zu zeigen, dass die in (14.9) definierten adjungierten Variablen λ mit den früher definierten übereinstimmen. Dazu genügt es, zu zeigen, dass λ den adjungierten Differentialgleichungen sowie den natürlichen Randbedingungen genügt. In vorliegenden Fall ist λ dann als Lösung der entsprechenden Anfangswertaufgabe eindeutig bestimmt.

Zu den adjungierten Differentialgleichungen.

Wählt man $\hat{x} := x_0(\hat{t})$, so wird das Minimum in (14.8) oder in (14.10) gerade für $\hat{u} = u_0(\hat{t})$ angenommen. Für $\hat{x} \neq x_0(\hat{t})$ wird $u_0(\hat{t})$ jedoch i. Allg. kein Minimum sein. Damit gilt aber neben (14.8):

$$0 = \min \left\{ V_t(\hat{t}, \hat{x}) + H(\hat{t}, \hat{x}, u_0(\hat{t}), V_x(\hat{t}, \hat{x})) \mid \hat{x} \in U_x(\hat{t}) \right\},$$

wobei $U_x(\hat{t})$ eine geeignete Umgebung um $x_0(\hat{t})$ bezeichne. Das Minimum wird in $x_0(\hat{t})$ angenommen. Damit muss aber der Gradient der Funktion $V_t(\hat{t}, \hat{x}) + H(\hat{t}, \hat{x}, u_0(\hat{t}), V_x(\hat{t}, \hat{x}))$ bezüglich \hat{x} in $x_0(\hat{t})$ verschwinden.

In Koordinaten geschrieben lautet diese Beziehung ($j = 1, \dots, n$)

$$V_{tx_j}(\hat{t}, x_0(\hat{t})) + H_{x_j}(\hat{t}, x_0, u_0, \lambda) + \sum_{i=1}^n H_{\lambda_i}(\hat{t}, x_0, u_0, \lambda)^T V_{x_i x_j}(\hat{t}, x_0(\hat{t})) = 0.$$

Nun folgt nach Definition der HAMILTON-Funktion $H_{\lambda_i} = f_i(\hat{t}, x_0(\hat{t}), u_0(\hat{t}))$. Damit lässt sich diese Relation auch folgendermaßen schreiben

$$H_{x_j}(\hat{t}, x_0, u_0, \lambda) + \frac{d}{d\hat{t}} V_{x_j}(\hat{t}, x_0(\hat{t}), u_0(\hat{t}), \lambda(\hat{t})) = 0$$

oder $\lambda'_j(\hat{t}) = -H_{x_j}(\hat{t}, x_0, u_0, \lambda)$. Dies ist die bekannte adjungierte Differentialgleichung.

Die natürlichen Randbedingungen folgen aus (14.5)

$$\lambda(t_b) = V_x(t_b, x_0(t_b)) = \nabla g(x(t_b)).$$

Damit ist das Minimumprinzip für den betrachteten Spezialfall gezeigt. Der Beweis ist nicht streng, da die Existenz und C^2 -Eigenschaft der Wertfunktion vorausgesetzt werden musste.

Interpretation der adjungierten Variablen.

Als Folgerung aus den obigen Überlegungen ergibt sich eine interessant und nützliche Interpretation der adjungierten Variablen $\lambda(t)$.

Dazu sei (x_0, u_0) eine Lösung des Ausgangsproblems und λ die zugehörige adjungierte Variable (gemäß der notwendigen Bedingungen). In $\hat{t} \in [t_a, t_b[$ werde nun der Zustandsvektor gestört:

$$x_0(\hat{t}) \longrightarrow x_0(\hat{t}) + \delta x(\hat{t}).$$

Ab diesem Zeitpunkt werde dann wieder optimal (bezogen auf den neuen Zustandsvektor) gesteuert. Der Wert der Zielfunktion für diese gestörte Vergleichskurve hängt dann nur vom Störzeitpunkt und von der Störung selbst ab:

$$I = \hat{I}(\hat{t}, \delta x(\hat{t})) = \int_{t_a}^{\hat{t}} f_0(t, x_0, u_0) dt + V(\hat{t}, x_0(\hat{t}) + \delta x(\hat{t})).$$

Aufgrund der Definition (14.9) gilt nun

$$\lambda(\hat{t}) = \frac{\partial \hat{I}}{\partial (\delta x(\hat{t}))}, \quad (14.12)$$

d.h. $\lambda(\hat{t})$ beschreibt die *Sensitivität* des Zielfunktional in Anhängigkeit von Störungen der Zustandsgrößen zum Zeitpunkt \hat{t} . Insbesondere sind also die adjungierten Variablen auch für die unterschiedlichen Anwendungen interpretierbare (und zumeist auch vom Anwenderstandpunkt wichtige) Größen.

Für Anwendung im Rahmen der Wirtschaftswissenschaften haben Feichtinger und Hartl die obige Interpretation sehr intuitiv folgendermaßen beschrieben:

$\lambda_j(t)$ gibt also an, wieviel es dem Entscheidungsträger wert ist, eine kleine Einheit der Zustandsvariablen $x_j(t)$ mehr zu besitzen, unter der Annahme, dass er sich für den Rest des Planungshorizonts optimal verhält. $\lambda(t)$ heißt Schattenpreis, weil der Kapitalwert nicht den am Kapitalmarkt herrschenden Marktpreis darstellt, sondern einen (firmen-) internen Verrechnungspreis, mit dem eine zusätzliche Kapitaleinheit bewertet wird. Mit anderen Worten misst der Schattenpreis nicht den direkten Verkaufswert, der am Markt für eine Kapitaleinheit erzielt werden kann, sondern den Preis, den ein sich rational verhaltender Entscheidungsträger bereit wäre, für eine zusätzliche Kapitaleinheit zu bezahlen.

15. Hinreichende Bedingungen für Optimalsteuerungsaufgaben.

A. Konvexe Optimalsteuerungsaufgaben.

Wir behandeln in diesem Abschnitt hinreichende Bedingungen für Optimalsteuerungsaufgaben, und zwar zunächst solche, die mit Konvexitätsvoraussetzungen zu tun haben. Damit wird der Abschnitt 5, in dem wir uns mit hinreichenden Bedingungen für Variationsaufgaben beschäftigt haben, vervollständigt.

Wir betrachten wieder eine allgemeine Optimalsteuerungsaufgabe der folgenden Form

$$\text{Minimiere } I(u) = g(x(t_a), x(t_b)) + \int_{t_a}^{t_b} f_0(t, x(t), u(t)) dt \quad (15.13)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x, u), \quad t_a \leq t \leq t_b, \\ r(x(t_a), x(t_b)) &= 0 \in \mathbb{R}^k, \\ u(t) &\in U \subset \mathbb{R}^m. \end{aligned} \quad (15.14)$$

Zugelassen sind dabei wie üblich stückweise stetige Steuerfunktionen $u \in C_s([t_a, t_b], \mathbb{R}^m)$ und stetige, stückweise stetig differenzierbare Zustandsvariable $x \in C_s^{0,1}([t_a, t_b], \mathbb{R}^n)$. Der Steuerbereich U sei abgeschlossen, konvex und nichtleer, die Funktionen g, r, f_0 und f seien hinreichend oft stetig differenzierbar. Schließlich erfülle auch die Abbildung r die Regularitätsvoraussetzung, d.h. die JACOBI-Matrix von r besitze für Lösungen, bzw. Lösungskandidaten maximalen Rang, vgl. (6.19).

Ein Paar (x, u) heißt *zulässig*, falls alle Nebenbedingungen (15.2) erfüllt sind.

Wir notieren nochmals die notwendigen Bedingungen, die ein optimales zulässiges Paar (x_0, u_0) erfüllen muss. Dabei bezeichnen $\ell_0 \in \{0, 1\}$, $\nu \in \mathbb{R}^k$ und $\lambda \in C_s^{0,1}([t_a, t_b], \mathbb{R}^n)$ die LAGRANGE-Parameter und

$$H(t, x, u, \lambda) := \ell_0 f_0(t, x, u) + \lambda^T f(t, x, u)$$

die HAMILTON-Funktion.

- (a) $(\ell_0, \nu, \lambda(t)) \neq 0, \quad \forall t \in [t_a, t_b],$
 - (b) $u_0(t) \in \operatorname{argmin}\{H(t, x_0(t), u, \lambda(t)) \mid u \in U\},$
 - (c) $\lambda'(t) = -H_x(t, x_0(t), u_0(t), \lambda(t)),$
 - (d) $\lambda(t_a) = -\frac{\partial}{\partial x(t_a)}(\ell_0 g + \nu^T r), \quad \lambda(t_b) = \frac{\partial}{\partial x(t_b)}(\ell_0 g + \nu^T r).$
- (15.15)

Satz (15.4) (Hinreichende Bedingungen nach Mangasarian)

Sei (x_0, u_0) ein zulässiges Paar. Es mögen weiterhin LAGRANGE–Multiplikatoren $\nu \in \mathbb{R}^k$ und $\lambda \in C_s^{0,1}([t_a, t_b], \mathbb{R}^n)$ existieren, so dass die notwendigen Bedingungen (15.3) mit $\ell_0 = 1$ erfüllt sind.

Ist die HAMILTON–Funktion für jedes feste $t \in [t_a, t_b]$ als Funktion von $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times U$ (bei festem $\lambda(t)$) *konvex* und ist auch die Funktion $\tilde{g} := g + \nu^T r$ *konvex* bezüglich der Variablen $(x(t_a), x(t_b))$, so ist (x_0, u_0) eine Lösung der Optimalsteuerungsaufgabe (15.1-2).

Ist H sogar strikt konvex in (x, u) , so ist die Lösung (x_0, u_0) eindeutig bestimmt.

Beweis: (x_0, u_0) ist ein optimales Paar, falls für alle zulässigen Paare (x, u) gilt:

$$\Delta := g(x(t_a), x(t_b)) - g(x_0(t_a), x_0(t_b)) + \int_{t_a}^{t_b} (f_0(t, x, u) - f_0(t, x_0, u_0)) dt \geq 0.$$

Wir schätzen den Ausdruck Δ nach unten ab. Zunächst ergibt sich aus $f_0 = H - \lambda^T f$

$$\begin{aligned} \Delta &= g(x(t_a), x(t_b)) - g(x_0(t_a), x_0(t_b)) + \int_{t_a}^{t_b} \lambda^T(x'_0 - x') dt \\ &\quad + \int_{t_a}^{t_b} (H(t, x, u, \lambda) - H(t, x_0, u_0, \lambda)) dt. \end{aligned}$$

Nun ist nach Voraussetzung H bezüglich (x, u) konvex. Damit gilt

$$\begin{aligned} H(t, x, u, \lambda) - H(t, x_0, u_0, \lambda) &\geq H_x(t, x_0, u_0, \lambda)^T(x - x_0) + H_u(t, x_0, u_0, \lambda)^T(u - u_0) \\ &= -(\lambda')^T(x - x_0) + H_u(t, x_0, u_0, \lambda)^T(u - u_0) \end{aligned}$$

Nach dem Minimumprinzip (15.3b) minimiert die optimale Steuerung $u_0(t)$ die HAMILTON–Funktion, d.h. für festes $t \in [t_a, t_b]$ gilt

$$\forall v \in U : H(t, x_0(t), u_0(t), \lambda(t)) \leq H(t, x_0(t), v, \lambda(t)).$$

Wegen der Konvexität des Steuerbereichs U gilt hiermit die notwendige Bedingung erster Ordnung

$$\forall v \in U : H_u(t, x_0(t), u_0(t), \lambda(t))^T(v - u_0(t)) \geq 0.$$

Speziell für $v := u(t)$ erhalten wir also die Ungleichung

$$H(t, x, u, \lambda) - H(t, x_0, u_0, \lambda) \geq -(\lambda')^T(x - x_0),$$

so dass sich nunmehr für Δ ergibt

$$\Delta \geq g(x(t_a), x(t_b)) - g(x_0(t_a), x_0(t_b)) + \int_{t_a}^{t_b} \lambda^T(x'_0 - x') dt - \int_{t_a}^{t_b} (\lambda')^T(x - x_0) dt.$$

Durch Addition bzw. Subtraktion der (verschwindenden) Terme $\nu^T r(x(t_a), x(t_b))$ bzw. $\nu^T r(x_0(t_a), x_0(t_b))$ und unter Verwendung der vorausgesetzten Konvexität von $\tilde{g} := g + \nu^T r$ ergibt sich für die ersten beiden Summanden die Abschätzung

$$\begin{aligned} g(x(t_a), x(t_b)) - g(x_0(t_a), x_0(t_b)) &= \tilde{g}(x(t_a), x(t_b)) - \tilde{g}(x_0(t_a), x_0(t_b)) \\ &\geq (\nabla_{x(t_a)} \tilde{g})^T (x(t_a) - x_0(t_a)) + (\nabla_{x(t_b)} \tilde{g})^T (x(t_b) - x_0(t_b)). \end{aligned}$$

Schließlich wird das zweite Integral mittels partieller Integration umgeformt, wodurch sich das erste Integral dann weghebt. Es bleibt

$$\Delta \geq (\nabla_{x(t_a)} \tilde{g} + \lambda(t_a))^T (x(t_a) - x_0(t_a)) + (\nabla_{x(t_b)} \tilde{g} - \lambda(t_b))^T (x(t_b) - x_0(t_b)),$$

wobei die rechte Seite nun aufgrund der natürlichen Randbedingungen (15.3d) verschwindet.

Zur Eindeutigkeit: Wenn Δ verschwindet, so folgt aus der obigen Ungleichungskette, dass dann notwendig für fast alle t gilt

$$H(t, x, u, \lambda) - H(t, x_0, u_0, \lambda) = H_x(t, x_0, u_0, \lambda)^T (x - x_0) + H_u(t, x_0, u_0, \lambda)^T (u - u_0)$$

Mit der strikten Konvexität folgt hieraus $u(t) = u_0(t)$ (für fast alle t) und $x(t) = x_0(t)$ (überall). \square

Bemerkung (15.5)

Für lineare Randbedingungen reduziert sich die vorausgesetzte Konvexität der Funktion \tilde{g} auf die Konvexität von g selbst.

Dies ist beispielsweise der Fall für Standard-Randbedingungen der Form

$$x_i(t_a) = x_{i_a} \quad (i \in I_a), \quad x_j(t_b) = x_{j_b} \quad (j \in I_b).$$

Beispiel (15.6)

Wir betrachten nochmals das in (13.24) behandelte Beispiel von Kelley, Kopp und Moyer.

$$\text{Minimiere} \quad I(u) := \int_0^2 x(t)^2 dt$$

$$\text{Nebenbedingungen:} \quad x' = u, \quad x(0) = 1, \quad x(2) = x_b, \quad -1 \leq u(t) \leq 1.$$

Die Konvexität von \tilde{g} ist erfüllt, da $g = 0$ ist und die Randbedingungen linear sind. Für die HAMILTON-Funktion ergibt sich $H = x^2 + \lambda u$. Diese ist also konvex bezüglich (x, u) , jedoch strikt konvex nur bezüglich x . Jede reguläre Lösung der notwendigen Bedingungen liefert somit nach (15.4) ein globales Minimum des Optimalsteuerungsproblems. Die Eindeutigkeit folgt jedoch noch nicht aus (15.4).

Die Voraussetzung der Konvexität der HAMILTON-Funktion H in (x, u) lässt sich allerdings etwas abschwächen. Dazu setzen wir voraus, dass zu jedem (t, x) mit

$|x - x_0(t)| < \varepsilon$ das folgende Minimum existiert:

$$\hat{H}(t, x, \lambda(t)) := \min\{H(t, x, u, \lambda(t)) \mid u \in U\}$$

Die Funktion \hat{H} lässt sich als *Einhüllende (Envelope)* der Funktionenschar $H(t, x, u, \lambda(t))$, $u \in U$ interpretieren.

Satz (15.7) (Hinreichende Bedingungen nach Array)

Gilt bei ansonsten ungeänderten Voraussetzungen aus (15.4), dass die Einhüllende $\hat{H}(t, x, \lambda(t))$ der HAMILTON-Funktion als Funktion von x konvex ist, so ist (x_0, u_0) ein optimales Paar.

Beweis:

Wir brauchen den Beweis zu (15.4) nur geringfügig zu modifizieren. Dazu schätzen wir zunächst ab:

$$H(t, x, u, \lambda) - H(t, x_0, u_0, \lambda) \geq \hat{H}(t, x, \lambda) - \hat{H}(t, x_0, \lambda)$$

Für die beiden ersten Summanden der linken und rechten Seite gilt die Ungleichung ja aufgrund der Definition von \hat{H} , die beiden zweiten Summanden sind aber aufgrund des Minimumprinzips gleich.

Nun ist \hat{H} als Funktion von x zwar konvex, aber nicht notwendiger Weise auch stetig differenzierbar. Man kann sich mit einer Aussage der konvexen Analysis (die auf FLETCHER und ROCKAFELLER zurückgeht) behelfen: Danach besitzt die konvexe Funktion \hat{H} in $x_0(t)$ einen (konvexen) *Subgradienten*, das ist ein Vektor $a \in \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft:

$$\hat{H}(t, x, \lambda) - \hat{H}(t, x_0, \lambda) \geq a^T(x - x_0).$$

Für einen Beweis dieser Aussage (die aus der Existenz der rechtsseitigen Richtungsableitung für konvexe Funktionen folgt) sei auf GEIGER, KANZOW (2002, Abschnitt 6.3, Satz 6.17) verwiesen.

Definiert man nun (für festes t) die Funktion

$$\varphi(x) := H(t, x, u_0, \lambda) - H(t, x_0, u_0, \lambda) - a^T(x - x_0),$$

so sieht man mit den obigen Beziehungen, dass $\varphi(x) \geq 0$ gilt und $\varphi(x_0(t)) = 0$ ist. φ ist nun aber eine C^1 -Funktion, die in $x_0(t)$ ein globales Minimum besitzt. Somit folgt

$$\nabla\varphi(x_0(t)) = H_x(t, x_0, u_0, \lambda) - a = 0.$$

Damit ist also $a = H_x(t, x_0, u_0, \lambda) = -\lambda'(t)$. Setzt man dies nun in die obigen Abschätzungen ein, so ergibt sich

$$H(t, x, u, \lambda) - H(t, x_0, u_0, \lambda) \geq -\lambda'(t)^T(x - x_0).$$

Dies ist genau die benötigte Ungleichung aus dem Beweis zu Satz (15.4). Der Rest des Beweises kann nunmehr unverändert übernommen werden. \square

Beispiel (15.8)

Für das Beispiel (15.6) von Kelley, Kopp und Moyer war $H = x^2 + \lambda u$ und $U = [-1, 1]$.

Damit wird $\hat{H} = x^2 - |\lambda|$ und diese Funktion ist natürlich strikt konvex in x .

Für dieses Beispiel genügt diese Eigenschaft schon für die Eindeutigkeitsaussage: $\Delta = 0$ gilt nämlich aufgrund der strikten Konvexität von \hat{H} nur für $x = x_0$. Aufgrund der Zustandsgleichung folgt dann aber auch $u(t) = u_0(t)$ (fast überall).

Damit ist auch hier gezeigt: Jede (reguläre) Lösung der notwendigen Bedingungen liefert ein striktes globales Minimum der Optimalsteuerungsaufgabe.

B. Allgemeine Optimalsteuerungsaufgaben ³².

Wir betrachten ein allgemeines (nicht notwendig konvexes) Optimalsteuerungsproblem mit einer Zustands-/Steuerbeschränkung der folgenden Form

$$\text{Minimiere } I(u) = g(x(t_a), x(t_b)) + \int_{t_a}^{t_b} f_0(t, x(t), u(t)) dt \quad (15.9)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x, u), \quad t_a \leq t \leq t_b, \\ r(x(t_a), x(t_b)) &= 0 \in \mathbb{R}^k, \\ C(t, x(t), u(t)) &\leq 0 \in \mathbb{R}^l. \end{aligned} \quad (15.10)$$

Hierbei sei $J := [t_a, t_b]$ ein festes Zeitintervall, $t_a < t_b$. Die beteiligten Funktionen g , f_0 , f , r und C seien hinreichend oft stetig differenzierbar. Minimiert wird über der Klasse $u \in C_s(J, \mathbb{R}^m)$, $x \in C_s^{0,1}(J, \mathbb{R}^n)$.

Ein Paar (x, u) heißt *zulässig*, falls die Nebenbedingungen (15.10) für alle $t \in J$ erfüllt sind (mit einseitigen Ableitungen in den Unstetigkeitsstellen von u).

Ausgangspunkt ist ein zulässiges Paar (x_0, u_0) mit *stetiger* Steuerung u_0 , das die notwendigen Bedingungen erster Ordnung für eine reguläre Lösung von (15.9-10) erfüllt. Es gebe also adjungierte Variable $\lambda \in C_s^{0,1}(J, \mathbb{R}^n)$ und LAGRANGE-Multiplikatoren $\mu \in C_s(J, \mathbb{R}^l)$, $\nu \in \mathbb{R}^k$, so dass mit der HAMILTON-Funktion

$$H(t, x, u, \lambda) := f_0(t, x, u) + \lambda^T f(t, x, u) \quad (15.11)$$

³²H. Maurer, S. Pickenhain: Second Order Sufficient Conditions for Optimal Control Problems with mixed Control-State Constraints, JOTA, **86**, 1995.

und der *erweiterten HAMILTON-Funktion*

$$\tilde{H}(t, x, u, \lambda, \mu) := H(t, x, u, \lambda) + \mu^T C(t, x, u) \quad (15.12)$$

die folgenden Eigenschaften gelten

$$\begin{aligned} (a) \quad & \lambda'(t) = -\tilde{H}_x(t, x_0(t), u_0(t), \lambda(t), \mu(t)), \\ (b) \quad & \lambda(t_a) = -\left(\ell_0 g + \nu^T r\right)_{x(t_a)}, \quad \lambda(t_b) = \left(\ell_0 g + \nu^T r\right)_{x(t_b)}, \\ (c) \quad & \tilde{H}_u(t, x_0(t), u_0(t), \lambda(t), \mu(t)) = 0, \\ (d) \quad & \mu(t) \geq 0, \quad \mu_j(t) C_j(t, x_0(t), u_0(t)) = 0 \quad (\forall t \in J, j = 1, \dots, l). \end{aligned} \quad (15.13)$$

Die Bedingungen (15.13) sind unter zusätzlichen Regularitätsvoraussetzungen notwendig für die lokale Optimalität von (x_0, u_0) . Wir suchen nun nach weiteren Bedingungen, die zusammen mit (15.13) die schwache, lokale Optimalität von (x_0, u_0) für die Optimalsteuerungsaufgabe (15.9-10) sichern.

Zunächst gehen wir kurz auf die Umgebungsbegriffe, die im Folgenden verwendet werden, ein. Es bezeichne $\|\cdot\|$ die Euklidische Norm des \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{R}^{n+m} ; $\|\cdot\|_\infty$ die L_∞ -Norm für Funktionen. Zu $\varepsilon > 0$ und $t \in J$ seien die folgenden Norm-Kugeln definiert

$$\begin{aligned} K_\varepsilon(x_0(t), u_0(t)) &:= \{(x, u) \in \mathbb{R}^{n+m} : \|(x, u) - (x_0(t), u_0(t))\| \leq \varepsilon\}, \\ B_\varepsilon(x_0, u_0) &:= \{(x, u) \in C_s(J, \mathbb{R}^{n+m}) : \|(x, u) - (x_0, u_0)\|_\infty \leq \varepsilon\}, \\ U_\varepsilon(t) &:= K_\varepsilon(x_0(t), u_0(t)) \cap \{(x, u) \in \mathbb{R}^{n+m} : C(t, x, u) \leq 0\}, \\ W_\varepsilon &:= \{(t, x, u) \in J \times \mathbb{R}^{n+m} : (x, u) \in U_\varepsilon(t)\}. \end{aligned}$$

Definition (15.14)

Eine Funktion $V : J \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $V = V(t, x)$, heißt eine *Wertfunktion (verification function)* zu (x_0, u_0) , falls sie stetig ist, stetig differenzierbar bzgl. x , sowie stückweise stetig differenzierbar bzgl. t und es $\varepsilon, c > 0$ gibt mit den folgenden Eigenschaften

$$(V1) \quad \forall (t, x, u) \in W_\varepsilon : V_t(t, x) + H(t, x, u, V_x(t, x)) \geq c \|(x, u) - (x_0(t), u_0(t))\|^2,$$

$$(V2) \quad \forall t \in J : V_t(t, x_0(t)) + H(t, x_0(t), u_0(t), V_x(t, x_0(t))) = 0,$$

$$(V3) \quad \forall (x_a, x_b) \in K_\varepsilon(x_0(t_a), x_0(t_b)) : r(x_a, x_b) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} & V(t, x_0(t)) \Big|_{t_a}^{t_b} - V(t, x) \Big|_{(t_a, x_a)}^{(t_b, x_b)} + g(x_a, x_b) - g(x_0(t_a), x_0(t_b)) \\ & \geq c \|(x_a, x_b) - (x_0(t_a), x_0(t_b))\|^2. \end{aligned}$$

Bemerkungen (15.15)

a) Ist V eine Wertfunktion, so hat die Funktion

$$F(t, x, u) := V_t(t, x) + H(t, x, u, V_x(t, x)) \quad (15.16)$$

für festes t in $(x_0(t), u_0(t))$ ein striktes lokales Minimum unter der Nebenbedingung $C(t, x, u) \leq 0$.

b) Ist V eine Wertfunktion, so hat die Funktion

$$\begin{aligned} F_0(x_a, x_b) &:= V(t, x_0(t)) \Big|_{t_a}^{t_b} - V(t, x) \Big|_{(t_a, x_a)}^{(t_b, x_b)} \\ &+ g(x_a, x_b) - g(x_0(t_a), x_0(t_b)) \end{aligned} \quad (15.17)$$

in $(x_0(t_a), x_0(t_b))$ ein striktes lokales Minimum unter der Nebenbedingung $r(x_a, x_b) = 0$.

c) Umgekehrt: Erfüllt $(x_0(t), u_0(t))$ für alle $t \in J$ die hinreichenden Bedingungen zweiter Ordnung der restringierten Optimierungsaufgabe (15.16) und erfüllt ebenso $(x_0(t_a), x_0(t_b))$ die hinreichenden Bedingungen zweiter Ordnung der restringierten Optimierungsaufgabe (15.17) und sind hierbei die strikten lokalen Minima regulär, genauer sei die so genannte LICQ, die Linear-Independenc-Constraint-Qualification, erfüllt, und gilt zudem (V2), so existieren $c, \varepsilon > 0$ mit (V1) und (V3).

Satz (15.18)

Existiert zu (x_0, u_0) eine Wertfunktion $V(t, x)$, so gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle zulässigen $(x, u) \in B_\varepsilon(x_0, u_0)$ gilt

$$\begin{aligned} I(x, u) &\geq I(x_0, u_0) + c \|(x, u) - (x_0, u_0)\|_2^2 \\ &+ c \|(x(t_a), x(t_b)) - (x_0(t_a), x_0(t_b))\|^2. \end{aligned}$$

Insbesondere ist (x_0, u_0) ein striktes, schwaches, lokales Minimum des Optimalsteuerungsproblems (15.9-10).

Beweis:

Seien ε und c wie in (15.14). Für zulässige $(x, u) \in B_\varepsilon(x_0, u_0)$ folgt

$$\begin{aligned} I(x, u) &- I(x_0, u_0) - \{g(x(t_a), x(t_b)) - g(x_0(t_a), x_0(t_b))\} \\ &= \int_{t_a}^{t_b} [f_0(t, x(t), u(t)) - f_0(t, x_0(t), u_0(t))] dt \\ &= \int_{t_a}^{t_b} [H(t, x, u, V_x(t, x)) - V_x^T(t, x) f(t, x, u)] \\ &\quad - [H(t, x_0, u_0, V_x(t, x_0)) - V_x^T(t, x_0) f(t, x_0, u_0)] dt \end{aligned}$$

Unter Verwendung von (V1) und (V2) folgt damit

$$\begin{aligned}
I(x, u) &- I(x_0, u_0) - \{g(x(t_a), x(t_b)) - g(x_0(t_a), x_0(t_b))\} \\
&\geq \int_{t_a}^{t_b} [c \|(x, u) - (x_0(t), u_0(t))\|^2 - V_t(t, x) - V_x^T(t, x) f(t, x, u)] \\
&\quad + [V_t(t, x_0) + V_x^T(t, x_0) f(t, x_0, u_0)] dt \\
&\geq c \|(x, u) - (x_0(t), u_0(t))\|_2^2 - V(t, x(t))\Big|_{t_a}^{t_b} + V(t, x_0(t))\Big|_{t_a}^{t_b}
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich schließlich unter Verwendung von (V3)

$$\begin{aligned}
I(x, u) - I(x_0, u_0) &\geq c \|(x, u) - (x_0(t), u_0(t))\|_2^2 - V(t, x(t))\Big|_{t_a}^{t_b} \\
&\quad + V(t, x_0(t))\Big|_{t_a}^{t_b} + g(x(t_a), x(t_b)) - g(x_0(t_a), x_0(t_b)) \\
&\geq c \|(x, u) - (x_0(t), u_0(t))\|_2^2 + c \|(x(t_a), x(t_b)) - (x_0(t_a), x_0(t_b))\|^2,
\end{aligned}$$

womit gezeigt ist, dass (x_0, u_0) ein striktes, schwaches, lokales Minimum ist. \square

Konstruktion einer Wertfunktion.

Wir verwenden einen quadratischen Ansatz

$$V(t, x) := d(t) + \lambda(t)^T(x - x_0(t)) + \frac{1}{2}(x - x_0(t))^T Q(t)(x - x_0(t)). \quad (15.19)$$

Dabei seien $d \in C^1(J, \mathbb{R})$, $Q \in C_s^{0,1}(J, \mathbb{R}_{\text{symm}}^{(n,n)})$. Ferner bezeichne λ die adjungierten Variablen aus den notwendigen Bedingungen (15.13). Damit berechnen wir

$$\begin{aligned}
V_t(t, x) &= d'(t) + \lambda'(t)^T(x - x_0(t)) - \lambda(t)^T x_0'(t) \\
&\quad - x_0'(t)^T Q(t)(x - x_0(t)) + \frac{1}{2}(x - x_0(t))^T Q'(t)(x - x_0(t)) \\
V_x(t, x) &= \lambda(t) + Q(t)(x - x_0(t)) \tag{15.20}
\end{aligned}$$

$$V_{xx}(t, x) = Q(t)$$

$$V_{tx}(t, x) = \lambda'(t) - Q(t)x_0'(t) + Q'(t)(x - x_0(t)),$$

und hiermit

$$\begin{aligned}
F(t, x, u) &= V_t(t, x) + H(t, x, u, V_x(t, x)) \\
&= d'(t) + \lambda'(t)^T(x - x_0(t)) - \lambda(t)^T x_0'(t) \\
&\quad - x_0'(t)^T Q(t)(x - x_0(t)) + \frac{1}{2}(x - x_0(t))^T Q'(t)(x - x_0(t)) \\
&\quad + H(t, x, u, \lambda(t) + Q(t)(x - x_0(t))). \tag{15.21}
\end{aligned}$$

Die Bedingung (V2), $F(t, x_0(t), u_0(t)) = 0$, ist somit äquivalent zur Differentialgleichung

$$\begin{aligned} d'(t) &= \lambda(t)^T x'_0(t) - H(t, x_0(t), u_0(t), \lambda(t)) \\ &= -f_0(t, x_0(t), u_0(t)). \end{aligned} \quad (15.22)$$

Hierdurch ist d bis auf den Anfangswert $d(t_a)$, festgelegt,

$$d(t) = d(t_a) - \int_{t_a}^t f_0(\tau, x_0(\tau), u_0(\tau)) d\tau.$$

Es sind nun gemäß Bemerkung (15.15c) die Matrix-Funktion $Q(t)$ und der Anfangswert $d(t_a)$ so zu bestimmen, dass die folgenden Optimalbedingungen erfüllt sind:

(Opt 1) (x_0, u_0) erfüllt für alle $t \in J$ die hinreichenden Bedingungen zweiter Ordnung für ein striktes, reguläres lokales Minimum von (15.16).

(Opt 2) $(x_0(t_a), x_0(t_b))$ erfüllt die hinreichenden Bedingungen zweiter Ordnung für ein striktes, reguläres lokales Minimum von (15.17).

Wir sehen uns nun im Einzelnen die hinreichenden Bedingungen an.

Zu (Opt 1):

- *Regularität:* Sei für $t \in J$ die Menge der aktiven Indizes gegeben durch $J_0(t) := \{i = 1, \dots, l : C_i(t, x_0(t), u_0(t)) = 0\}$. Damit fordern wir

$$\nabla_{(x,u)} C_i(t, x_0(t), u_0(t)), \quad i \in J_0(t), \quad \text{linear unabhängig} \quad (15.23)$$

- *LAGRANGE-Funktion:*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t, x, u, \mu) &= F(t, x, u) + \mu(t)^T C(t, x, u) \\ &= V_t(x, u) + \tilde{H}(t, x, u, V_x(t, x), \mu). \end{aligned} \quad (15.24)$$

- *Stationarität:*

$$\begin{aligned} \nabla_{(x,u)} \mathcal{L} &= \begin{pmatrix} V_{tx}(x, u) + \tilde{H}_x \\ \tilde{H}_u \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda' - Q x' + Q'(x - x_0) + Q \tilde{H}_\lambda + \tilde{H}_x \\ \tilde{H}_u \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (15.25)$$

Speziell für $(x, u) = (x_0(t), u_0(t))$ ergibt sich mit (15.13 a+c) sowie $x' = f = \tilde{H}_\lambda$ die Stationarität, $\nabla_{(x,u)} \mathcal{L}(t, x_0(t), u_0(t), \mu(t)) = 0$.

- *Vorzeichenbedingung und Komplementarität:*

Diese entsprechen genau den Bedingungen (15.13 d).

- *Definitheit:*

Die Hesse-Matrix $\nabla_{(x,u)}^2 \mathcal{L}$ soll positiv definit sein auf dem erweiterten Tangentialraum

$$T(t) := \left\{ \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m} : (\xi^T, \eta^T) \nabla_{(x,u)} C_i(t, x_0(t), u_0(t)) = 0, \text{ für } i \text{ mit } \mu_i(t) > 0 \right\}.$$

D.h. für alle $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \in T(t) \setminus \{0\}$ gilt:

$$(\xi^T, \eta^T) \nabla_{(x,u)}^2 \mathcal{L}(t, x_0(t), u_0(t), \mu(t)) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} > 0. \quad (15.26)$$

Die Hesse-Matrix hat hierbei die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \nabla_{(x,u)}^2 \mathcal{L}[t] &= \begin{pmatrix} E & F \\ F^T & G \end{pmatrix} \\ E &= Q' + Q f_x + f_x^T Q + \tilde{H}_{xx} \\ F &= Q f_u + \tilde{H}_{xu} \\ G &= \tilde{H}_{uu} \end{aligned} \quad (15.27)$$

Zu (Opt 2):

- *Regularität:*

$$\text{Rang } \nabla_{(x_a, x_b)} r(x_0(t_a), x_0(t_b)) = k. \quad (15.28)$$

- *LAGRANGE-Funktion:*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(x_a, x_b, \nu) &= F_0(x_a, x_b) + \nu^T r(x_a, x_b) \\ &= V(t, x_0)|_{t_a}^{t_b} - V(t, x)|_{(t_a, x_a)}^{(t_b, x_b)} \\ &\quad + (g(x_a, x_b) - g(x_0(t_a), x_0(t_b))) + \nu^T r(x_a, x_b). \end{aligned} \quad (15.29)$$

- *Stationarität:*

$$\nabla_{(x_a, x_b)} \mathcal{L}_0 = \begin{pmatrix} V_x(t_a, x_a) + \frac{\partial}{\partial x_a} (g + \nu^T r)|_{(x_a, x_b)} \\ -V_x(t_b, x_b) + \frac{\partial}{\partial x_b} (g + \nu^T r)|_{(x_a, x_b)} \end{pmatrix} \quad (15.30)$$

Speziell für $(x_a, x_b) = (x_0(t_a), x_0(t_b))$ ergibt sich mit (15.20) und den natürlichen Randbedingungen (15.13 b) die Stationarität, $\nabla_{(x_a, x_b)} \mathcal{L}_0(x_0(t_a), x_0(t_b), \nu) = 0$.

- *Vorzeichenbedingung und Komplementarität:*

Diese entfallen, da nur Gleichungsrestriktionen vorliegen.

- *Definitheit:*

Die Hesse-Matrix $\nabla_{(x_a x_b)}^2 \mathcal{L}_0(x_0(t_a), x_0(t_b), \nu)$ soll positiv definit sein auf dem Tangentialraum

$$T_0 := \left\{ \begin{pmatrix} \xi_a \\ \xi_b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} : r_{x_a}^T \xi_a + r_{x_b}^T \xi_b = 0 \right\}.$$

Dies heißt explizit:

$$\forall \begin{pmatrix} \xi_a \\ \xi_b \end{pmatrix} \in T_0 \setminus \{0\} : (\xi_a^T, \xi_b^T) [\nabla_{(x_a x_b)}^2 \mathcal{L}_0] \begin{pmatrix} \xi_a \\ \xi_b \end{pmatrix} > 0. \quad (15.31)$$

Die Hesse-Matrix hat allgemein die Form

$$\nabla_{(x_a x_b)}^2 \mathcal{L}_0 = \begin{pmatrix} V_{xx}(t_a, x_a) + \tilde{g}_{x_a x_a} & \tilde{g}_{x_a x_b} \\ \tilde{g}_{x_a x_b} & -V_{xx}(t_b, x_b) + \tilde{g}_{x_b x_b} \end{pmatrix},$$

wobei $\tilde{g} := g + \nu^T r$ ist. Speziell für $(x_a, x_b) = (x_0(t_a), x_0(t_b))$ erhält man mit (15.20)

$$\nabla_{(x_a x_b)}^2 \mathcal{L}_0(x_0(t_a), x_0(t_b), \nu) = \begin{pmatrix} Q(t_a) + \tilde{g}_{x_a x_a} & \tilde{g}_{x_a x_b} \\ \tilde{g}_{x_a x_b} & -Q(t_b) + \tilde{g}_{x_b x_b} \end{pmatrix}. \quad (15.32)$$

Wir fassen die bisherigen Ergebnisse zusammen:

Satz (15.33)

Ist (x_0, u_0) ein zulässiges Paar für die Optimalsteuerungsaufgabe (15.9-10), sind die notwendigen Bedingungen (15.13), sowie die Regularitätsbedingungen (15.23) und (15.28) erfüllt und gibt es eine Funktion $Q \in C_s^{0,1}(J, \mathbb{R}_{\text{symm}}^{(n,n)})$, die die Definitheitsbedingungen (15.26) und (15.31) erfüllt, so ist (x_0, u_0) ein striktes, schwaches lokales Minimum und es gilt die Abschätzung in Satz (15.18).

Zur Positiven Definitheit der Hesse-Matrix in (15.26):

Nach (15.27) besitzt die Hesse-Matrix $\nabla_{(x u)}^2 \mathcal{L}$ die folgende Blockstruktur

$$\begin{aligned} \nabla_{(x u)}^2 \mathcal{L}[t] &= \begin{pmatrix} E & F \\ F^T & G \end{pmatrix} \\ E &= Q' + Q f_x + f_x^T Q + \tilde{H}_{xx} \in \mathbb{R}^{(n,n)} \\ F &= Q f_u + \tilde{H}_{xu} \in \mathbb{R}^{(n,m)} \\ G &= \tilde{H}_{uu} \in \mathbb{R}^{(m,m)}. \end{aligned}$$

Satz (15.34)

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{(n+m, n+m)}$ mit der obigen Blockgestalt und mit symmetrischen Matrizen E und G ist genau dann positiv definit, wenn die Matrizen G und $B := E - F G^{-1} F^T$ positiv definit sind.

Beweis:

Aus der positiven Definitheit der Matrix $A = \begin{pmatrix} E & F \\ F^T & G \end{pmatrix}$ folgt mit $(x, y) \neq (0, 0)$

$$(x^T y^T) \begin{pmatrix} E & F \\ F^T & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^T E x + 2 x^T F y + y^T G y > 0.$$

Speziell für $x = 0, y \neq 0$ ergibt sich die positive Definitheit von G . Setzt man für $x \neq 0$ nun $y := -G^{-1} F^T x$, so erhält man

$$\begin{aligned} (x^T y^T) \begin{pmatrix} E & F \\ F^T & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= x^T E x - 2 x^T F G^{-1} F^T x + x^T F G^{-1} F^T x \\ &= x^T (E - F G^{-1} F^T) x > 0, \end{aligned}$$

und somit die positive Definitheit von $E - F G^{-1} F^T$.

Umgekehrt: Sind die Matrizen G und $B := E - F G^{-1} F^T$ positiv definit, so ist auch

$$\begin{pmatrix} E - F G^{-1} F^T & 0 \\ 0 & G^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -F G^{-1} \\ 0 & G^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F^T & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -G^{-1} F^T & G^{-1} \end{pmatrix}$$

positiv definit. Da die Transformationsmatrix $S = \begin{pmatrix} I & -F G^{-1} \\ 0 & G^{-1} \end{pmatrix}$ regulär ist, muss auch A positiv definit sein. \square

Wendet man den obigen Satz auf $\nabla_{(x,u)}^2 \mathcal{L}[t]$ an, vgl. (15.27), so entspricht die positive Definitheit von G gerade der strikten LEGENDRE-CLEBSCH-Bedingung

$$\forall t \in J: \quad \tilde{H}_{uu}[t] \quad \text{positiv definit.} \quad (15.35)$$

Die Auswertung von $E - F G^{-1} F^T$ ergibt ferner

$$\forall t \in J: \quad Q' + Q f_x + f_x^T Q + \tilde{H}_{xx} - (Q f_u + \tilde{H}_{xu}) \tilde{H}_{uu}^{-1} (f_u^T Q + \tilde{H}_{ux}) \quad \text{positiv definit.} \quad (15.36)$$

Satz (15.37) (Hinreichende Bedingung)

Ist (x_0, u_0) ein zulässiges Paar für die Optimalsteuerungsaufgabe (15.9-10) mit einer stetigen Steuerung u_0 , sind die notwendigen Bedingungen (15.13), die Regularitätsbedingungen (15.23) und (15.28) sowie die strikte LEGENDRE-CLEBSCH-Bedingung (15.35) erfüllt und besitzt die RICCATISCHE-Differentialgleichung

$$Q' + Q f_x + f_x^T Q + \tilde{H}_{xx} - (Q f_u + \tilde{H}_{xu}) \tilde{H}_{uu}^{-1} (f_u^T Q + \tilde{H}_{ux}) = 0$$

eine Lösung $Q \in C^1(J, \mathbb{R}_{\text{symm}}^{(n,n)})$, die die Definitheitsbedingung (15.31-32) erfüllt, so ist (x_0, u_0) ein striktes, schwaches lokales Minimum und es gilt die Abschätzung von Satz (15.18).

Beweis:

Wegen der stetigen Abhängigkeit der Lösung einer Anfangswertaufgabe von Parametern in der rechten Seite der Differentialgleichung hat auch die modifizierte RICCATISCHE-Differentialgleichung

$$Q' + Q f_x + f_x^T Q + \tilde{H}_{xx} - (Q f_u + \tilde{H}_{xu}) \tilde{H}_{uu}^{-1} (f_u^T Q + \tilde{H}_{ux}) = \varepsilon I_n$$

für hinreichen kleines $\varepsilon > 0$ eine Lösung, die ebenfalls die Definitheitsbedingung (15.31-32) erfüllt. Mit diesem Q ist auch (15.36) erfüllt. □

Beispiel (15.38)

Zur Illustration der Methode betrachten wir eine einfache Optimalsteuerungsaufgabe, die der Arbeit von Maurer, Pickenhain (JOTA 1995) entnommen wurde. Der Einfachheit halber lassen wir die dort zusätzlich betrachtete Steuer-/Zustandsbeschränkung weg. Die Aufgabe lautet

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & I(u) := \frac{1}{2} \int_0^1 (u_1^2 + u_2^2 - c x_1^2 - c x_2^2) dt \\ \text{Nebenbedingungen:} \quad & x_1' = x_2 + u_1, \quad x_1(0) = x_1(1) = 1, \\ & x_2' = u_2, \quad x_2(0) = x_2(1) = 0. \end{aligned}$$

Die notwendigen Bedingungen liefern mit der HAMILTON-Funktion

$$H = \frac{1}{2} (u_1^2 + u_2^2 - c x_1^2 - c x_2^2) + \lambda_1(x_2 + u_1) + \lambda_2 u_2$$

die adjungierten Differentialgleichungen

$$\lambda_1' = c x_1, \quad \lambda_2' = c x_2 - \lambda_1,$$

sowie die optimale Steuerung $u_i = -\lambda_i, i = 1, 2$.

Die resultierende Randwertaufgabe für x_1, x_2, λ_1 und λ_2 ist linear und eindeutig lösbar. Für die Anfangswerte der adjungierten Variablen ergeben sich

$$\lambda_1(0) \doteq -3.151855778, \quad \lambda_2(0) \doteq -0.6081584381 .$$

Die Regularitätsbedingung (15.23) entfällt, da keine Steuerungsrestriktionen vorliegen, die Regularitätsbedingung (15.28) bzgl. der Randbedingungen ist erfüllt. Da die Zustandsgrößen beidseitig vorgegeben sind, ist der Tangentialraum T_0 trivial und die Definitheitsforderung (15.31) ist somit erfüllt.

Zur Aufstellung der RICCATI-Differentialgleichung stellen wir fest

$$H_{uu} = I_2, \quad H_{xx} = -c I_2, \quad H_{xu} = 0, \quad f_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f_u = I_2.$$

Damit ergibt sich die Differentialgleichung

$$Q'(t) = \begin{pmatrix} q'_{11} & q'_{12} \\ q'_{12} & q'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11}^2 + q_{12}^2 + c & q_{12}(q_{11} + q_{22}) - q_{11} \\ q_{12}(q_{11} + q_{22}) - q_{11} & q_{12}^2 + q_{22}^2 - 2q_{12} + c \end{pmatrix}$$

Zur Erfüllung der hinreichenden Bedingung ist eine Lösung dieser RICCATI-Gleichung gesucht, die im ganzen Intervall $[0, 1]$ existiert. Man hat dazu eine symmetrische Startmatrix vorzugeben. Wählt man z.B. $Q(0) = 0$, so besitzt die zugehörige Lösung eine Singularität etwa bei $t \approx 0.6$. Dagegen existiert die Lösung zum Anfangswert $Q(0) = -10 * I_2$ im ganzen Intervall. Der berechnete Lösungskandidat des Optimalsteuerungsproblems ist damit tatsächlich ein striktes, schwaches, lokales Minimum.

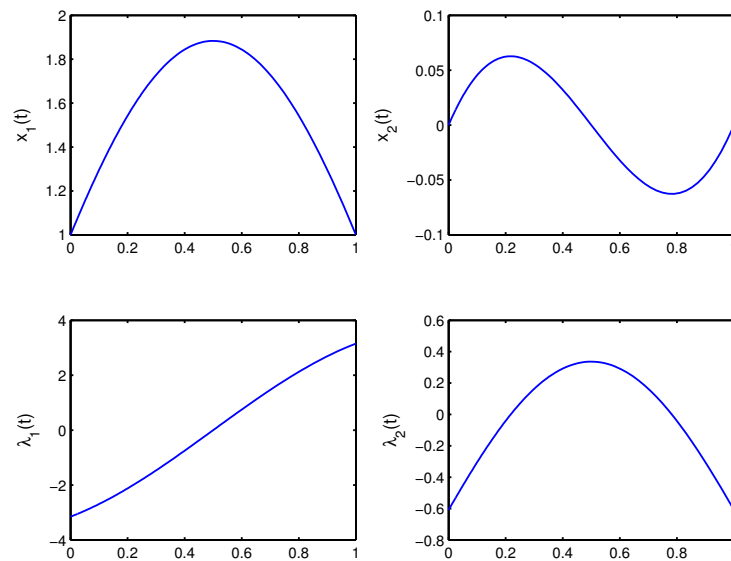


Abb. 15.1 Lösung der notwendigen Bedingungen.

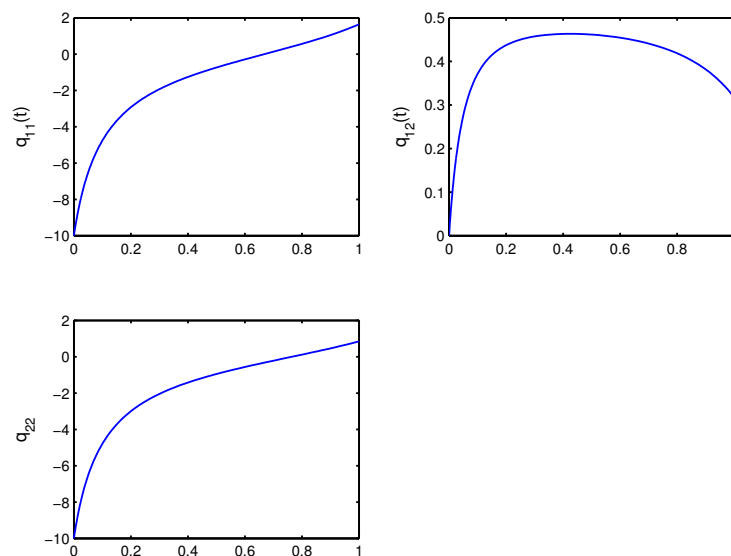


Abb. 15.2 Lösung der RICCATI-Differentialgleichung.