# 10. Residuensatz

## Partialbruch-Zerlegung.

Wir setzen unsere Untersuchung der isolierten Singularitäten einer holomorphen Funktion mit einer Methode fort, die komplexe Partialbruch-Zerlegung einer rationalen Funktion zu bestimmen.

### Definition (10.1)

Besitzt die holomorphe Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ in $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$ die Laurent-Entwicklung $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$, $0 < |z - z_0| < r$, so heißt

$$h_f(z; z_0) := \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (z - z_0)^k, \qquad 0 < |z - z_0|,$$

der **Hauptteil** von $f$ zum Entwicklungspunkt $z_0$ (isolierte Singularität).

**Satz (10.2) (Komplexe Partialbruch-Zerlegung)**

Ist $r(z) = p(z)/q(z)$ eine rationale Funktion auf $\mathbb{C}$ (also $p$ und $q$ Polynome) mit Grad $p$ < Grad $q$ und sind $z_1, \ldots, z_m$ die (verschiedenen) Nullstellen von $q$, so gilt

$$r(z) = h_r(z; z_1) + \ldots + h_r(z; z_m).$$

**Beweis:** Die Funktion

$$g(z) := r(z) - \sum_{j=1}^{m} h_r(z; z_j)$$

ist auf $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_m\}$ holomorph und hat in jedem der Punkte $z_j$ einen verschwindenden Hauptteil. Die $z_j$ sind damit hebbare Singularitäten und die holomorphe Fortsetzung von $g$ ist eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion.

Wegen Grad $p$ < Grad $q$ folgt $\lim_{z \to \infty} r(z) = 0$ und somit auch $\lim_{z\to\infty} g(z) = 0$. Nach dem Satz von Liouville (8.15) ist $g$ folglich konstant und aufgrund des obigen Grenzwertes gilt damit $g = 0$.

$\square$

**Beispiel (10.3)** Gesucht sei die Partialbruch-Zerlegung der rationalen Funktion

$$f(z) = \frac{4}{(z+1)^2\,(z-1)}\,.$$

**a)** $z_1 = -1$: $\quad f(z) = \dfrac{1}{(z+1)^2} \cdot \dfrac{4}{z-1}$.

Von $g(z) := 4/(z-1)$ werden die ersten beiden Terme der Taylor-Entwicklung um $z_1 = -1$ benötigt:

$$g(z) = \frac{4}{z-1},\quad g'(z) = \frac{-4}{(z-1)^2} \;\Rightarrow\; g(z) = (-2) - 1\,(z+1) + \ldots$$

$$\Rightarrow \qquad f(z) = -\frac{2}{(z+1)^2} - \frac{1}{z+1} + \ldots$$

Die ersten beiden Summanden bilden den Hauptteil $h_f(z; z_1)$.

**b)** $z_2 = 1$: $\quad f(z) = \dfrac{1}{z-1} \cdot \dfrac{4}{(z+1)^2}$.

Von $g(z) := 4/(z+1)^2$ wird der erste Terme der Taylor-Entwicklung um $z_2 = 1$ benötigt: $g(z) = 1 + \ldots$ und damit

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \ldots,$$

wobei der erste Summand gerade den Hauptteil $h_f(z; z_2)$ bildet.

Mit (10.2) folgt

$$f(z) = -\frac{2}{(z+1)^2} - \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1}.$$

## Residuen.

Ist $z_0$ eine isolierte Singularität einer holomorphen Funktion $f$ mit der Laurent-Entwicklung

$$f(z) \;=\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \qquad 0 < |z - z_0| < r,$$

so heißt $\text{Res}(f; z_0) := a_{-1}$ das Residuum der Funktion $f$ im $z_0$.

**Satz (10.4) (Residuensatz)**

Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G := D \setminus \{z_1, \ldots, z_m\} \to \mathbb{C}$ holomorph und $\mathbf{c} : [0,1] \to G$ ein geschlossener stückweise $C^1$–Weg, der in $D$ nullhomotop ist (d.h. innerhalb von $\mathbf{c}$ liegen höchstens die Singularitäten $z_1, \ldots, z_m$). Dann gilt

$$\oint_{\mathbf{c}} f(z)\, dz \;=\; 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \text{Uml}(\mathbf{c}, z_k)\, \text{Res}(f; z_k)$$

**Beweisskizze:**

- Es brauchen nur Singularitäten innerhalb des Weges $\mathbf{c}$ untersucht zu werden, für die äußeren Singularitäten verschwindet die Umlaufzahl.

- Man kann den Weg $\mathbf{c}$ so in geschlossene Teilwege $\mathbf{c}_j$ zerlegen, dass jeder Teilweg nur Singularitäten mit gleicher Umlaufzahl $\ell_j$ enthält.

- Jeder Teilweg $\mathbf{c}_j$ ist in $G$ homotop zu einem $\ell_j$-fach durchlaufenen einfach geschlossenen stkw. C$^1$-Weg $\widetilde{\mathbf{c}}_j$. Damit folgt für das Integral

$$\oint_{\mathbf{c}} f(z)\,dz \;=\; \sum_{j=1}^{s} \ell_j \oint_{\widetilde{\mathbf{c}}_j} f(z)\,dz$$

- Jeder einfach geschlossene Weg $\widetilde{\mathbf{c}}_j$ kann zerlegt werden in eine Summe von Kreisen um die Singularitäten innerhalb von $\widetilde{\mathbf{c}}_j$.

Insgesamt folgt somit

$$\oint_{\mathbf{c}} f(z)\,dz \;=\; \sum_{k=1}^{m} \mathsf{Uml}(\mathbf{c}, z_k) \oint_{|z-z_k|=r_k} f(z)\,dz$$

Nun verwenden wir die Laurent-Entwicklung von $f$ um $z_k$ und erhalten

$$\begin{aligned}
\oint_{|z-z_k|=r_k} f(z)\,dz &= \oint_{|z-z_k|=r_k} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j^{(k)} (z-z_k)^j\,dz \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j^{(k)} \oint_{|z-z_k|=r_k} (z-z_k)^j\,dz \\
&= 2\,\pi\,i\,a_{-1}^{(k)} \;=\; 2\,\pi\,i\,\mathsf{Res}(f; z_k) \qquad \square
\end{aligned}$$

Wir geben im Folgenden einige Standard-Verfahren zur konkreten Berechnung von Residuen an.

**Satz (10.5)**

**a)** Ist $z_0$ *einfacher Pol* von $f$, so besitzt $f$ eine Darstellung $f(z) = g(z)/(z - z_0)$, wobei $g$ eine in $z_0$ holomorphe Funktion ist. Es gilt dann

$$\text{Res}(f; z_0) \;=\; g(z_0) \;=\; \lim_{z \to z_0} (z - z_0)\, f(z). \tag{10.6}$$

**b)** Ist $f(z) = P(z)/Q(z)$ mit in einer Umgebung von $z_0$ holomorphen Funktionen $P$ und $Q$ und ist $z_0$ eine *einfache Nullstelle* von $Q$, so gilt

$$\text{Res}(f; z_0) \;=\; \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}\,. \tag{10.7}$$

**c)** Ist $f(z) = g(z)/(z - z_0)^m$ mit einer in einer Umgebung von $z_0$ holomorphen Funktion $g$, so gilt

$$\text{Res}(f; z_0) \;=\; \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}\,. \tag{10.8}$$

**Beweis:**

**zu a)** Dies folgt aus c) für $m = 1$.

**zu b)** Setzt man $Q(z) = (z - z_0)\,R(z)$, so ist $R$ in $z_0$ holomorph fortsetzbar mit $R(z_0) \neq 0$. Damit ist auch $g(z) := P(z)/R(z)$ bei $z = z_0$ holomorph fortsetzbar und es gilt $f(z) = g(z)/(z - z_0)$. Nach a) folgt $\text{Res}(f; z_0) = g(z_0) = P(z_0)/R(z_0)$.

Differentiation von $Q(z) = (z - z_0)\,R(z)$ ergibt

$$Q'(z) \;=\; R(z) + (z - z_o)\,R'(z)$$

und somit $Q'(z_0) = R(z_0)$, also $\text{Res}(f; z_0) = P(z_0)/Q'(z_0)$.

**zu c)** Die Taylor-Entwicklung von $g$ ergibt

$$f(z) \;=\; \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!}\,(z - z_0)^{k-m}\;.$$

Speziell für $k = m - 1$ folgt $a_{-1} = \text{Res}(f; z_0) = \dfrac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$ $\square$

## Beispiele (10.9)

**a)** $$f(z) = \frac{1}{(z+1)\,(z-2)}.$$ Nach (10.5) a) ergibt sich

$$\mathrm{Res}(f;-1) = \frac{1}{z-2}\Big|_{z=-1} = -1/3\,,$$

$$\mathrm{Res}(f;2) = \frac{1}{z+1}\Big|_{z=2} = 1/3\,.$$

**b)** $$f(z) = \frac{1}{(1+z^2)}.$$ Nach (10.5) b) ergibt sich

$$\mathrm{Res}(f;i) = \frac{1}{2\,z}\Big|_{z=i} = 1/(2\,i)\,,$$

$$\mathrm{Res}(f;-i) = \frac{1}{2\,z}\Big|_{z=-i} = -1/(2\,i)\,.$$

**c)** $$f(z) = \frac{e^{iz}}{z\,(1+z^2)^2}.$$

$z_0 = i$ ist Pol zweiter Ordnung von $f$. Nach (10.5) c) erhält man

$$\mathrm{Res}(f;i) = g'(i), \qquad \text{mit} \quad g(z) := \frac{e^{iz}}{z\,(z+i)^2}.$$

$$\Rightarrow \quad g'(z) = \frac{i\,z\,(z+i)^2 - (z+i)^2 - 2\,z\,(z+i)}{z^2\,(z+i)^4}\ e^{iz}$$

$$= \Big(\frac{i}{z\,(z+i)^2} - \frac{1}{z^2\,(z+i)^2} - \frac{2}{z\,(z+i)^3}\Big)\ e^{iz}$$

$$\Rightarrow \quad g'(i) = \Big(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\Big)\ e^{-1} = -\frac{3}{4\,e}.$$

Damit erhalten wir $\mathrm{Res}(f;i) = -3/(4\,e)$.

**Anmerkung (10.10)** Aus dem Residuensatz lässt sich die Cauchysche Integralformel zurückgewinnen:

Ist $\mathbf{c}$ einfach geschlossen in einem Gebiet $D$, positiv orientiert, liegt $z_0$ im Innern von $\mathbf{c}$ und ist $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, so gilt

$$\begin{aligned} \oint_{\mathbf{c}} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz &= 2\pi i \ \mathrm{Res}\left(\frac{f(z)}{z - z_0};\ z_0\right) \\ &= 2\pi i \ f(z_0). \qquad \square \end{aligned}$$