

10. Randwertaufgaben

A. Allgemeines.

Wir betrachten ein DGL-System erster Ordnung:

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad (10.1)$$

mit $y(t) \in \mathbb{R}^n$ und hinreichend glatter rechter Seite $f : I \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und D ein Gebiet in \mathbb{R}^n sei.

Sind zur Festlegung einer speziellen Lösung y nicht alle Koordinaten y_i , $i = 1, \dots, n$, an *einer* Stelle $a \in I$ vorgegeben, sondern jeweils nur gewisse Komponenten y_i an verschiedenen Stellen $t_j = t_0, t_1, t_2, \dots \in I$, so spricht man von einer **Randwertaufgabe (RWA)**, je nachdem auch von einer **Zweipunkt-RWA** oder einer **Mehrpunkt-RWA**.

Grundtypen von RWA:

a) Sturmsche Randwertaufgaben:

$$\begin{aligned}y''(t) + a_1(t) y'(t) + a_0 y(t) &= b(t) \\ \alpha_1 y(t_a) + \beta_1 y'(t_a) &= d_1 \\ \gamma_2 y(t_b) + \delta_2 y'(t_b) &= d_2,\end{aligned}\tag{10.2}$$

b) Lineare RWA

$$\begin{aligned}y'(t) &= A(t) y(t) + b(t) \\ B_a y(t_a) + B_b y(t_b) &= d \\ \text{mit } A(t), B_a, B_b &\in \mathbb{R}^{(n,n)}, b(t), d \in \mathbb{R}^n,\end{aligned}\tag{10.3}$$

c) Allgemeine Zweipunkt-RWA (Normalform)

$$\begin{aligned}y'(t) &= f(t, y(t)) \\ r(y(t_a), y(t_b)) &= 0 \\ \text{mit } y(t) \in \mathbb{R}^n, \quad r : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n.\end{aligned}\tag{10.4}$$

Bemerkung: Existenz und Eindeutigkeit der Lösung einer RWA kann – selbst bei glatten Daten – nicht garantiert werden!!

Beispiel (10.5) Die folgende RWA

$$\begin{aligned}y'' &= -y \\ y(0) &= 0, \quad y(\pi/2) = 1\end{aligned}$$

besitzt die **eindeutig bestimmte Lösung** $y(t) = \sin t$.

Ändert man die Randbedingungen ab zu:

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 1,$$

so besitzt die Randwertaufgabe **keine Lösung**. Bei den Randbedingungen

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

besitzt sie dagegen **unendlich viele Lösungen**.

Satz (10.6) (Existenz und Eindeutigkeit)

Gegeben sei die lineare RWA (10.3) mit stetigen, auf $I \subset \mathbb{R}$ definierten Funktionen $\mathbf{A}(t)$ und $\mathbf{b}(t)$. $\mathbf{Y}(t)$ bezeichne ein Fundamentalsystem der homogenen DGL. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- a) Die RWA (10.3) ist für alle (stetigen) Inhomogenitäten $\mathbf{b}(t)$ und \mathbf{d} stets eindeutig lösbar.
- b) Die zugehörige homogene RWA

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t), \quad \mathbf{B}_a \mathbf{y}(t_a) + \mathbf{B}_b \mathbf{y}(t_b) = \mathbf{0}$$

hat nur die triviale Lösung $\mathbf{y} = \mathbf{0}$.

- c) Die folgende Matrix \mathbf{E} (**Shooting-Matrix**) ist regulär

$$\mathbf{E} := \mathbf{B}_a \mathbf{Y}(t_a) + \mathbf{B}_b \mathbf{Y}(t_b) \in \mathbb{R}^{(n,n)}. \quad (10.7)$$

Beweis:

Die allgemeine Lösung des DGL-Systems lautet

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_p(t) + \mathbf{Y}(t) \mathbf{c}, \quad \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n.$$

Dabei ist \mathbf{y}_p eine partikuläre Lösung.

Dies in die Randbedingungen eingesetzt liefert:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_a (\mathbf{y}_p(t_a) + \mathbf{Y}(t_a) \mathbf{c}) + \mathbf{B}_b (\mathbf{y}_p(t_b) + \mathbf{Y}(t_b) \mathbf{c}) &= \mathbf{d} \\ \iff \mathbf{E} \mathbf{c} &= \mathbf{d} - \mathbf{B}_a \mathbf{y}_p(t_a) - \mathbf{B}_b \mathbf{y}_p(t_b). \end{aligned}$$

Somit ist die eindeutige Lösbarkeit der Randwertaufgabe äquivalent zur Regularität der Matrix \mathbf{E} . Dies gilt unabhängig von den speziellen Inhomogenitäten \mathbf{b} und \mathbf{d} . ■

Beispiel (10.8) Schreibt man (10.5) in ein System erster Ordnung um, so erhält man eine Fundamentalmatrix

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{B}_a \mathbf{Y}(t_a) + \mathbf{B}_b \mathbf{Y}(t_b) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t_b & \sin t_b \\ -\sin t_b & \cos t_b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos t_b & \sin t_b \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Matrix \mathbf{E} ist also für $t_b = \pi/2$ regulär, für $t_b = \pi$ jedoch singular.

Eine Reihe anderer Aufgaben lässt sich auf die **Normalform** (10.4) einer Zweipunkt-RWA transformieren. Zu diesen gehören u.a. **Eigenwertaufgaben bei gewöhnlichen DGL** sowie **RWA mit freier Endzeit**.

Eigenwertaufgaben (10.9)

Zu einer vorgegebenen Funktion $q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sind diejenigen $\lambda \in \mathbb{R}$ (**Eigenwerte**) gesucht, für die die RWA

$$\begin{aligned} z''(t) + (\lambda - q(t)) z(t) &= 0, & a \leq t \leq b \\ z(a) &= 0, & z(b) = 0 \end{aligned} \tag{10.10}$$

eine nicht identisch verschwindende Lösung (**Eigenfunktion**) besitzt. Setzt man

$$y_1 := z, \quad y_2 := z', \quad y_3 := \lambda$$

so erhält man die folgende nichtlineare RWA in Normalform

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_2(t) \\ y_2'(t) &= (q(t) - y_3(t)) y_1(t) \\ y_3'(t) &= 0 \\ y_1(a) &= 0, \quad y_1(b) = 0, \quad y_2(a) = 1. \end{aligned} \tag{10.11}$$

Die dritte Randbedingung $y_2(a) = 1$ ist eine **Normierungsbedingung**. Man beachte, dass die obige RWA durchaus unendlich viele Lösungen besitzen kann. Dennoch lassen sich die Lösungen numerisch bestimmen, sofern sie separiert sind (Matrix \mathbf{E} regulär).

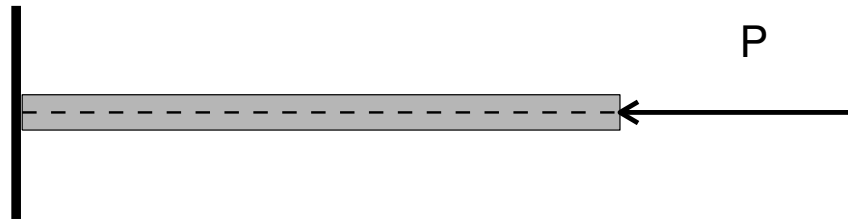
Beispiel (10.12) (Balkenknickung)

Die Biegelinie oder neutrale Faser eines dünnen Balkens genügt bei kleiner Auslenkung $y(t)$ der DGL

$$y''(t) = \frac{M(t, y)}{E \cdot I}.$$

Dabei bezeichnet $M(t, y)$ das Biegemoment, E den Elastizitätsmodul und I das axiale Flächenträgheitsmoment.

Wir nehmen an, dass der Balken in $t_0 = 0$ gestützt wird. In $t_b = \ell$ greife eine Kraft P in Richtung der Balkenachse an.



Für die neutrale Faser ergibt sich die folgende **Eigenwertaufgabe**:

$$y''(t) + \frac{P}{EI} y(t) = 0, \quad y(0) = y(\ell) = 0.$$

Für den kleinsten positiven Eigenwert erhält man $\frac{P}{EI} = (\pi/\ell)^2$.

Die zugehörige Kraft P wird auch als **Eulersche Knicklast** bezeichnet.

RWA mit freier Endzeit (10.13)

$$\begin{aligned}y'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), & t_0 \leq t \leq t_f \\ \mathbf{r}(\mathbf{y}(t_0), \mathbf{y}(t_f)) &= \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n+1}.\end{aligned}\tag{10.14}$$

Hierbei ist die Endzeit t_f nicht vorgegeben (frei). Dafür hat man nun aber $n + 1$ **Randbedingungen!** Setzt man

$$\mathbf{z}(\tau) := \mathbf{y}(t_0 + \tau \cdot (t_f - t_0)), \quad z_{n+1}(\tau) := t_f - t_0, \quad 0 \leq \tau \leq 1,$$

so ist (10.14) äquivalent zu der folgenden RWA in Normalform

$$\begin{aligned}\mathbf{z}'(\tau) &= z_{n+1}(\tau) \cdot \mathbf{f}(t_0 + z_{n+1} \tau, \mathbf{z}(\tau)), & 0 \leq \tau \leq 1, \\ z'_{n+1}(\tau) &= 0, \\ \mathbf{r}(\mathbf{z}(0), \mathbf{z}(1)) &= \mathbf{0}.\end{aligned}\tag{10.15}$$

B. Lineare Randwertprobleme zweiter Ordnung.

Wir betrachten eine lineare RWA zweiter Ordnung

$$\begin{aligned}L[y] &:= y''(t) + a_1(t) y'(t) + a_0(t) y(t) = b(t) \\R_1[y] &:= \alpha_1 y(t_a) + \beta_1 y'(t_a) + \gamma_1 y(t_b) + \delta_1 y'(t_b) = d_1 \\R_2[y] &:= \alpha_2 y(t_a) + \beta_2 y'(t_a) + \gamma_2 y(t_b) + \delta_2 y'(t_b) = d_2 ,\end{aligned}\tag{10.16}$$

und nehmen an, dass die zugehörige *homogene* RWA

$$L[y] = 0, \quad R_1[y] = R_2[y] = 0$$

nur die triviale Lösung besitzt.

Nach (10.6) besitzt die RWA (10.16) damit eine eindeutig bestimmte Lösung y .

Zunächst reduzieren wir die Aufgabe auf den Fall **homogener Randbedingungen**, d.h. $d_1 = d_2 = 0$.

Dazu sei y_0 eine beliebige C^2 -Funktion, die die Randbedingungen $R_k[y_0] = d_k$, $k = 1, 2$, erfüllt.

Setzen wir $y(t) := y_0(t) + z(t)$, so folgt

$$\begin{aligned} L[y] &= L[y_0] + L[z] = b(t) \\ \Rightarrow L[z] &= b(t) - L[y_0] =: \tilde{b}(t) \end{aligned}$$

und $R_k[y] = d_k \iff R_k[z] = 0$, $k = 1, 2$.

Anstelle der ursprünglichen RWA genügt es also, die RWA für $z(t)$ mit homogenen Randbedingungen zu lösen!

Im Folgenden nehmen wir an, dass in (10.16) bereits $d_1 = d_2 = 0$ vorliegt und versuchen nun analog zum Grundlösungsverfahren (vgl. Abschnitt 7) eine Lösungsdarstellung der folgenden Form zu finden

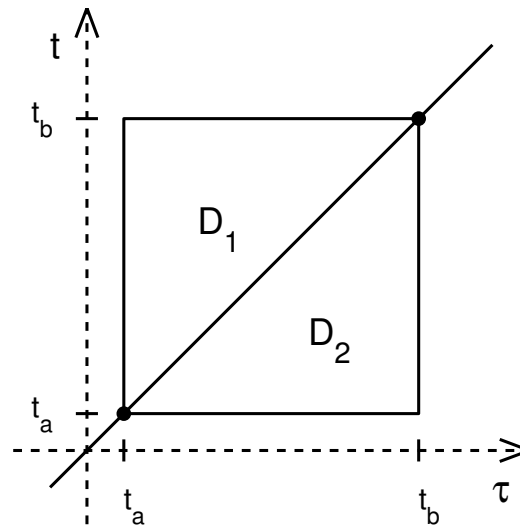
$$y(t) = \int_{t_a}^{t_b} G(t, \tau) b(\tau) d\tau. \quad (10.17)$$

$G(t, \tau)$, $t_a \leq t$, $\tau \leq t_b$, heißt **Greensche Funktion der RWA**.
Diese hängt nur vom Differentialoperator $L[y]$ und den Randbedingungen $R_k[y]$ ab, nicht aber von der Inhomogenität b .

Konstruktion der Greenschen Funktion G :

Wir nehmen an, dass G auf jedem der Dreiecke D_k glatt ist:

$$D_1 := \{(t, \tau) : t_a \leq \tau \leq t \leq t_b\}, \quad D_2 := \{(t, \tau) : t_a \leq t \leq \tau \leq t_b\}.$$



D.h. G lässt sich als C^2 -Funktion auf den (abgeschlossenen) Dreiecken D_k fortsetzen. Längs der Verbindung $t = \tau$ könnten jedoch Sprünge auftreten.

Nun bilden wir die Ableitungen von (10.17):

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \int_{t_a}^{t_b} G(t, \tau) b(\tau) d\tau \\
 y'(t) &= \frac{d}{dt} \left\{ \int_{t_a}^t G(t, \tau) b(\tau) d\tau + \int_t^{t_b} G(t, \tau) b(\tau) d\tau \right\} \quad (10.18) \\
 &= \int_{t_a}^{t_b} G_t(t, \tau) b(\tau) d\tau + [G(t, t^-) - G(t, t^+)] b(t)
 \end{aligned}$$

und fordern, dass $G(t, t^-) - G(t, t^+)$ verschwindet, G also in $t = \tau$ stetig ist.

Genauso bilden wir die zweite Ableitung

$$y''(t) = \int_{t_a}^{t_b} G_{tt}(t, \tau) b(\tau) d\tau + [G_t(t, t^-) - G_t(t, t^+)] b(t) \quad (10.19)$$

und damit:

$$L[y] = \int_{t_a}^{t_b} L[G(\cdot, \tau)] b(\tau) d\tau + [G_t(t, t^-) - G_t(t, t^+)] b(t) .$$

Für die Randbedingungen erhält man:

$$R_k[y] = \int_{t_a}^{t_b} R_k[G(\cdot, \tau)] b(\tau) dt = 0, \quad k = 1, 2. \quad (10.20)$$

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Satz (10.21)

Erfüllt $G : [t_a, t_b]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ die folgenden Eigenschaften:

a) G ist stetig auf $[t_a, t_b]^2$ und lässt sich auf D_1 und auf D_2 als C^2 -Funktion fortsetzen,

b) $G(\cdot, \tau)$ erfüllt bei festem τ die homogene DGL $L[G(\cdot, \tau)] = 0$, jeweils für $t \in [t_a, \tau]$ und $t \in [\tau, t_b]$ sowie die Randbedingungen $R_k[G(\cdot, \tau)] = 0$, $k = 1, 2$,

c) $G_t(t, t^-) - G_t(t, t^+) = 1$,

so lautet die Lösung der RWA
$$y(t) = \int_{t_a}^{t_b} G(t, \tau) b(\tau) d\tau.$$

Zur **Bestimmung der Greenschen Funktion** kann man nun folgendermaßen vorgehen:

1.) Man bestimme ein Fundamentalsystem y_1, y_2 von $L[y] = 0$ und verwende den Ansatz:

$$G(t, \tau) := \begin{cases} \sum_{i=1}^2 (a_i(\tau) + b_i(\tau)) y_i(t) : \tau \leq t \\ \sum_{i=1}^2 (a_i(\tau) - b_i(\tau)) y_i(t) : \tau \geq t \end{cases} \quad (10.22)$$

2.) Die geforderte Stetigkeit und die Sprungbedingung (10.21) ergibt das folgende lineare Gleichungssystem für die b_k (eindeutig lösbar!):

$$\sum_{i=1}^2 b_i(t) y_i(t) = 0, \quad \sum_{i=1}^2 b_i(t) y_i'(t) = \frac{1}{2}. \quad (10.23)$$

3.) Einsetzen von (10.22) in die Randbedingungen ergibt ein lineares Gleichungssystem für $(a_1(\tau), a_2(\tau))$, welches ebenfalls eindeutig lösbar ist!

Beispiel (10.24)

$$y''(t) + y(t) = b(t)$$

$$y(0) - y(\pi) = 0$$

$$y'(0) - y'(\pi) = 0.$$

Ein Fundamentalsystem ist gegeben durch $y_1(t) = \cos t$ und $y_2(t) = \sin t$. Damit hat man den Ansatz:

$$G(t, \tau) = \begin{cases} [a_1(\tau) + b_1(\tau)] \cos t + [a_2(\tau) + b_2(\tau)] \sin t & : \tau \leq t \\ [a_1(\tau) - b_1(\tau)] \cos t + [a_2(\tau) - b_2(\tau)] \sin t & : \tau \geq t \end{cases}.$$

Die Stetigkeit und die Sprungbedingung liefern das lin. Gl.system

$$b_1(t) \cos t + b_2(t) \sin t = 0$$

$$-b_1(t) \sin t + b_2(t) \cos t = \frac{1}{2}$$

mit der Lösung: $b_1(t) = -\frac{1}{2} \sin t$, $b_2(t) = \frac{1}{2} \cos t$.

Schließlich erhält man durch Auswerten der Randbedingungen:

$$G(0, \tau) - G(\pi, \tau) = [a_1(\tau) - b_1(\tau)] + [a_1(\tau) + b_1(\tau)] = 0$$

$$G_t(0, \tau) - G_t(\pi, \tau) = [a_2(\tau) - b_2(\tau)] + [a_2(\tau) + b_2(\tau)] = 0$$

und damit $a_1(\tau) = a_2(\tau) = 0$.

Die Greensche Funktion lautet also

$$G(t, \tau) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin(t - \tau), & \tau \leq t \\ -\frac{1}{2} \sin(t - \tau), & \tau \geq t \end{cases}$$

und die Lösung der Randwertaufgabe ist gegeben durch

$$y(t) = \frac{1}{2} \int_0^t \sin(t - \tau) b(\tau) d\tau - \frac{1}{2} \int_t^\pi \sin(t - \tau) b(\tau) d\tau .$$

C. Variationsrechnung.

In der klassischen *Variationsrechnung* und in der neueren *Theorie der optimalen Steuerung* werden Optimierungsaufgaben über unendlich dimensionalen Vektorräumen behandelt. Die notwendigen Bedingungen für solche Optimierungsprobleme führen auf RWA für die gesuchte Minimalfunktion.

Variationsproblem (10.25)

Zu $f \in C^2([a, b] \times \mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$, Indexmengen $I_a, I_b \subset \{1, \dots, n\}$ und Randdaten $y_{i a}, y_{j b} \in \mathbb{R}$ ist eine Funktion $y \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ gesucht, die das Zielfunktional

$$I(y) := \int_a^b f(t, y(t), y'(t)) dt$$

unter den folgenden Nebenbedingungen minimiert

$$y_i(a) = y_{i a}, \quad y_j(b) = y_{j b}, \quad i \in I_a, j \in I_b.$$

Aufgabe der optimalen Steuerung (10.26)

Zu vorgegebenen Fktn. $g \in C^2(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$, $f_0 \in C^2([a, b] \times \mathbb{R}^{n+m}, \mathbb{R})$, $f \in C^2([a, b] \times \mathbb{R}^{n+m}, \mathbb{R}^n)$, $r \in C^2(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^k)$ und $U \subset \mathbb{R}^m$ ist eine stetige, stkw. C^1 -Funktion $\mathbf{x} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ (*Zustandsfunktion*) sowie eine stkw. stetige Funktion $\mathbf{u} : [a, b] \rightarrow U$ (*Steuerfunktion*) gesucht, so dass das Zielfunktional

$$I(\mathbf{x} \mathbf{u}) := g(\mathbf{x}(a), \mathbf{x}(b)) + \int_a^b f_0(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt$$

minimiert wird unter den Nebenbedingungen

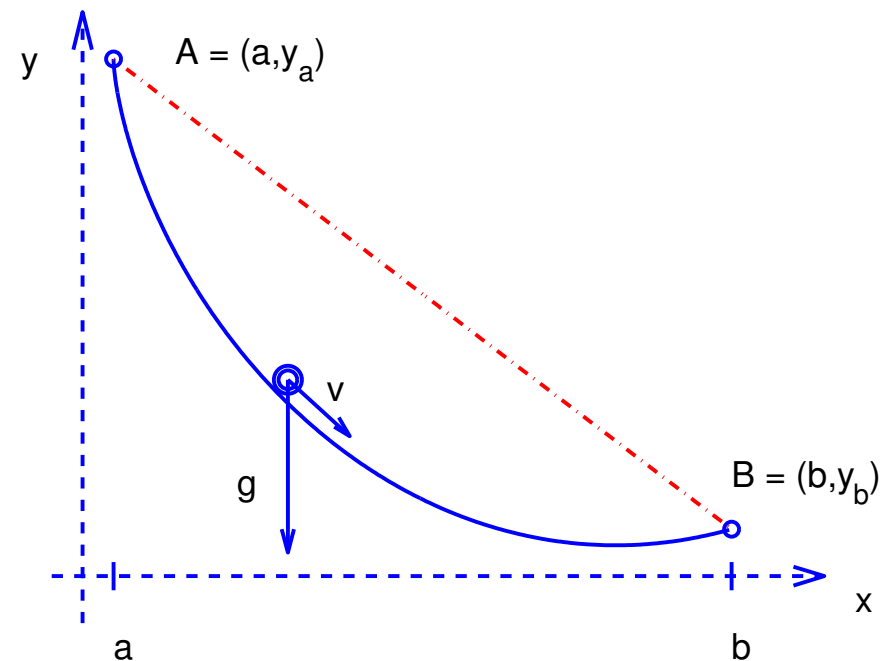
$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) ,$$

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}(a), \mathbf{x}(b)) = \mathbf{0} .$$

Wir betrachten im Folgenden das (einfachere) Variationsproblem (10.25) und dies o.B.d.A. im Fall $n = 1$. Ein prominentes Beispiel für eine solche Variationsaufgabe geht auf **Johann Bernoulli** und das Jahr **1696** zurück.

Das Problem der Brachistochrone

In einer vertikalen Ebene seien Punkte A , B gegeben; A liege höher als B , jedoch nicht senkrecht über B . Ein Massenpunkt, der anfänglich in A ruht, bewege sich unter dem Einfluss der Schwerkraft längs einer Rinne von A nach B , auf der er reibungslos geführt wird. Welche Gestalt muss dieser Rinne gegeben werden, damit der Weg von A nach B in kürzester Zeit durchlaufen wird?



Problema novum ad cuius solutionem Mathematici
invitantur.

*Datis in plano verticali duobus punctis A & B (vid. Fig. 5) TAB. V.
assignare Mobili M, viam AMB, per quam gravitate sua descendens & Fig. 5.
moveri incipiens a puncto A, brevissimo tempore perveniat ad alterum
punctum B.*

Ut harum rerum amatores instigentur & propensiori animo
ferantur ad tentamen hujus problematis, sciant non consistere in nuda
speculatione, ut quidem videtur, ac si nullum haberet usum; habet
enim maximum etiam in aliis scientiis quam in mechanicis, quod nemo
facile crediderit. Interim (ut forte quorundam præcipiti iudicio obvi-
am eam) quanquam recta AB sit brevissima inter terminos A & B,
non tamen illa brevissimo tempore percurritur; sed est curva AMB
Geometris notissima, quam ego nominabo, si elapso hoc anno nemo
alius eam nominaverit.

Aus dem **Energiesatz** folgt

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(y_a - y) \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2g} \cdot \sqrt{y_a - y}.$$

Andererseits ist der Geschwindigkeitsbetrag v die Ableitung der Bogenlänge nach der Zeit

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + y'^2} \frac{dx}{dt}.$$

Setzt man voraus, dass das x -Intervall $[a, b]$ streng monoton durchlaufen wird, genauer dass $dx/dt > 0$ gilt, so ergibt sich:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{v} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{y_a - y}}.$$

Durch Integration erhält man hieraus:

$$t_f = \int_0^{t_f} dt = \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \int_a^b \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{y_a - y}} dx.$$

Damit hat das Problem nun die Form einer **Variationsaufgabe**:
Gesucht ist eine stetige und auf $]a, b]$ differenzierbare Funktion $y = y(x)$ derart, dass das Integral

$$I(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \int_a^b \sqrt{\frac{1 + (y'(x))^2}{y_a - y(x)}} dx \quad (10.27)$$

minimiert wird unter den Nebenbedingungen:

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b. \quad (10.28)$$

Bemerkung (10.29) Auf die zusätzliche Schwierigkeit des Brachistochronenproblems, dass das Integral in (10.27) aufgrund der Anfangsbedingung an y singularär ist, werden wir an dieser Stelle nicht weiter eingehen.

Herleitung notwendige Bedingungen:

Gesucht ist eine Funktion $y_0 \in C^1[a, b]$, die das Zielfunktional

$$I(y) := \int_a^b f(t, y(t), y'(t)) dt \quad (10.30)$$

minimiert unter den Nebenbedingungen $y(a) = y_a$ und $y(b) = y_b$.

Wir nehmen an, dass das Problem eine Lösung $y_0 = y_0(t) \in C^2[a, b]$ besitzt.

Nach **Joseph Lagrange (1736-1813)** wird $y_0(t)$ in eine *ein-dimensionale* Schar von Vergleichsfunktionen eingebettet:

$$y(t, \varepsilon) := y_0(t) + \varepsilon h(t). \quad (10.31)$$

Dabei ist $h \in C^1[a, b]$ beliebig mit $h(a) = h(b) = 0$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

Wir setzen die Vergleichsfunktionen in das Zielfunktional ein

$$J(\varepsilon) := I(y(\cdot, \varepsilon)) = \int_a^b f(t, y_0(t) + \varepsilon h(t), y'_0(t) + \varepsilon h'(t)) dt .$$

Die Funktion J besitzt nun nach Annahme in $\varepsilon = 0$ ein (globales) Minimum. Daher muss die erste Ableitung, die so genannte *erste Variation* verschwinden

$$\delta I := J'(0) = \left. \frac{d}{d\varepsilon} I(y_0 + \varepsilon h) \right|_{\varepsilon=0} = 0 .$$

Die Ausführung der Differentiation ergibt

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_a^b \left(f_y(t, y_0, y'_0) \cdot h(t) + f_{y'}(t, y_0, y'_0) \cdot h'(t) \right) dt \\ &= f_{y'}(t, y_0, y'_0) \cdot h(t) \Big|_a^b + \int_a^b \left(f_y - \frac{d}{dt} f_{y'} \right) h(t) dt . \end{aligned} \tag{10.32}$$

Aufgrund der vorgegebenen Randbedingungen muss $h(a) = h(b) = 0$ gelten. Damit folgt

$$\int_a^b \left(f_y - \frac{d}{dt} f_{y'} \right) h(t) dt = 0.$$

Dies gilt für *alle* Funktionen $h \in C^1[a, b]$ mit $h(a) = h(b) = 0$. Offensichtlich ist diese Aussage aber nur dann möglich, wenn der erste Faktor $\left(f_y - \frac{d}{dt} f_{y'} \right)$ auf dem gesamten Intervall $[a, b]$ verschwindet (**Fundamentallemma der Variationsrechnung**).

Satz (10.33) (Euler–Lagrange–Gleichung)

Jede Lösung der Variationsaufgabe (10.30) ist zugleich eine Lösung der folgenden RWA

$$\begin{aligned} f_y(t, y_0, y'_0) - \frac{d}{dt} f_{y'}(t, y_0, y'_0) &= 0 \\ y_0(a) &= y_a, \quad y_0(b) = y_b. \end{aligned}$$

Bemerkungen (10.34)

a) Die DGL in (10.33) heißt *Euler-Lagrange Gleichung*. Sie ist eine (implizite) DGL zweiter Ordnung, die sich unter der Regularitätsannahme $f_{y'y'} \neq 0$ nach y'' auflösen lässt. Die Lösungen der Euler-Lagrange Gleichungen heißen auch *Extremalen* der Variationsaufgabe.

b) Wir hatten zur Herleitung von Satz (10.33) vorausgesetzt, dass y_0 eine C^2 -Funktion ist. Dies kann man unter der Regularitätsbedingung aus a) tatsächlich beweisen.

c) Lässt man in der Problemstellung (10.30) die Randbedingungen fallen, so sind auch Variationen h zulässig, die in $t = a$ bzw. in $t = b$ nicht verschwinden. Aus (10.32) folgen dann die **natürlichen Randbedingungen**

$$f_{y'}(a, y_0(a), y_0'(a)) = f_{y'}(b, y_0(b), y_0'(b)) = 0. \quad (10.35)$$

d) Im Fall einer autonomen Variationsaufgabe, also $f = f(y, y')$, lässt sich ein erstes Integral der Euler-Lagrange Gleichung angeben, nämlich

$$H(y, y') := f(y, y') - y' f_{y'}(y, y') = C = \text{const.} \quad (10.36)$$

H heißt die **Hamilton-Funktion** der Variationsaufgabe.

Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(f(y, y') - y' f_{y'}(y, y') \right) &= \left(f_y y' + f_{y'} y'' \right) - \left(y'' f_{y'} + y' \frac{d}{dt} f_{y'} \right) \\ &= y' \left(f_y - \frac{d}{dt} f_{y'} \right) = 0. \end{aligned}$$

Löst y also die Euler-Lagrange DGL, so ist die Abbildung $t \mapsto H(y(t), y'(t))$ konstant. ■

Beispiel (10.37) Brachistochrone

Gesucht ist eine C^1 -Funktion y , die das Funktional

$$I(y) = \int_a^b \left(\frac{1 + y'(t)^2}{y_a - y(t)} \right)^{0.5} dt$$

minimiert unter den Nebenbedingungen

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b.$$

Für die Hamilton-Funktion ergibt sich

$$H = \frac{1}{\sqrt{(1 + y'^2) \cdot (y_a - y)}} = C_1 = \text{const.}$$

Damit folgt

$$y' = \sqrt{\frac{2C - (y_a - y)}{y_a - y}}, \quad 2C := \frac{1}{C_1^2} > 0.$$

Trennung der Variablen liefert sodann

$$\int_{y_a}^y \sqrt{\frac{y_a - \eta}{2C - (y_a - \eta)}} d\eta = t - a.$$

Substituiert man in diesem Integral $y_a - \eta = 2C \cdot \sin^2(\theta/2)$, so erhält man für y die folgende Lösungsdarstellung:

$$\begin{aligned} t - a &= C(\theta - \sin \theta) \\ y - y_a &= -C(1 - \cos \theta). \end{aligned} \tag{10.38}$$

Dies ist die Parameterdarstellung einer **Zykloidenschar**. Der Schar-Parameter C ist durch die Endbedingung $y(b) = y_b$ festzulegen.

Trotz des problematischen „Lösungsweges“, vgl. (10.29), lässt sich zeigen, dass die Zykloide tatsächlich die Variationsaufgabe löst.

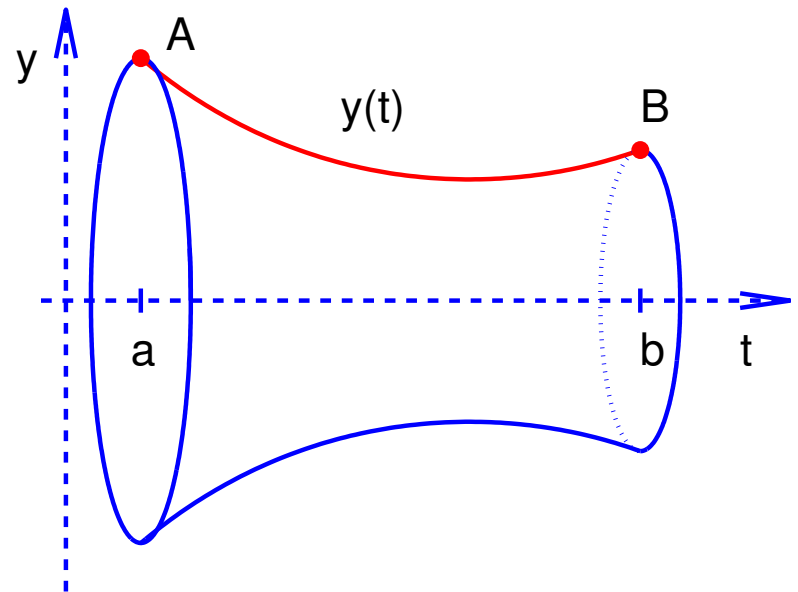
Beispiel (10.39) Minimalfläche

Gesucht ist eine zwei gegebene Punkte (a, y_a) und (b, y_b) verbindende Kurve y , so dass der durch Rotation um die t -Achse entstehende Körper eine minimale Mantelfläche besitzt.

Zu minimieren ist also

$$I(y) = \int_a^b y(t) \sqrt{1 + (y'(t))^2} dt$$

unter den Nebenbedingungen $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$.



Für die Hamilton-Funktion erhält man hier

$$H = f - y' f_{y'} = \frac{y}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_1 = \text{const.}$$

Die Lösung dieser DGL mittels Trennung der Variablen liefert

$$y_0(t) = C_1 \cdot \cosh \left(\frac{t}{C_1} + C_2 \right).$$

Die Lösung der Variationsaufgabe ist also eine **Kettenlinie**; vgl. auch das Beispiel (3.6). Die Parameter C_1 und C_2 werden durch die vorgegebenen Randbedingungen festgelegt.

Optimalsteuerungsproblem (10.40)

Zu minimieren ist das Funktional

$$I(x, u) = g(x(0), x(t_f)) + \int_0^{t_f} L(x(t), u(t)) dt$$

für $u \in C_p^0([0, t_f], \mathbb{R}^m)$ (stückw. stetig) und $x \in C_p^{0,1}([0, t_f], \mathbb{R}^n)$ (stetig und stückw. C^1) unter den Nebenbedingungen

$$x'(t) = f(x(t), u(t)), \quad \text{f.ü.}$$

$$u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m \quad (\text{abgeschlossen u. konvex})$$

$$r(x(0), x(t_f)) = 0 \in \mathbb{R}^k.$$

Notwendige Bedingungen (10.41)

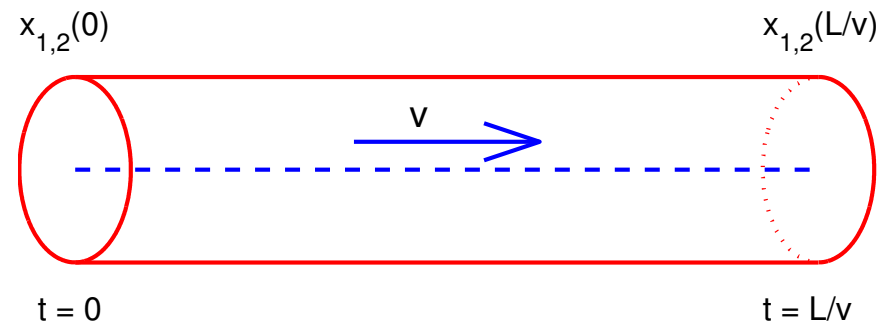
Unter gewissen Regularitätsbedingungen erfüllt eine Lösung (x^*, u^*) von (10.40) die folgenden notw. Bedingungen: Es existiert exist $\nu \in \mathbb{R}^k$ and $\lambda \in C_p^{0,1}([0, t_f], \mathbb{R}^n)$ so dass mit der

Hamilton-Funktion $H := L + \lambda^\top f$ gelten:

- **Kanonische Gleichungen:** $x' = H_\lambda = f, \quad \lambda' = -H_x,$
- **Minimum Prinzip:** $u^* = \operatorname{argmin} \{H(x, u, \lambda) : u \in U\},$
- **Natürliche Randbedingungen:**

$$\lambda(0) = -\frac{\partial}{\partial x(0)}(g + \nu^\top r), \quad \lambda(t_f) = \frac{\partial}{\partial x(t_f)}(g + \nu^\top r).$$

Beispiel (10.42): Chemische Reaktion in einem Rohrreaktor (L.T. Fan, 1966)



Minimiere $I(x_1, x_2, \theta) := -x_2(t_f)$ unter den Nebenbedingungen

$$x_1' = -k_1 x_1, \quad x_1(0) = x_{10}$$

$$x_2' = k_1 x_1 - k_2 x_2, \quad x_2(0) = x_{20}$$

$$k_j = k_{j0} \exp[-E_j/(R\theta)], \quad j = 1, 2$$

Notwendige Bedingungen:

Hamilton-Funktion: $H = -\lambda_1 k_1 x_1 + \lambda_2 (k_1 x_1 - k_2 x_2)$

Adjungierte DGL: $\lambda'_1 = (\lambda_1 - \lambda_2) k_1, \quad \lambda'_2 = \lambda_2 k_2$

Natürliche Randbed.: $\lambda_1(t_f) = 0, \quad \lambda_2(t_f) = -1.$

Optimale Steuerung: $H_\theta = 0 \Rightarrow$

$$\theta = \theta(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{E_1 - E_2}{R} \left[\ln \left(\frac{k_{10} E_1 x_1 (\lambda_2 - \lambda_1)}{k_{20} E_2 x_2 \lambda_2} \right) \right]^{-1}$$

Randwertaufgabe: Variable: $x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2$:

$$\begin{aligned}x_1' &= -k_1 x_1, & x_1(0) &= x_{10} \\x_2' &= k_1 x_1 - k_2 x_2, & x_2(0) &= x_{20} \\ \lambda_1' &= (\lambda_1 - \lambda_2) k_1, & \lambda_1(t_f) &= 0 \\ \lambda_2' &= \lambda_2 k_2, & \lambda_2(t_f) &= -1\end{aligned}$$

mit $k_j = k_j(\theta)$, $j = 1, 2$, and $\theta = \theta(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2)$.

Daten: $x_{10} = 0.53$, $x_{20} = 0.43$, $k_{10} = 0.892 \times 10^9$,
 $k_{20} = 0.768 \times 10^{16}$, $E_1 = 1.8 \times 10^4$, $E_2 = 3.0 \times 10^4$, $R = 2$,
 $t_f = 480$.

