6. Lineare DGL-Systeme erster Ordnung

A. Allgemeines.

Wir betrachten ein lineares DGL System erster Ordnung

$$\mathbf{y}'(t) \;=\; \mathbf{A}(t)\,\mathbf{y}(t) \;+\; \mathbf{b}(t) \tag{6.1}$$

und setzen voraus, dass die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}(t) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ sowie die Inhomogenität $\mathbf{b}(t) \in \mathbb{R}^n$ stetige Funktionen der Zeit $t \in \mathbb{R}$ sind.

Die zugehörige AWA mit Anfangswerten $(t_0, \mathbf{y}_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ hat dann stets eine eindeutig bestimmte Lösung $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$, die für alle $t \in \mathbb{R}$ erklärt ist, vgl. Bemerkung (4.13) b)!!

Aufgrund der Linearität hat man die folgenden Aussage über die **Struktur der allgemeinen Lösung** von (6.1). Der Begriff „allgemeine Lösung" bedeutet, dass *jede* C^1–Lösung der DGL die im folgenden angegebene Darstellung besitzt.

Satz 6.2

Die allgemeine Lösung der DGL (6.1) besitzt die Darstellung

$$\mathbf{y}(t) \;=\; \mathbf{y}_p(t) \;+\; \mathbf{y}_h(t)\,. \tag{6.3}$$

Dabei bezeichnet $\mathbf{y}_p$ eine spezielle (partikuläre) Lösung der inhomogenen Gleichung und $\mathbf{y}_h$ eine beliebige (allgemeine) Lösung der zugehörigen homogenen DGL $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\,\mathbf{y}$.

Beweis: Sind $\mathbf{y}_p$ und $\mathbf{y}_h$ wie oben gegeben, so ist $\mathbf{y}(t) := \mathbf{y}_p(t) + \mathbf{y}_h(t)$ offenbar eine Lösung der DGL (6.1).

Umgekehrt: Sind $\mathbf{y}$ und $\mathbf{y}_p$ Lösungen der inhomogenen DGL, so löst $\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_p(t)$ offensichtlich die homogene Gleichung. ∎

B. Die homogene DGL.

Die Lösungen der zu (6.1) gehörigen homogenen DGL

$$\mathbf{y}'(t) \;=\; \mathbf{A}(t)\,\mathbf{y}(t) \tag{6.4}$$

bilden einen reellen Vektorraum, genauer: sie bilden einen endlich dimensionalen Teilraum des Vektorraums $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$. Zur Aufstellung der allgemeinen Lösung genügt es daher, eine Basis des Lösungsraumes zu ermitteln.

Konstruktion einer Lösungsbasis (6.5):

a) Man wähle $t_0 \in \mathbb{R}$ sowie eine Basis $(\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n)$ des $\mathbb{R}^n$.

a) Man löse die folgenden n AWA (für $k = 1, \ldots, n$):

$$\frac{d}{dt}\,\mathbf{y}^k(t) \;=\; \mathbf{A}(t)\,\mathbf{y}^k(t), \qquad \mathbf{y}^k(t_0) \;=\; \mathbf{v}^k\,.$$

Die Lösungen $\mathbf{y}^k(t)$, $k = 1, \ldots, n$, werden zu einer Matrix

$$\mathbf{Y}(t) \ := \ (\mathbf{y}^1(t), \ldots, \mathbf{y}^n(t)) \ \in \ \mathbb{R}^{(n,n)} \tag{6.6}$$

zusammengefasst. Diese heißt eine **Fundamentalmatrix** oder ein **Fundamentalsystem** der DGL (6.1) bzw. (6.4).

Offenbar ist $\mathbf{Y}$ dann zugleich eine Lösung der Matrix–AWA:

$$\mathbf{Y}'(t) \ = \ \mathbf{A}(t)\,\mathbf{Y}(t), \qquad \mathbf{Y}(t_0) \ = \ (\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n)\,. \tag{6.7}$$

Der folgende Satz zeigt, dass $\mathbf{Y}$ tatsächlich eine Basis des Lösungsraums liefert.

Satz (6.8)

Es sei $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(t) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ eine beliebige Fundamentalmatrix, also eine Lösung von (6.7).

a) Die allgemeine Lösung der homogenen DGL lautet

$$\mathbf{y}_h(t) \;=\; \mathbf{Y}(t)\cdot\mathbf{c} \;=\; \sum_{k=1}^{n} c_k\,\mathbf{y}^k(t), \qquad \mathbf{c}\in\mathbb{R}^n\,.$$

b) Die Fundamentalmatrix $\mathbf{Y}(t)$ ist für alle $t\in\mathbb{R}$ regulär.

Die Funktion $w(t) :=$ det$(\mathbf{Y}(t))$ heißt **Wronski–Determinante** von $\mathbf{Y}$, benannt nach Josef–Maria Hoene–Wronski (1778–1853).

Satz (6.9)

Die Wronski–Determinante genügt der (skalaren) DGL

$$w'(t) \;=\; \text{Spur}\,(\mathbf{A}(t))\cdot w(t) \tag{6.10}$$

und hat damit die folgende Lösungsdarstellung

$$w(t) \;=\; w(t_0)\; \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} \mathrm{Spur}\,(\mathbf{A}(\tau))\,\mathrm{d}\tau\right) . \tag{6.11}$$

Bemerkung: Die Relation (6.11) bestätigt, dass jede Lösung $\mathbf{Y}(t)$ des linearen DGL-Systems (6.7) für alle t regulär ist, falls dies für den Anfangspunkt t_0 gilt.

Beispiel: Gegeben sei das lineare DGL-Systems

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Wählt man die kanonische Basis $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ des $\mathbb{R}^2$, so ergeben sich die folgenden Lösungen für die beiden AWA:

$$(\mathbf{y}^1)' = \mathbf{A}\mathbf{y}^1,\;\; \mathbf{y}^1(0) = \mathbf{e}_1 : \qquad \mathbf{y}^1(t) \;=\; \mathrm{e}^t \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{y}^2)' = \mathbf{A}\mathbf{y}^2,\ \mathbf{y}^2(0) = \mathbf{e}_2 : \qquad \mathbf{y}^2(t) \ = \ \mathrm{e}^t \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

Man überprüfe dies durch Einsetzen in die DGL!

Damit erhalten wir die folgende Fundamentalmatrix des DGL-Systems

$$\mathbf{Y}(t) \ = \ \mathrm{e}^t \cdot \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Für die Wronski-Determinante ergibt sich demnach $w(t) = \mathrm{e}^{2\,t}$. Dies hätte man auch direkt durch Lösen der skalaren DGL

$$w'(t) \ = \ \mathrm{Spur}\,(\mathbf{A}) \cdot w(t) \ = \ 2 \cdot w(t), \quad w(0) = 1$$

erhalten.

Das Reduktionsverfahren.

Wir beschreiben das Verfahren für ebene Systeme, d.h. $n = 2$, und nehmen an, dass $\mathbf{y}$ eine Lösung mit $y_2 \neq 0$ ist. Um eine von $\mathbf{y}$ linear unabhängige Lösung $\widetilde{\mathbf{y}}$ zu bestimmen, verwenden wir den *Ansatz*

$$\widetilde{\mathbf{y}}(t) \quad = \quad w(t)\,\mathbf{y}(t) + \begin{pmatrix} z(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w(t) \in \mathbb{R}^1 . \tag{6.12}$$

Damit ergibt sich

$$\widetilde{\mathbf{y}}' = w'\,\mathbf{y} + w\,\mathbf{y}' + \begin{pmatrix} z' \\ 0 \end{pmatrix} = w'\,\mathbf{y} + w\,\mathbf{A}\,\mathbf{y} + \begin{pmatrix} z' \\ 0 \end{pmatrix},$$

also:

$$\widetilde{\mathbf{y}}' = \mathbf{A}\,\widetilde{\mathbf{y}} \iff \begin{pmatrix} z' \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix} - w'\,\mathbf{y}$$

$$\iff \quad \begin{aligned} z' &= a_{11}\,z - w'\,y_1\,, \\ 0 &= a_{21}\,z - w'\,y_2\,. \end{aligned}$$

Löst man die zweite Gleichung nach w' auf:

$$w'(t) = (a_{21}(t)/y_2(t))\; z(t) \tag{6.13}$$

und setzt dies in die erste Gleichung ein, so erhält man die skalare homogene DGL

$$z'(t) = b(t)\, z(t), \quad b := a_{11} - a_{21}\, y_1/y_2\,, \tag{6.14}$$

die sich z.B. mit Variablentrennung lösen lässt.

Beispiel (6.15)

Eine Lösung des linearen DGL-Systems

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

lautet $\mathbf{y}(t) = (t, 1)^{\mathsf{T}}$. Die Voraussetzung $y_2 \neq 0$ ist erfüllt.

Gleichung (6.14) liefert nun:

$$b \;=\; a_{11} - a_{21}\,\frac{y_1}{y_2} \;=\; t, \quad z' \;=\; t\,z\,.$$

Eine Lösung dieser DGL ist $z = \mathrm{e}^{t^2/2}$. Damit ergibt sich mittels der Gleichungen (6.13) und (6.12)

$$\begin{aligned} w(t) \;&=\; \int_0^t a_{21}\,\frac{z}{y_2}\,d\tau \quad = \quad -\int_0^t \mathrm{e}^{\tau^2/2}\,d\tau \\ \tilde{\mathbf{y}}(t) \;&=\; -\int_0^t \mathrm{e}^{\tau^2/2}\,d\tau \cdot \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t^2/2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &=\; \left(\mathrm{e}^{t^2/2} - t\int_0^t \mathrm{e}^{\tau^2/2}\,d\tau,\; -\int_0^t \mathrm{e}^{\tau^2/2}\,d\tau\right)^{\mathsf{T}}. \end{aligned}$$

$\tilde{\mathbf{y}}$ ist eine von $\mathbf{y}$ linear unabhängige Lösung und $\mathbf{Y} := (\mathbf{y}, \tilde{\mathbf{y}}) \in \mathbb{R}^{(2,2)}$ bildet ein Fundamentalsystem der gegebenen DGL.

C. Die inhomogene DGL.

Es sei $\mathbf{Y}(t)$ ein Fundamentalsystem des zugehörigen homogenen DGL-Systems, also $\mathbf{y}_h(t) \;=\; \mathbf{Y}(t)\,\mathbf{c}, \quad \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.

Zur Lösung des inhomogenen DGL-Systems verwenden wir, wie im Fall einer Einzelgleichung **Variation der Konstanten**, also

$$\mathbf{y}(t) \quad := \quad \mathbf{Y}(t)\,\mathbf{c}(t)\,. \tag{6.16}$$

Differentiation ergibt

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}'(t) &= \mathbf{Y}'(t)\,\mathbf{c}(t) \,+\, \mathbf{Y}(t)\,\mathbf{c}'(t) \\
&= \mathbf{A}(t)\,\mathbf{Y}(t)\,\mathbf{c}(t) \,+\, \mathbf{Y}(t)\,\mathbf{c}'(t) \\
&= \mathbf{A}(t)\,\mathbf{y}(t) \,+\, \mathbf{Y}(t)\,\mathbf{c}'(t)\,.
\end{aligned}$$

Die Funktion $\mathbf{y}$ löst daher genau dann die inhomogene DGL (6.1), falls gilt:

$$\mathbf{Y}(t)\,\mathbf{c}'(t) \;=\; \mathbf{b}(t), \quad \text{oder} \quad \mathbf{c}(t) \;=\; \mathbf{c}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \mathbf{Y}(\tau)^{-1}\,\mathbf{b}(\tau)\,d\tau\,.$$

Insgesamt haben wir damit gezeigt:

Satz (6.17)

Vorgegeben sei die inhomogene DGL (6.1). $\mathbf{Y}(t)$ *bezeichne ein beliebiges Fundamentalsystem.*

a) *Die allgemeine Lösung der DGL ist dann gegeben durch*

$$\mathbf{y}(t) \;=\; \mathbf{Y}(t)\left[\mathbf{c}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \mathbf{Y}(\tau)^{-1}\,\mathbf{b}(\tau)\,d\tau\right], \quad \mathbf{c}_0 \in \mathbb{R}^n\,.$$

b) *Für* $\mathbf{c}_0 := \mathbf{Y}(t_0)^{-1}\,\mathbf{y}_0$ *erfüllt* $\mathbf{y}$ *die Anfangsbedingung* $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$.

Beispiel (6.18)

Gesucht ist die allgemeine Lösung des linearen DGL-Systems

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2+t \\ 2\,t \end{pmatrix}.$$

Eine Fundamentalmatrix der zugehörigen homogenen DGL ist gegeben durch

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3\,t} & \mathrm{e}^{t} \\ \mathrm{e}^{3\,t} & -\mathrm{e}^{t} \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen DGL lautet also $\mathbf{y}_h(t) = \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{c}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$. Zur Berechnung einer partikulären Lösung verwendet man Variation der Konstanten, also $\mathbf{y}_p(t) := \mathbf{Y}(t)\,\mathbf{c}(t)$. Nach obiger Umformung (pp. 94/95) hat man dazu das folgende lineare Gleichungssystem zu lösen:

$$\mathbf{Y}(t)\,\mathbf{c}'(t) \;=\; \mathbf{b}(t) \iff \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3\,t} & \mathrm{e}^{t} \\ \mathrm{e}^{3\,t} & -\mathrm{e}^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} \;=\; -\begin{pmatrix} 2+t \\ 2\,t \end{pmatrix}.$$

Gauß Elimination ergibt

$$\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -(1+3\,t/2)\,\mathrm{e}^{-3\,t} \\ (t/2-1)\,\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}.$$

Hieraus erhält man durch Integration (ein Lösung genügt!)

$$\begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} (t+1)\,\mathrm{e}^{-3\,t}/2 \\ (-t+1)\,\mathrm{e}^{-t}/2 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\mathbf{y}_p(t) \;=\; \mathbf{Y}(t)\,\mathbf{c}(t) \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung lautet: $\mathbf{y}(t) \;=\; \mathbf{y}_p(t) \;+\; \mathbf{Y}(t)\,\mathbf{c},\;\; \mathbf{c} \in \mathbb{R}^2.$

D. Systeme mit konstanten Koeffizienten.

Wir betrachten ein lineares, homogenes DGL-System mit konstanter Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}\ \mathbf{y}(t), \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(n,n)}. \tag{6.19}$$

Zur Bestimmung einer Fundamentalmatrix verwenden wir analog zum eindimensionalen Fall den **Ansatz**

$$\mathbf{y}(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\,\mathbf{v}, \quad \lambda \in \mathbb{R}/\mathbb{C}, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n/\mathbb{C}^n. \tag{6.20}$$

Setzt man diesen Ansatz in die DGL ein, so folgt

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}\ \mathbf{y}(t) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}\,\mathbf{v} = \lambda\,\mathbf{v},$$

d.h., $\mathbf{y}(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\,\mathbf{v}$ ist genau dann eine nichttriviale Lösung der DGL, falls λ ein Eigenwert (EW) von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{v}$ ein zugehöriger Eigenvektor (EV) ist.

Fall 1: EWe von $\mathbf{A}$ reell, $\exists$ reelle Basis aus EVen.

Die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von $\mathbf{A}$ seien reell (nicht notwendig einfach!), und es gebe eine Basis aus (reellen) Eigenvektoren $(\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n)$. In diesem Fall ist

$$\mathbf{Y}(t) \;=\; \left(\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\,\mathbf{v}^1, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_n t}\,\mathbf{v}^n\right) \tag{6.21}$$

eine (reelle) Fundamentalmatrix der DGL (6.19) und die allgemeine Lösung lautet

$$\mathbf{y}_h(t) \;=\; \sum_{k=1}^{n} C_k\,\mathrm{e}^{\lambda_k t}\,\mathbf{v}^k, \qquad C_k \in \mathbb{R}. \tag{6.22}$$

Fall 2: $\mathbf{A}$ diagonalisierbar.

Die Matrix $\mathbf{A}$ sei diagonalisierbar, d.h., es gibt eine Basis des $\mathbb{C}^n$ aus Eigenvektoren $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n$. Die zugehörigen Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ müssen dabei weder einfach noch reell sein.

Diese Voraussetzung ist für alle **normalen Matrizen** $\mathbf{A}$ (d.h. $\mathbf{A}^\top\mathbf{A} = \mathbf{A}\,\mathbf{A}^\top$) erfüllt, insbesondere also auch für alle **symmetrischen Matrizen**!

Wie im ersten Fall (allerdings mit Rechnung in $\mathbb{C}$ statt in $\mathbb{R}$) lautet die allgemeine Lösung der DGL (6.19)

$$\mathbf{y}_h(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k\, \mathrm{e}^{\lambda_k t}\, \mathbf{v}^k, \qquad C_k \in \mathbb{C}. \tag{6.23}$$

Reelles Fundamentalsystem:

Mit jedem echt komplexen EW $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ist auch stets der konjugiert komplexe Wert $\overline{\lambda}$ ein EW der reellen Matrix $\mathbf{A}$. Ferner: Ist $\mathbf{v}$ ein EV zum EW λ, so ist $\overline{\mathbf{v}}$ ein EV zum Eigenwert $\overline{\lambda}$.
Nichtreelle EWe und EVen treten also stets paarweise auf und man erhält die zugehörigen reellen Lösungen gemäß

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^1(t) &= \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\lambda t}\,\mathbf{v}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\lambda t}\,\mathbf{v} + \mathrm{e}^{\overline{\lambda} t}\,\overline{\mathbf{v}}\right) \\ \mathbf{y}^2(t) &= \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\lambda t}\,\mathbf{v}\right) = \frac{1}{2i}\left(\mathrm{e}^{\lambda t}\,\mathbf{v} - \mathrm{e}^{\overline{\lambda} t}\,\overline{\mathbf{v}}\right) . \end{aligned} \tag{6.24}$$

Beispiel (6.25)

Für das DGL-System

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

erhält man die folgenden EWe und EVen:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 + 2i\,, & \mathbf{v}^1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix} , \\ \lambda_2 &= 1 - 2i\,, & \mathbf{v}^2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Ein komplexes Fundamentalsystem ist daher gegeben durch:

$$\mathbf{z}^1(t) \;=\; \mathrm{e}^{(1+2i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z}^2(t) \;=\; \mathrm{e}^{(1-2i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}.$$

Die Umrechnung in ein reelles Fundamentalsystem liefert:

$$\mathbf{y}^1(t) \;=\; \mathrm{e}^{t} \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ 2\sin(2t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}^2(t) \;=\; \mathrm{e}^{t} \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ -2\cos(2t) \end{pmatrix}.$$

Damit lautet die allgemeine (reelle) Lösung:

$$\mathbf{y}_h(t) \;=\; \mathrm{e}^{t} \begin{pmatrix} C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t) \\ 2C_1\sin(2t) - 2C_2\cos(2t) \end{pmatrix}, \quad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Fall 3: A nicht diagonalisierbar.

Es gebe also keine Basis aus EVen der Matrix A (weder in $\mathbb{R}$ noch in $\mathbb{C}$).

In diesem Fall muss man die **Jordansche Normalform** $\mathbf{J}$ der Matrix $\mathbf{A}$ ermitteln, einschließlich einer zugehörigen Transformationsmatrix $\mathbf{S}$, die $\mathbf{A}$ auf die Jordansche Normalform transformiert. Wir stellen die wesentlichen Relationen zusammen:

$$\begin{aligned}
\mathbf{J} &= \mathbf{S}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{S} \\
\mathbf{J} &= \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathbf{J}_m \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{J}_j \in \mathbb{C}^{(r_j,r_j)} \text{ Jordan–Kästchen} \\
\mathbf{S} &= \left(\mathbf{v}^{11},\ldots,\mathbf{v}^{1r_1}\,|\,\mathbf{v}^{21},\ldots,\mathbf{v}^{2r_2}|\ \ldots\ |\,\mathbf{v}^{m1},\ldots,\mathbf{v}^{mr_m}\right) \\
\mathbf{v}^{j1} &: \ \text{EV zum EW } \lambda_j\,,\ j=1,\ldots,m \\
\mathbf{v}^{jk} &: \ \text{Hauptvektor der Stufe } (k-1), \quad k=2,\ldots,r_j \\
(\mathbf{A}-\lambda_j\,\mathbf{I}_n)\,\mathbf{v}^{j,k} &= \mathbf{v}^{j,k-1},\ k=2,\ldots,r_j \text{ (Kettenbedingung).}
\end{aligned} \tag{6.26}$$

Setzt man $\mathbf{z}(t) := \mathbf{S}^{-1}\,\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n$, so folgt für $\mathbf{z}$ die DGL:

$$\mathbf{z}'(t) \;=\; \mathbf{S}^{-1}\,\mathbf{y}'(t) \;=\; \mathbf{S}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{y}(t) \;=\; \mathbf{S}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{S}\,\mathbf{z}(t),$$

also $\quad \mathbf{z}'(t) \;=\; \mathbf{J}\,\mathbf{z}(t)$.

Kennt man ein Fundamentalsystem $\mathbf{Z}$ der transformierten DGL $\mathbf{z}' = \mathbf{J}\,\mathbf{z}$, so erhält man ein Fundamentalsystem für die vorgegebene DGL durch die Rücktransformation $\mathbf{Y}(t) = \mathbf{S}\,\mathbf{Z}(t)$.

Das DGL-Ssystem $\mathbf{z}' = \mathbf{J}\,\mathbf{z}$ zerfällt aber nun in die einzelnen Jordan–Blöcke. Es genügt daher, die zu einem allgemeinen Jordan–Kästchen (etwa dem ersten) gehörige DGL zu betrachten:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & 0 \\ & \lambda_1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_r \end{pmatrix} . \tag{6.27}$$

(6.26) ist ein *gestaffeltes System linearer, inhomogener DGL*, die - beginnend bei der letzten Gleichung für z_r - rekursiv für $k = r, \ldots, 1$ mittels Variation der Konstanten gelöst werden können.

Man erhält auf diese Weise das folgende Fundamentalsystem (in $\mathbb{C}^r$) für (6.27). Hierbei sind nur die zu diesem Jordan–Kästchen gehörenden Koordinaten $z_1, \ldots, z_r$ angegeben (die anderen Koordinaten sind jeweils Null zu setzen):

$$\mathrm{e}^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} t/1! \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} t^2/2! \\ t/1! \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \; \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} t^{r-1}/(r-1)! \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ t/1! \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{6.28}$$

Ist nun $(\mathbf{v}^{11}, \ldots, \mathbf{v}^{1r})$ ein zugehöriges System aus EV v^{11} und HVen $\mathbf{v}^{12}$, ..., $\mathbf{v}^{1r}$ in $\mathbb{C}^n$, so liefert die Rücktransformation den zum Jordan-Kästchen zugehörigen Anteil für das Fundamentalsystem von $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\,\mathbf{y}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}^{11}(t) &= \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\,\mathbf{v}^{11} \\
\mathbf{y}^{12}(t) &= \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\left[\frac{t}{1!}\,\mathbf{v}^{11} + \mathbf{v}^{12}\right] \\
&\vdots \\
\mathbf{y}^{1r}(t) &= \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\left[\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\,\mathbf{v}^{11} + \ldots + \frac{t}{1!}\,\mathbf{v}^{1,r-1} + \mathbf{v}^{1r}\right].
\end{aligned} \tag{6.29}$$

Behandelt man nun alle Jordan–Kästchen auf diese Weise, so erhält man insgesamt ein Fundamentalsystem für die DGL (6.19).

Beispiel (6.30)

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Für das charakteristische Polynom der Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ ergibt sich: $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}_3) = (1-\lambda)^3$, $\lambda = 1$ ist also dreifacher Eigenwert.

Eigenvektoren:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der zu $\lambda = 1$ gehörige Eigenraum ist eindimensional, die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts also $g_{\mathbf{A}}(\lambda) = 1$.

Hauptvektoren:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 1 & 16 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 16 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 4 & 2 & 8 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \mathbf{v}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Damit erhält man das folgende *Fundamentalsystem*:

$$\mathbf{y}^1(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{y}^2(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 16t \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}, \mathbf{y}^3(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 8t^2 \\ -4t+1 \\ 8t+2 \end{pmatrix},$$

und die *allgemeine Lösung* lautet:

$$\mathbf{y}_h(t) = C_1\,\mathbf{y}^1(t) + C_2\,\mathbf{y}^2(t) + C_3\,\mathbf{y}^3(t), \quad C_k \in \mathbb{R}\,.$$

Beispiel (6.30)

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Wieder ist $\lambda = 1$ dreifacher Eigenwert der Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$, allerdings mit der geometrischen Vielfachheit $g_{\mathbf{A}}(\lambda) = 2$.

Eigenvektoren:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hauptvektor:

Es gilt: $(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}_3)^2 = 0$. Gesucht ist daher ein von $\mathbf{v}^1$, $\mathbf{v}^2$ linear unabhängiger Vektor $\mathbf{v}^{22}$. Wählt man etwa $\mathbf{v}^{22} = (0, 0, 1)^\mathsf{T}$, so folgt mit der Kettenbedingung

$$\mathbf{v}^{21} \;=\; (\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}_3)\,\mathbf{v}^{22} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Man hat damit das folgende System von Eigen– bzw. Hauptvektoren

$$\mathbf{v}^{11} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \;\; \mathbf{v}^{21} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \;\; \mathbf{v}^{22} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Hiermit bestätigt man: $\mathbf{S}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{S} \;=\; \mathbf{J}$ mit

$$\mathbf{S} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{J} \;=\; \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) .$$

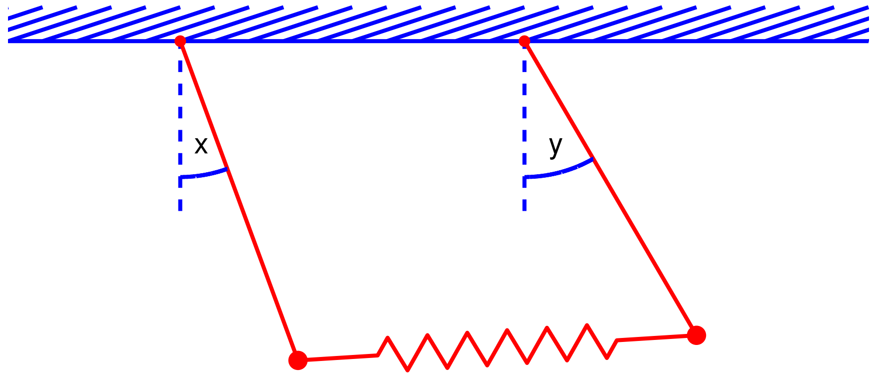
Ein Fundamentalsystem der DGL lautet somit:

$$\mathbf{y}^1(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}^2(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}^3(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} t \\ t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Beispiel (6.31)

Wir betrachtet zwei ungedämpft gekoppelte Pendel. Sind x, y die Ausschläge der Pendel aus der Ruhelage (Winkel), so gelten unter vereinfachten Annahmen die folgenden DGL:

$$\begin{aligned} m\, x''(t) &= -\frac{mg}{\ell} x(t) - k(x(t) - y(t)) \\ m\, y''(t) &= -\frac{mg}{\ell} y(t) - k(y(t) - x(t)) . \end{aligned}$$



Gekoppelte Pendel

Mit der üblichen Transformation $p := x',\ q := y'$ erhält man das folgende homogene DGL-System erster Ordnung:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -(\omega_0^2 + k_0) & k_0 & 0 & 0 \\ k_0 & -(\omega_0^2 + k_0) & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ p \\ q \end{pmatrix}$$

Dabei ist $\omega_0 := \sqrt{g/\ell}\,,\ \ k_0 := k/m.$

Eigenvektoren:

$$\lambda_{1,2} \;=\; \pm\, i\,\omega_0, \qquad \lambda_{3,4} \;=\; \pm\, i\,\sqrt{\omega_0^2 + 2k_0}$$

Eigenvektoren:

$$\mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i\,\omega_0 \\ i\,\omega_0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -i\,\omega_0 \\ -i\,\omega_0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ i\,\omega_0 \\ -i\,\omega_0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -i\,\omega_0 \\ i\,\omega_0 \end{pmatrix}$$

mit $\quad \omega := \sqrt{\omega_0^2 + 2k_0}.$

Hieraus erhält man nun das folgende reelle Fundamentalsystem:

$$\mathbf{y}^1(t) \;=\; \mathrm{Re}\;\left(\mathrm{e}^{i\,\omega_0\,t}\,\mathbf{v}^1\right) \;=\; \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) \\ \cos(\omega_0 t) \\ -\omega_0 \sin(\omega_0 t) \\ -\omega_0 \sin(\omega_0 t) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}^2(t) \;=\; \mathrm{Im}\;\left(\mathrm{e}^{i\,\omega_0\,t}\,\mathbf{v}^1\right) \;=\; \begin{pmatrix} \sin(\omega_0\, t) \\ \sin(\omega_0\, t) \\ \omega_0 \cos(\omega_0\, t) \\ \omega_0 \cos(\omega_0\, t) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}^3(t) \;=\; \mathrm{Re}\;\left(\mathrm{e}^{i\,\omega\,t}\,\mathbf{v}^3\right) \;=\; \begin{pmatrix} \cos(\omega\, t) \\ -\cos(\omega\, t) \\ -\omega \sin(\omega\, t) \\ \omega \sin(\omega\, t) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}^4(t) \;=\; \mathrm{Im}\;\left(\mathrm{e}^{i\,\omega\,t}\,\mathbf{v}^3\right) \;=\; \begin{pmatrix} \sin(\omega\,t) \\ -\sin(\omega\,t) \\ \omega\cos(\omega\,t) \\ -\omega\cos(\omega\,t) \end{pmatrix}.$$

Die ersten beiden Fundamentallösungen beschreiben parallele Schwingungszustände der Pendel, die letzten beiden Lösungen beschreiben genau entgegengesetzt schwingende Pendel.