

3. Konvergenz

3.1 Folgen $(V, \|\cdot\|)$ sei normierter Vektorraum über \mathbb{R}/\mathbb{C}

Folge: $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} : \mathbb{N} \rightarrow V, k \mapsto a_k$; manchmal auch $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$

Beispiele (3.1.1)

- $a_k := \sqrt{k+4} - \sqrt{k+2}$ (reelle Folge)
- $a_k := \frac{1}{6k+i}$ (komplexe Folge)
- $\mathbf{a}_k := \left(\frac{k^2+1}{3k^2-1}, \cos(k\pi), \left(\frac{1}{2}\right)^k\right)^\top$ (Folge im \mathbb{R}^3)
- $f_k(t) := t^k, 0 \leq t \leq 1$, (Funktionsfolge in $C[0,1]$)

$V^{\mathbb{N}}$: **Menge aller Folgen in V** , $V^{\mathbb{N}}$ ist ein Vektorraum bzgl.

$$(a_k) + (b_k) := (a_k + b_k), \quad \alpha \cdot (a_k) := (\alpha \cdot a_k)$$

- **Rekursive Definition von Folgen (3.1.2)**

$$a_0 \text{ gegeben, } a_{k+1} := \Phi(k, a_k), k \in \mathbb{N}_0$$

Beispiel (3.1.3) Bisektion

Gesucht: Nullstelle von $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (stetig) mit $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Algorithmus (3.1.4):

```
(u0, v0) := (a, b), k := 0,  
while [|vk - uk| > (1 + |uk|) · eps] :  
  x := (uk + vk)/2;  
  Falls (f(x) · f(vk) < 0) : uk+1 := x; vk+1 := vk;  
  Falls (f(x) = 0) : uk+1 := vk+1 := x,  
  Sonst : uk+1 := uk; vk+1 := x;  
  k := k + 1;  
end while
```

Für $f(t) := t^2 - 2$, $a = 1$, $b = 2$ erhält man die Tabelle:

k	u_k	v_k
0	1.0000 00000	2.0000 00000
1	1.0000 00000	1.5000 00000
2	1.2500 00000	1.5000 00000
3	1.3750 00000	1.5000 00000
⋮	⋮	⋮
10	1.4140 62500	1.4150 39063
20	1.4142 13181	1.4142 14134
30	1.4142 13562	1.4142 13562
⋮	⋮	⋮

- Die Konvergenz ist relativ langsam!

Beispiele (3.1.5) Newton-Verfahren

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, t_0 Näherung für Nullstelle

t_{k+1} : Nullstelle der Tangente an f in $(t_k, f(t_k))$

$$t_{k+1} := t_k - \frac{f(t_k)}{f'(t_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Für das Beispiel: $f(t) = t^2 - 2$ und $t_0 = 1$ erhält man:

k	t_k
0	1.0000 00000
1	1.5000 00000
2	1.4166 66667
3	1.4142 15686
4	1.4142 13562
\vdots	\vdots

- Schnelle Konvergenz!

Isaac Newton:

Sir Isaac Newton wurde am 25.12.1642 in Woolsthorpe geboren und starb am 20.3.1727 in Kensington. Er war ein bedeutender Naturforscher mit überragenden Resultaten im Bereich der Physik (Gravitationsgesetz) und der Mathematik (Begründer der Differential- und Integralrechnung, neben Leibniz). Ab 1660 studierte Newton am Trinity College (Cambridge) und wurde dort 1669 Professor. 1672 wurde Newton Mitglied der Royal Society und 1703 wurde er zu deren Präsident gewählt.

Definition (3.1.6) Es sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in V .

a) Für $1 \leq k_1 < k_2 < k_3 < \dots$ heißt $(a_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ eine **Teilfolge** von $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

b) (a_k) **beschränkt** $:\Leftrightarrow \exists C > 0 : \forall k \in \mathbb{N} : \|a_k\| \leq C$.

c) (a_k) **konvergent** mit **Grenzwert (Limes)** $a \in V$ $:\Leftrightarrow$
 $\forall \varepsilon > 0 : \exists K = K(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall k \geq K : \|a_k - a\| < \varepsilon$.

Eine nicht-konvergente Folge heißt **divergent**.

d) (a_k) **Cauchy-Folge** $:\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 : \exists K = K(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall k, \ell \geq K : \|a_k - a_\ell\| < \varepsilon$.

Augustin Louis Cauchy:

Augustin Louis Cauchy wurde am 21.8.1789 in Paris geboren und starb am 23.5.1857 in Sceaux (bei Paris). Seine zahlreichen Veröffentlichungen enthielten wichtige Ergebnisse u.a. zur der Entwicklung der Gruppentheorie und der Analysis, insbesondere auch der Funktionentheorie. Cauchy studierte ab 1805 an der École Polytechnique. 1815 wurde er dort Professor. Nach der Revolution 1830 emigrierte Cauchy zunächst in Schweiz, dann nach Prag und kehrte erst 1838 nach Paris zurück.

Beispiele (3.1.7)

- a) $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots)$ ist eine Teilfolge von $(\frac{1}{k})_{k \in \mathbb{N}}$,
 $(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \dots)$ ist *keine* Teilfolge von $(\frac{1}{k})_{k \in \mathbb{N}}$.
- b) $a_k := \frac{1}{2 + \sin k}$, $k \in \mathbb{N}$, ist beschränkt mit $\frac{1}{3} \leq a_k \leq 1$,
 (a_k) ist aber *nicht* konvergent!
- c) $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$, denn: Zu $\varepsilon > 0$ existiert nach (2.2.10) ein
 $K \in \mathbb{N}$ mit $0 < \frac{1}{K} < \varepsilon$. $\Rightarrow \forall k \geq K: 0 < \frac{1}{k} \leq \frac{1}{K} < \varepsilon$.

Satz (3.1.8)

- a) (a_n) konvergent $\Rightarrow (a_n)$ beschränkt.
b) (a_n) konvergent $\Rightarrow (a_n)$ Cauchy-Folge.
c) Grenzwerte von konv. Folgen sind eindeutig bestimmt.

Bezeichnung: $a = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k$ oder $a_k \rightarrow a$ ($k \rightarrow \infty$).

Uneigentliche Konvergenz (3.1.9)

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \infty & \quad :\Leftrightarrow \quad \forall C > 0 : \exists K \in \mathbb{N} : \forall k \geq K : a_k > C, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = -\infty & \quad :\Leftrightarrow \quad \forall C > 0 : \exists K \in \mathbb{N} : \forall k \geq K : a_k < -C. \end{aligned}$$

Definition (3.1.10) Ein normierter Raum, in dem jede Cauchy-Folge konvergiert heißt **Banach-Raum**.

Grenzwertsätze I (3.1.11)

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{k \rightarrow \infty} (a_k + b_k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} a_k + \lim_{k \rightarrow \infty} b_k \\ \text{b) } \lim_{k \rightarrow \infty} (\alpha a_k) &= \alpha \lim_{k \rightarrow \infty} a_k. \end{aligned}$$

Stefan Banach:

Stefan Banach wurde am 30.3.1892 in Kraków geboren und ist gestorben am 31.8.1945 in Lwów (Lemberg). Banach hat ab 1911 an der Polytechnischen Universität in Lwów studiert und wurde dort 1922 Professor. Banach hat wesentliche Ergebnisse in den Bereichen Fourier-Reihen, orthogonale Funktionen, Maxwell-Gleichungen und Maßtheorie erzielt. Grundlegend sind seine Beiträge zur Funktionalanalysis (Banach-Räume, Satz von Hahn-Banach, Banachscher Fixpunktsatz).

Beispiel (3.1.12) $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2k + 7}{3k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} + \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{n} \right) = \frac{2}{3}.$

Definition (3.1.13) (Konvergenzgeschwindigkeit)

a) $a_k \rightarrow a$ **linear konvergent** $:\Leftrightarrow$

$$\exists C < 1 : \quad \forall k : \quad \|a_{k+1} - a\| \leq C \|a_k - a\|$$

b) $a_k \rightarrow a$ **superlinear konvergent** $:\Leftrightarrow$

$$\exists C_k > 0 : \quad C_k \rightarrow 0, \quad \forall k : \quad \|a_{k+1} - a\| \leq C_k \|a_k - a\|$$

c) $a_k \rightarrow a$ **quadratisch konvergent** $:\Leftrightarrow$

$$\exists C > 0 : \quad \forall k : \quad \|a_{k+1} - a\| \leq C \|a_k - a\|^2$$

Beispiel: Die Folgen (u_k) , (v_k) des Bisektionsverfahrens sind im Allg. nur linear konvergent, während das Newton-Verfahren quadratisch konvergiert!

3.2 Reelle Folgen $(a_k) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Definition (3.2.1)

- a) (a_k) **monoton wachsend** $:\Leftrightarrow \forall k < \ell : a_k \leq a_\ell$
b) (a_k) **streng monoton wachsend** $:\Leftrightarrow \forall k < \ell : a_k < a_\ell$
c) (a_k) **nach oben beschränkt** $:\Leftrightarrow \exists C : \forall k : a_k \leq C$

Satz (3.2.2)

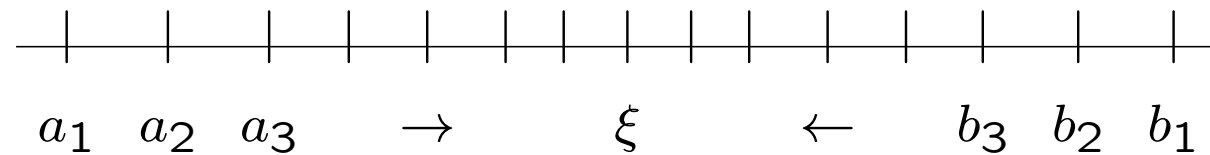
(a_k) monoton wachsend und nach oben beschränkt \Rightarrow
 (a_k) konvergent und $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \sup\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$

Folgerung (3.2.3) (Intervallschachtelung)

Sind $(a_k), (b_k)$ reelle Folgen mit

- (a_k) monoton wachsend, • (b_k) monoton fallend und
- $\forall k \in \mathbb{N} : a_k \leq b_k$, so sind (a_k) und (b_k) konvergent!

Gilt zudem • $b_k - a_k \rightarrow 0, (k \rightarrow \infty)$, so stimmen die Grenzwerte überein: $\xi = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k$.



Fehlerabschätzung (3.2.4): $|a_k - \xi|, |b_k - \xi| \leq |b_n - a_n|$.

Beispiel (3.2.5): Konvergenz des Bisektionsverfahren!

Bernoullische Ungleichung (3.2.6)

$$\forall x \geq -1, k \in \mathbb{N} : (1 + x)^k \geq 1 + kx.$$

Jakob und Johann Bernoulli:

Jakob und Johann sind die herausragenden Vertreter einer Baseler Mathematiker-Dynastie. Jakob lebte vom 27.12.1654 bis 17.8.1705, sein jüngerer Bruder Johann von 27.7.1667 bis 1.1.1748. Jakob wurde 1687 Professor an der Universität Basel. Johann wurde 1695 zunächst Professor in Groningen und folgte dann Jakob nach dessen Tod auf dem Lehrstuhl in Basel nach. Beide Brüder befassten sich in ihren Arbeiten mit den Grundlagen der Analysis, der Wahrscheinlichkeitstheorie (Gesetz der großen Zahlen) und vor allem der Variationsrechnung (Problem der Brachstochrone).

Geometrische Folge (3.2.7)

$$q > 1: \quad q^k = (1 + (q - 1))^k \geq 1 + k(q - 1) \rightarrow \infty \quad (k \rightarrow \infty).$$

$$q = 1: \quad q^k \rightarrow 1 \quad (k \rightarrow \infty).$$

$$0 < q < 1: \quad 0 < q^k = \frac{1}{(1 + (1/q - 1))^k} \leq \frac{1}{1 + k(1/q - 1)} \rightarrow 0.$$

$$-1 < q \leq 0: \quad |q^k| = |q|^k \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

$$q = -1: \quad (q^k) \text{ beschränkt, nicht konvergent}$$

$$q < -1: \quad (q^k) \text{ alternierend, kein uneigentlicher Grenzwert!}$$

Arithmetisch-geometrisches Mittel (3.2.8)

$$a_0 := a, \quad b_0 := b, \quad \text{mit } 0 < a < b$$

für $k = 0, 1, 2, \dots$

$$a_{k+1} := \sqrt{a_k b_k}, \quad b_{k+1} := 0.5 \cdot (a_k + b_k),$$

end k

$\Rightarrow (a_k), (b_k)$ bilden eine Intervallschachtelung;
 Konvergenz gegen einen gemeinsamen Grenzwert $\xi =: \text{agm}(a, b)$,
 das **arithmetisch–geometrische Mittel** von a und b .

k	a_k	b_k
0	1.0000 00000	4.0000 00000
1	2.0000 00000	2.5000 00000
2	2.2360 67978	2.2500 00000
3	2.2430 23172	2.2430 33989
4	2.2430 28580	2.2430 28580
\vdots	\vdots	\vdots

Grenzwertsätze II (3.2.9)

$$\text{a) } \lim_{k \rightarrow \infty} (a_k \cdot b_k) = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} a_k \right) \cdot \left(\lim_{k \rightarrow \infty} b_k \right)$$

$$\text{b) } \forall k : b_k \neq 0 \wedge \lim_{k \rightarrow \infty} b_k \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{a_k}{b_k} \right) = \frac{\lim_{k \rightarrow \infty} a_k}{\lim_{k \rightarrow \infty} b_k}.$$

$$\text{c) } \forall k : a_k \geq 0 \wedge n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_k} = \sqrt[n]{\lim_{k \rightarrow \infty} a_k}.$$

Beispiel (3.2.10) $a_k := \sqrt{k^2 + 5k + 1} - k.$

$$a_k = \frac{(k^2 + 5k + 1) - k^2}{\sqrt{k^2 + 5k + 1} + k} = \frac{5 + \frac{1}{k}}{\sqrt{1 + \frac{5}{k} + \frac{1}{k^2}} + 1}.$$

Damit folgt: $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \frac{5 + 0}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \frac{5}{2}.$

Satz (3.2.11) (Die n -te Wurzel)

Zu $x > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ existiert genau eine Zahl $w > 0$ mit $w^n = x$.
Diese Zahl heißt die n -te Wurzel von x und wird mit $w = \sqrt[n]{x}$ bezeichnet.

Beispiel (3.2.12) (Die Exponentialfunktion)

Verzinsung eines Kapitals K_0 zum Jahreszinsfuß $p \geq 0$:

$$K_1 = K_0 (1 + p) \quad \text{bei jährlicher Verzinsung}$$

$$K_2 = K_0 \left(1 + \frac{p}{2}\right)^2 \quad \text{bei halbjährlicher Verzinsung}$$

$$K_4 = K_0 \left(1 + \frac{p}{4}\right)^4 \quad \text{bei vierteljährlicher Verzinsung}$$

usw., also allgemein: $K_k = K_0 \left(1 + \frac{p}{k}\right)^k$.

Zahlenbeispiel: $K_0 = 100 \text{ €}$, $p = 10\%$:

$$K_1 = 110, \dots, K_4 = 110,38, K_{12} = 110,47, K_{360} = 110,52, \dots$$

Grenzwert $K_\infty := \lim_{k \rightarrow \infty} K_k$?

- $a_k := \left(1 + \frac{p}{k}\right)^k$ ist streng monoton wachsend und nach oben beschränkt, also ist (a_k) für jedes $p > 0$ konvergent!

Die Eulersche Zahl (3.2.13)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = e = 2.7182\ 81828\ 45904 \dots$$

- Hiermit lässt sich für alle $p \in \mathbb{Q}$ zeigen: $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{p}{k}\right)^k = e^p$.
Dies gilt - wie später gezeigt wird - sogar für alle $p \in \mathbb{C}$.

Satz von Bolzano und Weierstraß (3.2.14)

Jede beschränkte reelle Folge (a_k) besitzt eine konvergente Teilfolge.

Bernard Bolzano:

Bernard Bolzano wurde am 5.10.1781 in Prag geboren und starb dort am 18.12.1848. Er studierte ab 1796 an der Prager Karls-Universität und wurde dort 1806 zum Professor ernannt. Seine zentralen Ergebnisse liegen in den Grundlagen der Analysis.

Karl Weierstraß:

Weierstraß wurde am 31.10.1815 in Ostenfelde geboren und starb am 19.2.1897 in Berlin. Ab 1834 studierte Weierstraß in Bonn und Münster und wurde danach Gymnasiallehrer. Erst ab 1856 erhielt er eine Professur an der Friedrich-Wilhelm Universität Berlin. Weierstraß hat wesentliche Beiträge zur Analysis, Funktionentheorie, Differentialgeometrie und Variationsrechnung verfasst.

Definition (3.2.15) Grenzwerte konvergenter Teilfolgen von (a_k) heißen **Häufungspunkte**.

Der kleinste Häufungspunkt heißt **Limes inferior**: $\liminf_{k \rightarrow \infty} a_k$,
der größte Häufungspunkt heißt **Limes superior**: $\limsup_{k \rightarrow \infty} a_k$.

Hier sind auch die Werte $\pm\infty$ zugelassen.

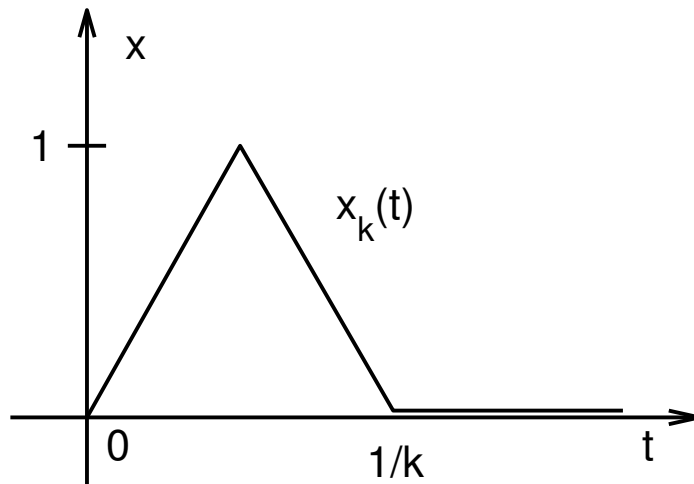
Satz (3.2.16) (Cauchysches Konvergenzkriterium)

Jede reelle Cauchy-Folge ist konvergent!

8.3 Folgen in Vektorräumen

Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so ist Konvergenz einer Folge im Allg. von der Norm abhängig!

Beispiel (3.3.1)



$$x_k \in C[0, 1],$$

$$\|x_k\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2k}},$$

$$\|x_k\|_\infty = 1.$$

Normäquivalenzsatz (3.3.2)

Je zwei Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ eines **endlich** dimensionalen Vektorraums V sind äquivalent, d.h., es gibt $C_1, C_2 > 0$ mit:

$$\forall \mathbf{v} \in V : C_1 \|\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{v}\|' \leq C_2 \|\mathbf{v}\|.$$

Folgerungen (3.3.3)

- a) Konvergenz und Grenzwert einer Folge im \mathbb{R}^n sind unabhängig von der zugrunde gelegten Norm.
- b) Eine Folge $(\mathbf{x}^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ im \mathbb{R}^n konvergiert genau dann, wenn alle n Koordinatenfolgen $(x_j^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$, $j = 1, \dots, n$, konvergieren. Der Grenzwert der Folge lässt sich koordinatenweise berechnen.
- c) Für den \mathbb{R}^n gilt das Cauchysche Konvergenzkriterium sowie der Satz von Bolzano, Weierstraß .

3.4 Reihen

Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$: Folge der Partialsummen $s_n := \sum_{k=0}^n a_k$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Ist die Reihe konvergent, so wird der Grenzwert $s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k$

ebenfalls mit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bezeichnet.

- **Cauchysches Konvergenzkriterium (3.4.1)**

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) : \forall n, m \geq N : \left| \sum_{k=n}^m a_k \right| < \varepsilon.$$

- **Notwendige Bedingung (3.4.2)**

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0.$$

- **Grenzwertsätze (3.4.3)**

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k) = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Gottfried Wilhelm Leibniz:

Gottfried Wilhelm Leibniz, geboren am 21.6.1646 in Leipzig und gestorben am 14.11.1716 in Hannover, wird oft als der letzte Universalgelehrte bezeichnet. Er war Philosoph, Mathematiker, Diplomat und Historiker und hat in all diesen Disziplinen wesentliches geleistet. Er studierte ab 1661 in Leipzig, Jena und Nürnberg. An mathematischen Erfolgen ist zunächst der Aufbau der Infinitesimalrechnung (unabhängig von Newton) zu nennen. Aber auch seine Entwicklung des Dualsystems ist für die heutige Computertechnik grundlegend. Leibniz baute 1672/73 eine eigene mechanische Rechenmaschine, die alle vier Grundrechenarten realisierte und führte diese an der Royal Society London vor.

- **Leibniz-Kriterium (3.4.4)**

Alternierende Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$, $a_k \geq 0$, für die (a_k) eine monoton fallende Nullfolge bildet, sind konvergent, und es gilt die Fehlerabschätzung:

$$\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \leq \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k .$$

- **Beispiele (3.4.5)**

- **Geometrische Reihe:** $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots$, $q \in \mathbb{C}$

konvergiert für $|q| < 1$, denn für die Partialsummen gilt:

$$s_n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q} .$$

Für $|q| > 1$ ist die geometrische Reihe divergent.

- **Harmonische Reihe:** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$

ist divergent, denn man kann einen Reihenabschnitt nach unten abschätzen

$$\sum_{k=n}^m \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n}^m \frac{1}{m} = \frac{m - n + 1}{m} \rightarrow 1 \quad (m \rightarrow \infty).$$

Damit ist das Cauchy-Kriterium verletzt!

- **Alternierende harm. Reihe:** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$

ist wegen des Leibnizschen Kriteriums konvergent! Der Grenzwert lautet:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 \approx 0.6931471806.$$

Definition (3.4.6) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt **absolut konvergent**, falls $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Kriterien für absolute Konvergenz (3.4.7)

- $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent $\Leftrightarrow \left(\sum_{k=0}^n |a_k| \right)_{n \geq 0}$ beschränkt.
- $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent.

• Majorantenkriterium (3.4.8)

$$|a_k| \leq b_k \wedge \sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ abs. konv..}$$

- **Quotientenkriterium (3.4.9)** $a_k \neq 0, k \geq k_0, 0 < q < 1.$

$$\forall k \geq k_0 : \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ abs. konv..}$$

- **Wurzelkriterium (3.4.10)**

$$\forall k \geq k_0 : \sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ abs. konv..}$$

Bemerkungen (3.4.11)

- Das Quotientenkriterium ist erfüllt, falls $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1.$
- Das Wurzelkriterium ist erfüllt, falls $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1.$
- Gilt dagegen $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| > 1$ oder $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1,$ so ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent.

Beispiele (3.4.12)

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ abs. konv. mit Grenzwert $\sum a_k = 1$, denn

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty.$$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r}$, $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$, abs. konv., denn nach a) gilt

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^r} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} < 2.$$

c) $\forall z \in \mathbb{C} : \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ abs. konv., denn nach Quotientenkriterium

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{|z|}{k+1} \rightarrow 0 < 1, k \rightarrow \infty.$$

d) $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < 1 : \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{2k+1} = \arctan z$ abs. konv.,

$$\text{denn } \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \left| \frac{z^2(2k+1)}{(2k+3)} \right| \rightarrow |z|^2 < 1.$$

• Umordnung von Reihen.

Wann gilt: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k}$ für jede Bijektion $\sigma : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$?

Umordnungssatz (3.4.13)

Ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent, so ist auch jede

umgeordnete Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k}$ absolut konvergent, und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k}.$$

- **Produkt von Reihen.**

Kann man ein Produkt von Reihen ausmultiplizieren,

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} b_{\ell} \right) = \sum_{k=\ell=0}^{\infty} a_k b_{\ell}?$$

In welcher Reihenfolge soll die rechte Reihe ausgewertet werden?

Produktsatz (3.4.14)

Sind die Reihen $\sum a_k$, $\sum b_{\ell}$ absolut konvergent, so ist die Reihe $\sum a_{\sigma_k} b_{\mu_k}$ für jede Numerierung der Indexpaare $(\sigma, \mu) : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0^2$ (Bijektion) absolut konvergent, und es gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k} b_{\mu_k} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right).$$

Erste Nummerierung:

		0	1	2	3	$\rightarrow \sigma_k$
	0	0	3	8		
	1	1	2	7	↑	
$\mu_k \downarrow$	2	4	5	6		
	3		\rightarrow			

$$\sum_{k=0}^{(n+1)^2-1} a_{\sigma_k} b_{\mu_k} = (a_0 + a_1 + \dots + a_n) (b_0 + b_1 + \dots + b_n)$$

Zweite Nummerierung:

		0	1	2	3	4	$\rightarrow \sigma_k$
	0	0	2	5	9		
	1	1	4	8			
$\mu_k \downarrow$	2	3	7	↗			
	3	6					
	4						

Cauchy-Produkt von Reihen (3.4.15)

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) \\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \dots \end{aligned}$$

Beispiel: Funktionalgleichung der Exp-Funktion (3.4.16)

$$\begin{aligned} \exp(z) \exp(w) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right) \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{w^\ell}{\ell!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k w^{n-k}}{k! (n-k)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z+w)^n = \exp(z+w). \quad \text{qed} \end{aligned}$$