

Universität Hamburg

Fachbereich Mathematik

Analysis I

Hans Joachim Oberle

Vorlesung an der TUHH im Wintersemester 2011/12

Mittwochs, 14:15 - 15:45, Audimax II

Donnerstags, 9:15 - 11:15, Audimax I

<http://www.math.uni-hamburg.de/home/oberle/analysis1/Vorlesung/analysis1.html>

Literatur.

R. Ansorge, H.J. Oberle: Mathematik für Ingenieure, Band 1.
Wiley-VCH, 2010 (4. Auflage).
ISBN: 978-3-527-40980-8.

K. Burg, H. Haf, F. Wille: Höhere Mathematik für Ingenieure 1.
Vieweg + Teubner, 2008 (8. Auflage).
ISBN: 978-3-835-10255-2.

K. Meyberg, P. Vachenaue: Höhere Mathematik 1.
Springer, 2003 (6. Auflage).
ISBN: 978-3-540-41850-4.

L. Papula: Mathematik für Ingenieure 1.
Vieweg + Teubner, 2009 (12. Auflage).
ISBN: 978-3-834-80545-4.

1. Aussagen, Mengen und Funktionen

1.1 Aussagen. Sätze, die wahr oder falsch sind.

tertium non datur! Man definiert:

$$\begin{aligned} w(A) = 0 & \quad :\iff A \text{ ist falsch} \\ w(A) = 1 & \quad :\iff A \text{ ist wahr.} \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

Verknüpfungen von Aussagen (1.1.2)

$\neg A$: „nicht A “	(Negation)
$A \wedge B$: „ A und B “	(Konjunktion)
$A \vee B$: „ A oder B “	(Disjunktion)
$A \Rightarrow B$: „aus A folgt B “	(Implikation)
$A \Leftrightarrow B$: „ A äquivalent zu B “	(Äquivalenz).

Wahrheitstafel (1.1.3)

$w(A)$	$w(B)$	$w(\neg A)$	$w(A \wedge B)$	$w(A \vee B)$	$w(A \Rightarrow B)$	$w(A \Leftrightarrow B)$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

- $A \vee B$ ist auch wahr, wenn beide Aussagen wahr sind!
- Eine Implikation $A \Rightarrow B$ ist immer wahr, wenn die **Prämisse** (das ist die Aussage A) falsch ist.

Aussageverknüpfungen, die unabhängig von den beteiligten Aussagen A, B, \dots stets wahr sind, nennt man **Tautologien**.

Beispiel (1.1.4) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

Liste häufig verwendeter Tautologien (1.1.5)

- | | | |
|------|--|-----------------------------------|
| (1) | $A \vee \neg A$ | Satz vom ausgeschlossenen Dritten |
| (2) | $\neg(A \wedge \neg A)$ | Satz vom Widerspruch |
| (3) | $\neg\neg A \iff A$ | doppelte Verneinung |
| (4) | $\neg(A \wedge B) \iff \neg A \vee \neg B$ | Regel von de Morgan |
| (5) | $\neg(A \vee B) \iff \neg A \wedge \neg B$ | Regel von de Morgan |
| (6) | $(A \Rightarrow B) \iff (\neg B \Rightarrow \neg A)$ | Kontraposition |
| (7) | $(A \Rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$ | modus ponens |
| (8) | $(A \Rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$ | modus tollens |
| (9) | $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ | modus barbara |
| (10) | $A \wedge (B \vee C) \iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ | Distributivgesetz |
| (11) | $A \vee (B \wedge C) \iff (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ | Distributivgesetz |

Augustus de Morgan:

Augustus de Morgan wurde am 27.6.1806 in Madurai (Indien) als Sohn eines in Indien stationierten britischen Soldaten geboren und starb am 18.3.1871 in London. Er studierte in Cambridge und wurde 1826 Professor am University College in London. Wichtigstes Arbeitsgebiet war die formale Logik. Sein erstes Buch zu diesem Themenkreis erschien 1847.

Aussageformen sind Aussagen, die von Variablen abhängen;

Beispiel (1.1.6) $A(x, y) :\iff x^2 + y^2 < 2.$

Quantoren (1.1.7)

$\forall x : A(x) :\iff$ **Für alle** x ist $A(x)$ wahr.

$\exists x : A(x) :\iff$ **Es gibt** (wenigstens) ein x , so dass $A(x)$ gilt.

$\exists_1 x : A(x) :\iff$ **Es gibt genau** ein x , so dass $A(x)$ wahr ist.

Negation von Quantoren (1.1.8)

$$\neg \forall x : A(x) \iff \exists x : \neg A(x)$$

$$\neg \exists x : A(x) \iff \forall x : \neg A(x)$$

Aufgabe: Verneinen Sie die folgenden Aussagen

- $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$
- $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Mathematische Sätze haben zumeist die Form einer Implikation $A \Rightarrow B$; A : Voraussetzung, B : Behauptung

Direkter Beweis: mittels Kettenschluss

$$A \Leftrightarrow: A_0 \Rightarrow A_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow A_n \Leftrightarrow B$$

Indirekter Beweis: mittels Tautologie

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) \Leftrightarrow \neg(\neg B \wedge A)$$

Man nimmt an, dass die Behauptung B *nicht* gilt, und konstruiert hieraus mittels Kettenschluss einen Widerspruch zur Voraussetzung A .

Satz (1.1.9) n gerade $\Leftrightarrow n^2$ gerade ($n \in \mathbb{N}$)

Satz (1.1.10) $\sqrt{2}$ ist irrational!

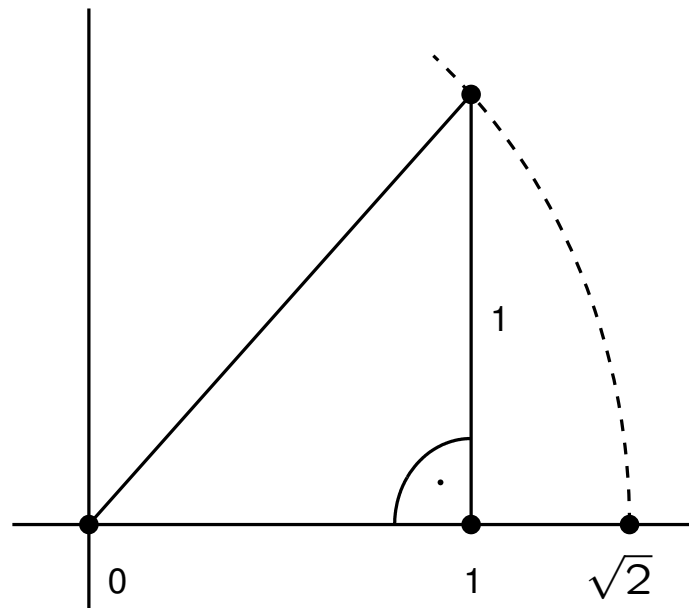


Abb. 1.1. Konstruktion von $\sqrt{2}$

1.2 Mengen. Naiver Mengenbegriff nach Georg Cantor

A, B, \dots, M, N, \dots Mengen,

$a \in M : \iff a$ ist Element der Menge M ,

$a \notin M : \iff \neg (a \in M)$.

Die Definition einer Menge erfolgt durch Aufzählen der Elemente, oder durch eine definierende Eigenschaft (Aussageform):

$$M := \{x \in \Omega : A(x)\}.$$

Gleichheit (1.2.1) $M = N : \iff \forall x : (x \in M \iff x \in N)$

Teilmenge (1.2.2) $M \subset N : \iff \forall x : (x \in M \Rightarrow x \in N)$

Leere Menge (1.2.3) \emptyset

Georg Cantor:

Georg Cantor wurde am 3.3.1845 in St. Petersburg geboren und starb am 6.1.1918 in Halle. Er studierte in Zürich, Göttingen und Berlin. Zu seinen Lehrern zählten Weierstraß, Kummer und Kronecker. 1877 wurde er Professor in Halle. Cantor gilt als Begründer der Mengenlehre. Die grundlegenden Arbeiten auf diesem Gebiet schrieb er in den Jahren 1875-1884.

Ordnungseigenschaft (1.2.4)

(a) $M \subset M$

(b) $M \subset N \wedge N \subset M \Rightarrow M = N$

(c) $M \subset N \wedge N \subset P \Rightarrow M \subset P$

Verknüpfungen (1.2.5)

(a) $M \cup N := \{x : x \in M \vee x \in N\}$ (Vereinigung)

(b) $M \cap N := \{x : x \in M \wedge x \in N\}$ (Durchschnitt)

(c) $M \setminus N := \{x : x \in M \wedge x \notin N\}$ (Differenz)

(d) $M \times N := \{(a, b) : a \in M \wedge b \in N\}$ (Kartes. Produkt)

(e) $\mathcal{P}(M) := \{X : X \subset M\}$ (Potenzmenge)

Bei mehreren Mengen (1.2.6)

$$(a) \quad \bigcup_{k=1}^n A_k := A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

$$(b) \quad \bigcap_{k=1}^n A_k := A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

$$(c) \quad \prod_{k=1}^n A_k := A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) : \forall i : a_i \in A_i\}$$

Gleichheit von Tupeln (1.2.7)

$$(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n) \iff \forall i \in \{1, \dots, n\} : x_i = y_i$$

Wichtige Beispiele (1.2.8)

$$(a) \quad \mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$(b) \quad \mathbb{R}^3 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

$$(c) \quad \mathbb{R}^n := \{(x_1, \dots, x_n) : \forall i : x_i \in \mathbb{R}\}$$

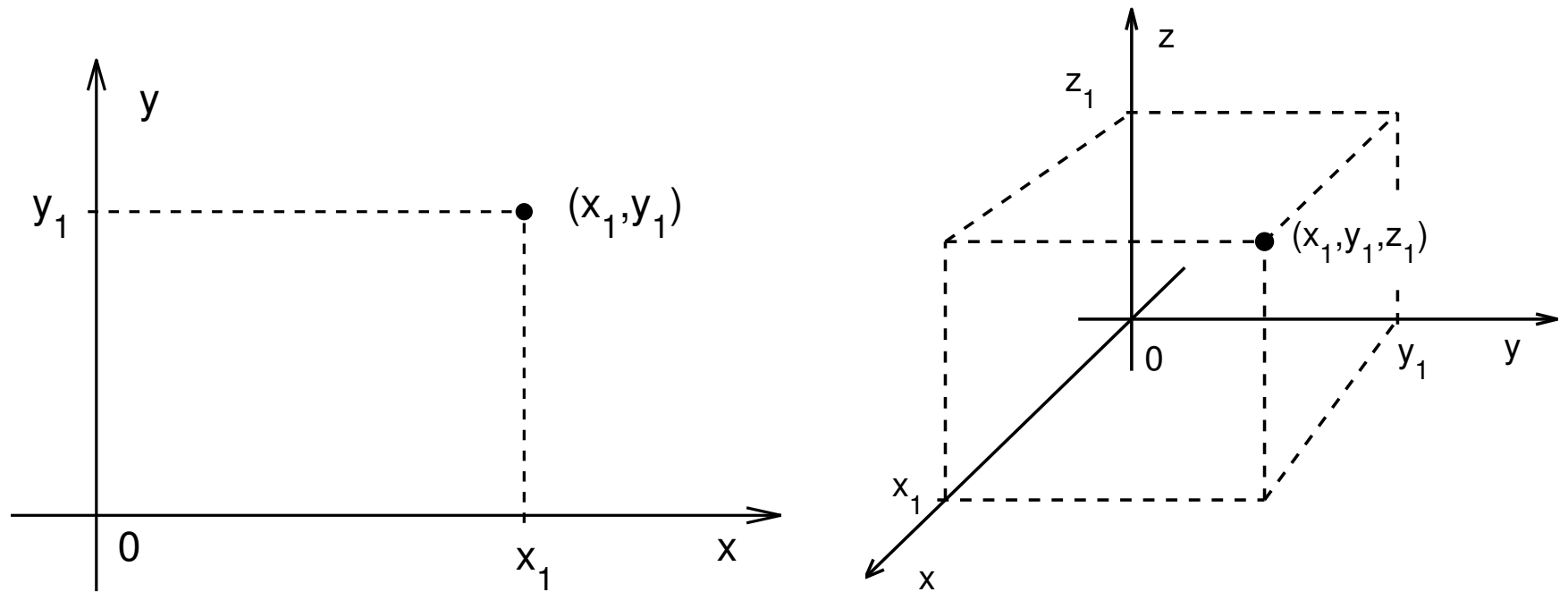


Abb. 1.2 Euklidische Ebene und Euklidischer Raum

Eukleides bzw. Euklid:

Euklid lebte um 300 v. Chr. in Alexandria. Sein berühmtestes Werk, die Elemente, fasst das Wissen der griechischen Mathematik seiner Zeit zusammen. Dieses Werk war über 2000 Jahre Grundlage für den geometrischen Unterricht an Schulen und Hochschulen. Die Hauptleistung besteht in der einheitlichen Darstellung des mathematischen Wissens sowie in der strengen Beweisführung.

Intervalle (1.2.9)

Für $a \leq b$; $a, b \in \mathbb{R}$ wird definiert:

$$\begin{array}{ll} [a, b] & := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} & \text{abgeschlossenes Intervall,} \\]a, b[& := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} & \text{offenes Intervall,} \\ [a, b[& := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} & \left. \vphantom{\begin{array}{l} [a, b] \\]a, b[\end{array}} \right\} \\]a, b] & := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} & \text{halboffene Intervalle.} \end{array}$$

Beispiel (1.2.10)

Man skizziere die folgende Menge, $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$

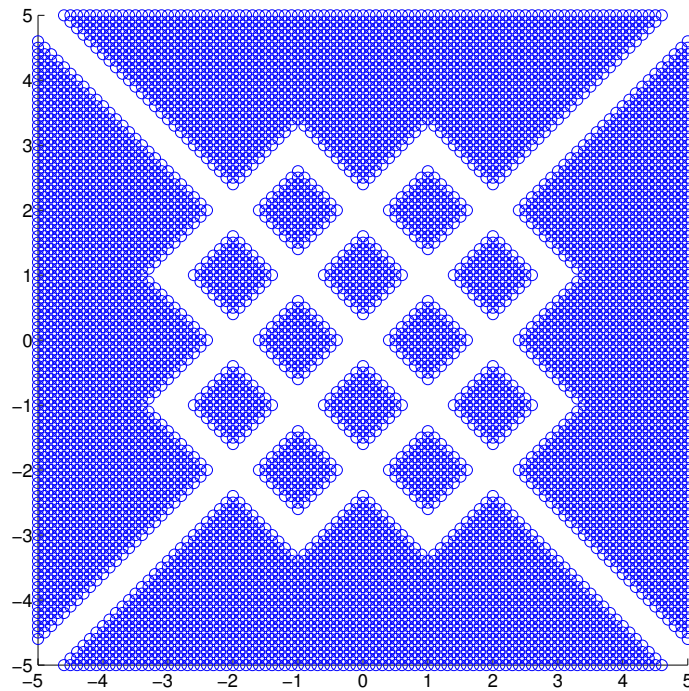
$$T := T_1 \cup T_2,$$

$$T_1 := \left[-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right] \times [-\gamma, 0]$$

$$T_2 := \left[-\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right), \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)\right] \times [0, \delta]$$

Beispiel (1.2.11) nach Lothar Collatz

$$C := \{(x, y) : ||| |x| - 1| - 1| - || |y| - 1| - 1| \geq 1/3\}$$



Lothar Collatz:

Lothar Collatz wurde am 6.7.1910 in Arnsberg geboren und starb am 26.9.1990 in Warna. Er studierte in Berlin, München, Greifswald und Göttingen, wurde 1938 Privatdozent an der TH Karlsruhe, 1943 Professor an der TH Hannover und lehrte ab 1952 an der Universität Hamburg. Collatz gilt als einer der Begründer der numerischen Mathematik. Seine wichtigsten Arbeitsgebiete waren die Funktionalanalysis, Differential- und Integralgleichungen sowie Eigenwertaufgaben für Matrizen und Differentialgleichungen.

1.3 Funktionen, Abbildungen

Definitionen (1.3.1)

Unter einer **Funktion** f versteht man eine Zuordnungsvorschrift $f : D \rightarrow Z$ mit $\forall x \in D : \exists_1 y \in Z : y = f(x)$, auch $f : x \mapsto y$.

D : **Definitionsbereich**, Z : **Zielmenge, Bildbereich**,

$\text{graph}(f) := \{(x, f(x)) : x \in D\} \subset D \times Z$: **Graph** von f

Beispiel (1.3.2) Durch $y = f(x) := \sqrt{x^2 - 2x - 3}$ ist eine Funktion $f : \mathbb{R} \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Der (maximale) Definitionsbereich lautet $D =]-\infty, -1] \cup [3, \infty[$.

Bild von $A \subset D$: $f(A) := \{f(x) : x \in A\}$

Urbild von $B \subset Z$: $f^{-1}(B) := \{x \in D : f(x) \in B\}$

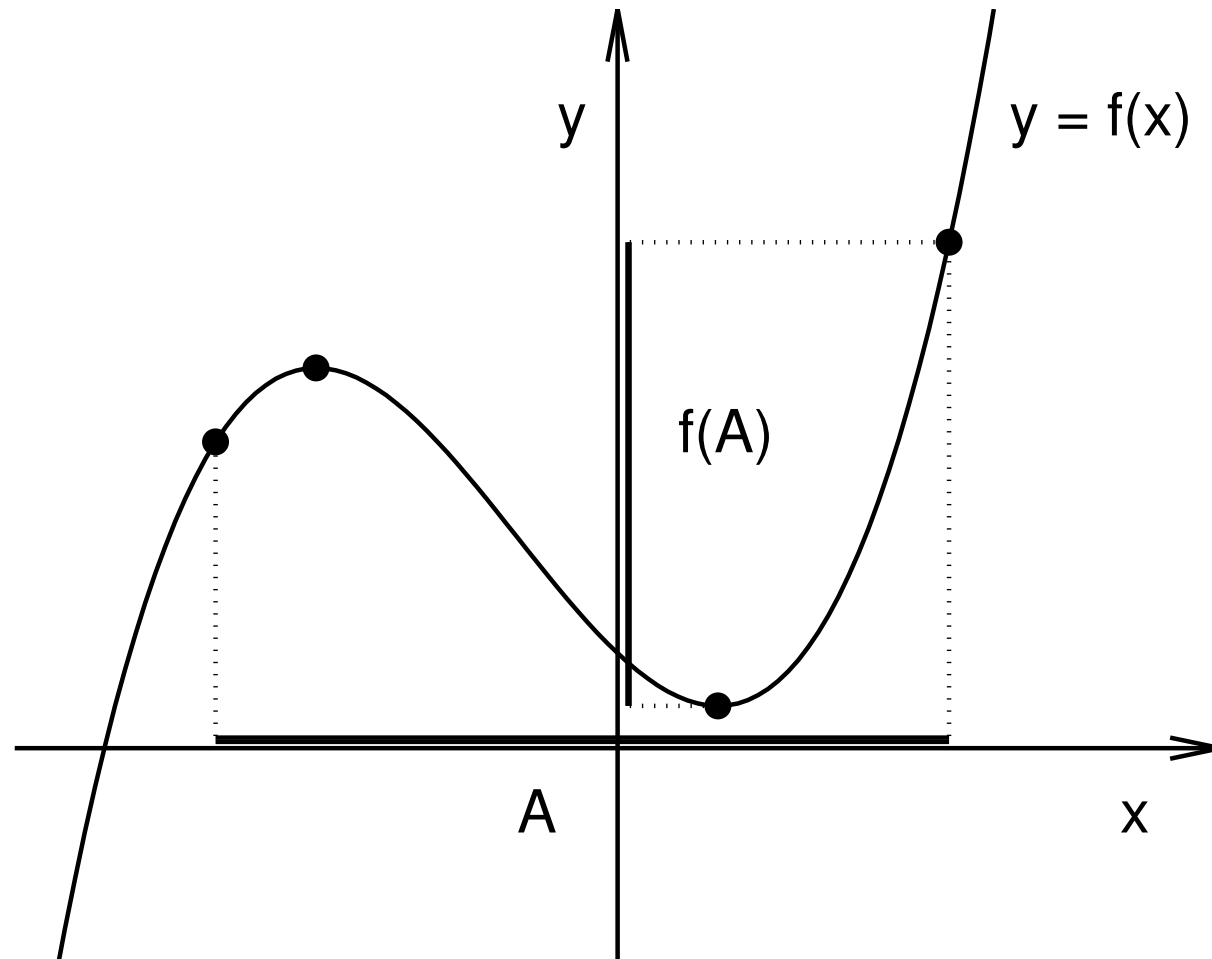


Abb. 1.3 Bild von A unter einer Funktion f

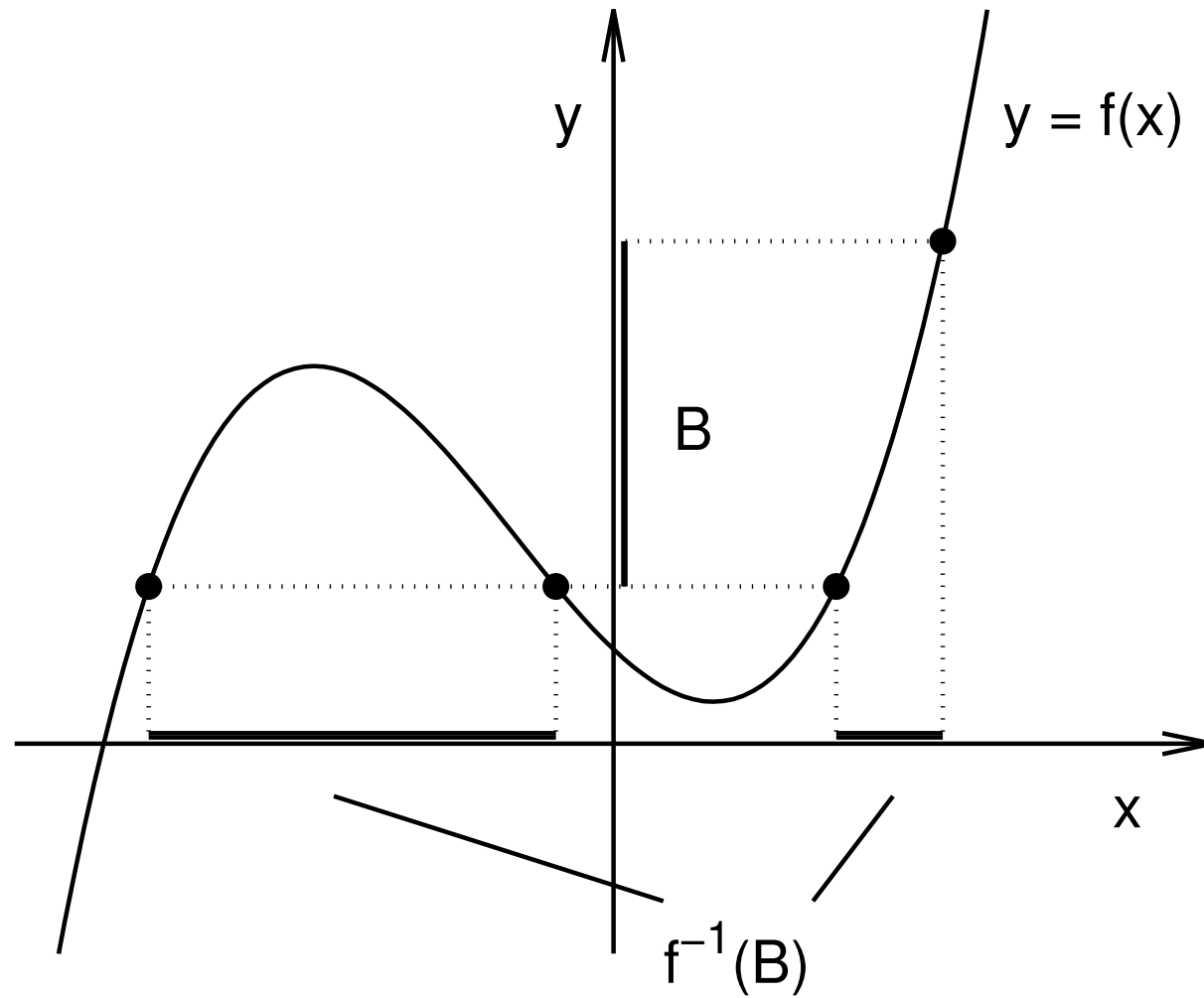


Abb. 1.4 Urbild von B unter einer Funktion f

Definitionen (1.3.3)

$f : D \rightarrow Z$ **surjektiv** $:\Leftrightarrow \forall y \in Z : \exists x \in D : y = f(x)$

$f : D \rightarrow Z$ **injektiv** $:\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$f : D \rightarrow Z$ **bijektiv** $:\Leftrightarrow f$ injektiv und surjektiv

Interpretation (1.3.4)

f surjektiv \Leftrightarrow die Gleichung $y = f(x)$ hat für jedes $y \in Z$ *wenigstens* eine Lösung $x \in D$

f injektiv \Leftrightarrow die Gleichung $y = f(x)$ hat für jedes $y \in Z$ *höchstens* eine Lösung $x \in D$

Ist $f : D \rightarrow Z$ injektiv, so existiert die **Umkehrfunktion** zu f :

$$f^{-1} : f(D) \rightarrow D, \text{ wobei } y \mapsto x \text{ mit } y = f(x)$$

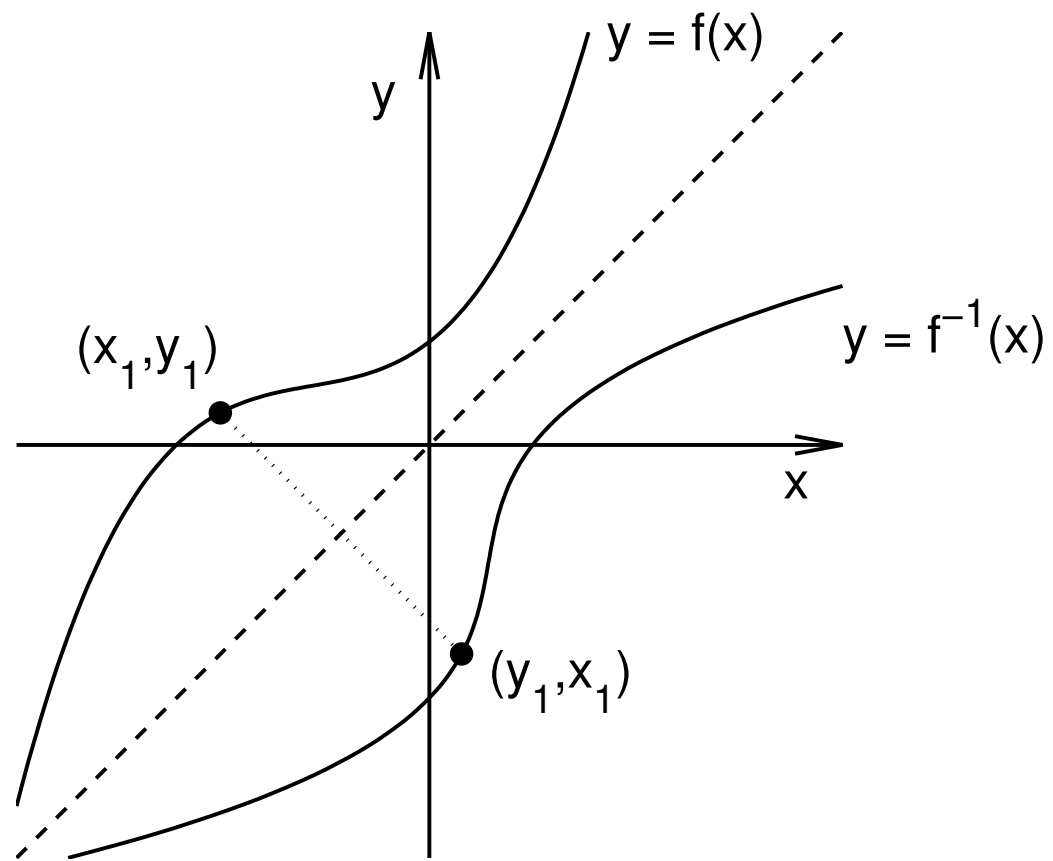


Abb. 1.5. Konstruktion der Umkehrfunktion

Definition (1.3.5) Zu $f : D \rightarrow Z$ und $g : Z \rightarrow W$ heißt

$$g \circ f : D \rightarrow W, \quad (g \circ f)(x) := g(f(x)),$$

die **Komposition** oder **Hintereinanderausführung** von f und g .

Merke: Erst $f(x)$ berechnen, dann $g(f(x))$!!

Assoziativgesetz (1.3.6) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

Warnung (1.3.7) Im Allg. ist die Komposition von Funktionen *nicht* kommutativ!!

Gegenbeispiel: $\cos(x^2) \neq \cos^2(x)$, z.B. für $x = \pi/2$.

Bemerkung: Die Menge der bijektiven Funktionen $f : D \rightarrow D$ bilden eine Gruppe, die so genannte **symmetrische Gruppe** von D .

Elementare Funktionen (1.3.8)

Geraden: $y = a_1 x + a_0$

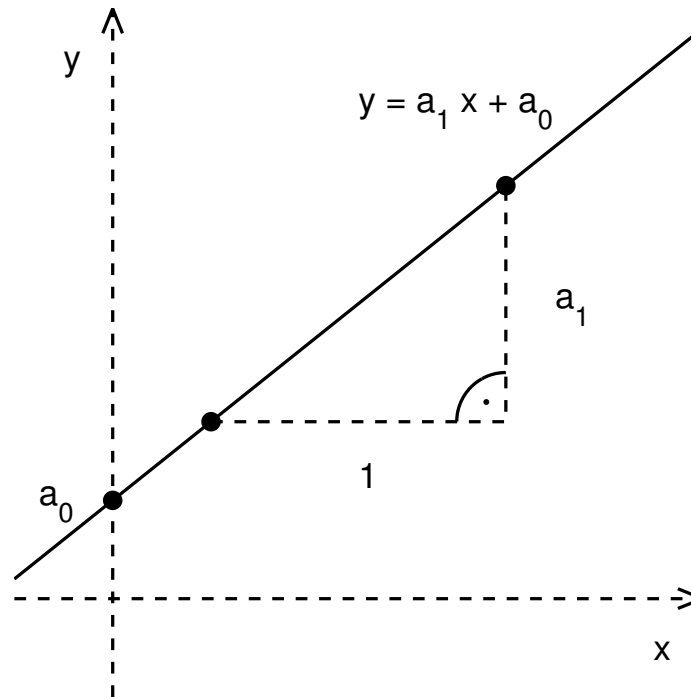


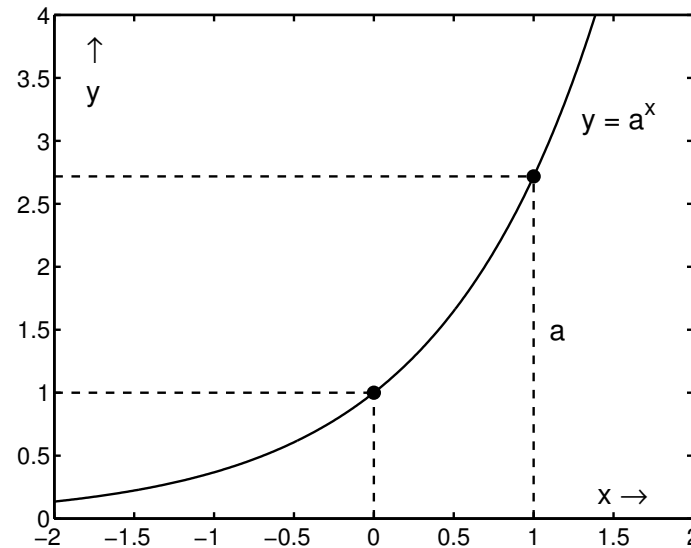
Abb. 1.6. Gerade im \mathbb{R}^2

Polynomfunktionen $y = \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$

Ist $a_n \neq 0$, so heißt n der **Grad** des Polynoms.

Exponentialfunktionen $y = a^x$, $a > 1$ **Basis**

Funktionalgleichung: $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

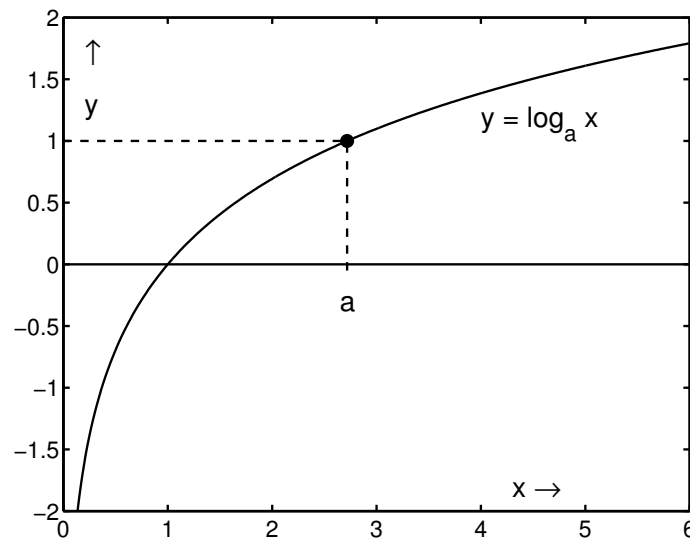


Es gibt genau eine Basis $e > 1$, so dass für $f(x) = e^x$ gilt:
 $f'(0) = 1$.

Die Eulersche Zahl e

$$e = 2.7182\ 81828\ 45904\ 52353\ \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Logarithmus $y = \log_a x$, $a > 1$, Umkehrfunktion von a^x .



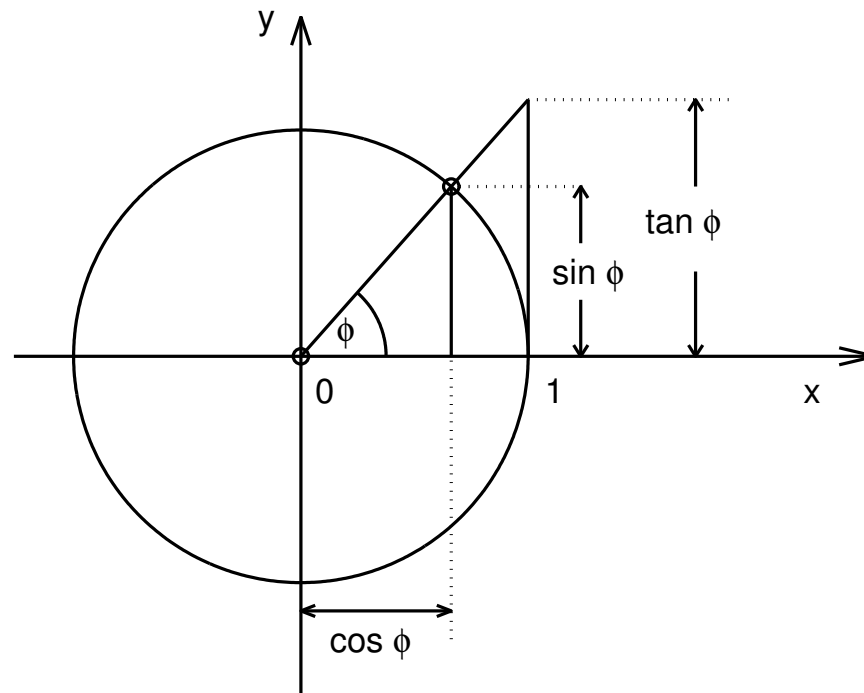
Leonhard Euler:

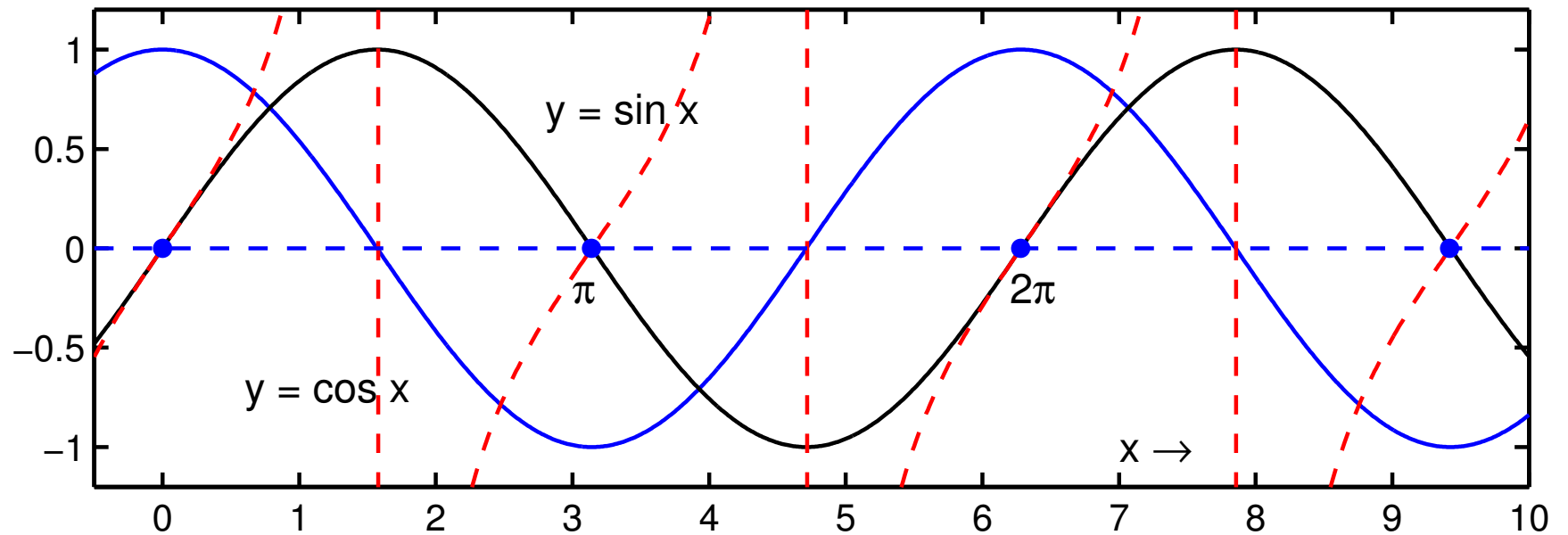
Leonhard Euler wurde am 15.4.1707 in Basel geboren und starb am 18.9.1783 in St. Petersburg. Euler gilt als einer der bedeutendsten Mathematiker. Er hat wesentliche Beiträge zur Analysis, Zahlentheorie und zu vielen weiteren Teilgebieten der Mathematik, aber auch der Physik erbracht. Euler studierte in Basel bei Johann Bernoulli. Er wurde 1727 als Professor an die Petersburger Akademie der Wissenschaften und 1741 an die Königlich-Preußische Akademie der Wissenschaften in Berlin berufen. 1766 kehrte er nach St. Petersburg zurück.

Funktionalgleichung $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y,$
 $\log_a(x^y) = y \log_a(x)$

Natürlicher Logarithmus: $y = \ln x := \log_e x.$

Trigonometrische Funktionen





Kreiszahl (1.3.9) $\pi = 3.1415\ 92653\ 58979\ 32384\ \dots$

Wichtige Eigenschaften (1.3.10)

(a) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

(b) $\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x$

$$(c) \quad \sin(x + 2\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x$$

$$\sin(x + \pi) = -\sin x, \quad \cos(x + \pi) = -\cos x$$

$$\sin(x + \pi/2) = \cos x, \quad \cos(x + \pi/2) = -\sin x$$

$$(d) \quad \sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

(e)

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin x$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0