Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik
Ingenuin Gasser

Wintersemester 2002/03

7. Übungsblatt zur Vorlesung "Modellieren in der Angewandten Mathematik"

1. Aufgabe: (7 Punkte)
Betrachten Sie die Korteweg de Vries Gleichung

$$u_t + (\frac{u^2}{2})_x = \delta^2 u_{xxx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

und führen Sie dieselben Schritte wie in der Aufgabe (vorhergehendes Übungsblatt) für die Burger's Gleichung durch. Gibt es eine Verbindung von u_- und u_+?

2. Aufgabe: (7 Punkte)
Betrachten Sie das makroskopische Verkehrsflußmodell

$$\rho_t + (\rho(1-\rho))_x = 0, \qquad \rho(x,0) = \rho_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

mit einer Stauanfangsbedingung

$$\rho_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \in [0,1] \\ \frac{1}{2} & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie die zu dieser Anfangsbedingung gehörige Integrallösung (und zwar stetig, wo immer möglich).

(b) In welche Richtung bewegt sich der Stau bzw. sein vorderes und hinteres Ende?

(c) Wird sich der Stau auflösen, verkleinern, gleich lang bleiben oder vergrößern?

3. Aufgabe: (6 Punkte)
Betrachten Sie das makroskopische Verkehrsflußmodell

$$\rho_t + (\rho(1-\rho))_x = 0, \qquad \rho(x,0) = \rho_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

(a) Multiplizieren Sie die Gleichung mit $\rho^k, k = 1, 2, ...$ und schreiben Sie die Gleichung wieder in Erhaltungsform $u_t + f(u)_x = 0$ (für eine andere Erhaltungsgröße $u = u(\rho)$).

(b) Berechnen Sie die Rankine-Hugoniot-Sprungbedingung zu dieser neuen Gleichung.

(c) Drücken Sie diese Sprungbedingung wieder in ρ aus und vergleichen Sie sie mit der üblichen Sprungbedingung.

(d) Was könnte ein Argument für die Verwendung der üblichen Sprungbedingung sein?