Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik
Ingenuin Gasser

Wintersemester 2002/03

4. Übungsblatt zur Vorlesung "Modellieren in der Angewandten Mathematik"

1. Aufgabe: (7 Punkte)
Betrachten Sie die Lotka-Volterra Gleichungen (Räuber-Beute-Modell)

$$\begin{aligned} \frac{dx^\star}{dt^\star} &= a\,x^\star y^\star - b\,y^{\star 2} \\ \frac{dy^\star}{dt^\star} &= c\,y^\star - d\,x^\star y^\star. \end{aligned}$$

(a) Skalieren Sie die Gleichungen, indem Sie als Referenzgrößen die entsprechenden Werte eines stationären Punktes nehmen.

(b) Zeigen Sie, dass man das skalierte Modell nur einen einzigen dimensionslosen Parameter enthält.

(c) Zeigen Sie, dass es periodische Lösungen um einen der stationären Punkte gibt, indem Sie eine implizite Darstellung der Lösung bestimmen und diese entsprechend analysieren.

2. Aufgabe: (6 Punkte)
Betrachten Sie ein Populationsmodell der Form

$$\frac{dx^\star}{dt^\star} = ax^\star - bx^{\star 2} - c, \qquad a, b, c \geq 0$$

wobei die ersten beiden Terme auf der rechten Seite die übliche Bedeutung haben und der letzte Term einen künstlichen Eingriff in das System beschreibt (z.B. die Jagd oder das Fischen).

(a) Skalieren Sie die Gleichung.

(b) Unter welcher Bedingung erfüllt dieser Eingriff seinen Zweck, nämlich die Reduktion der Population als Stationärzustand.

(c) Sind die neuen Stationärzustande stabil?

3. Aufgabe: (7 Punkte)
Diskutieren Sie die reduzierte Gleichung und mögliche Grenzschichten von

$$\varepsilon y'' + a(x)y' + b(x)y = 0, \quad y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta,$$

wobei $a, b \in C([0,1])$ und a besitzt keine Nullstelle in $x \in [0,1]$. Wovon hängt die Existenz der Grenzschichten ab? Bestimmen Sie ein formale Nährung der Lösung für die beiden möglichen Fälle.