Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik
Ingenuin Gasser Wintersemester 2002/03

3. Übungsblatt zur Vorlesung "Modellieren in der Angewandten Mathematik"

1. Aufgabe: (5 Punkte)
Lösen Sie die Duffing'sche Gleichung (siehe auch 2. Übungsblatt)

$$\ddot{u} + u + \varepsilon u^3 = 0, \quad u(0) = a, \quad \dot{u}(0) = 0, \quad \varepsilon \ll 1.$$

mit Hilfe der Methode der mehrfachen Skalierungen.

2. Aufgabe: (10 Punkte)
Man betrachte die Van der Pol Gleichung

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \alpha(1-y^2)\frac{dy}{dt} + y = 0$$

für $\alpha \gg 1$.

(a) Transformieren Sie die Gleichung auf die Zeitvariable $\tau = \frac{t}{\alpha}$.

(b) Schreiben Sie die neue Gleichung als System vom Typ

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,y) \\ \varepsilon\dot{y} &= g(x,y), \end{aligned}$$

indem Sie eine neue Variable x mit $\dot{x} = y$ einführen ($\varepsilon = \frac{1}{\alpha^2}$, $\dot{()} = \frac{d}{d\tau}$).

(c) Versuchen Sie die Dynamik des reduzierten Problem ($\varepsilon = 0$)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,y) \\ 0 &= g(x,y). \end{aligned}$$

im Phasenraum zu verstehen, indem Sie die Richtung des Flusses auf der Kurve $g(x,y) = 0$ bestimmen.

(d) Skalieren Sie in (b) die Zeit nochmals auf $t' = \frac{\tau}{\varepsilon}$ um und bestimmen Sie so durch setzen von $\varepsilon = 0$ das Grenzschichtproblem. Erklären Sie die Dynamik des so erhaltenen schnellen Problems

$$\begin{aligned} x' &= 0 \\ y' &= g(x,y) \end{aligned}$$

im Phasenraum ($()' = \frac{d}{dt'}$).

(e) Versuchen Sie durch Kombination von (c) und (d) eine periodische Lösung des ursprünglichen Systems zu erkennen.

3. Aufgabe: (5 Punkte)
Betrachten Sie die Gleichung

$$\varepsilon y'' + \sqrt{\varepsilon} b y' + y = 0, \quad \sqrt{\varepsilon} y(0) + b y(0) = 1, \quad y(1) = 1.$$

Wo können Grenzschichten auftreten? Bestimmen Sie eine Nährungslösung.