

2. Übungsblatt zur Vorlesung “Modellieren in der Angewandten Mathematik”

1. Aufgabe: (6 Punkte)

Teilen Sie folgende Anfangswertprobleme in regulär bzw. singulär gestörte ein und berechnen Sie gegebenenfalls asymptotische Entwicklungen (und lesen Sie daraus die exakte Lösung ab).

(a) $\varepsilon y' + y = x, \quad y(0) = 1;$

(b) $y' + \varepsilon y = x, \quad y(0) = 1;$

(c) $y' + y = \varepsilon x, \quad y(0) = 1;$

2. Aufgabe: (7 Punkte)

Betrachten Sie die Gleichung

$$y' + y = \varepsilon y^2, \quad y(0) = 1, \quad \varepsilon \ll 1.$$

- Bestimmen Sie die ersten drei Terme einer asymptotischen Entwicklung der Lösung.
- Berechnen Sie die exakte Lösung.
- Vergleichen Sie a) und b) indem Sie die exakte Lösung entwickeln.
- Wie groß ist der Gültigkeitsbereich der asymptotischen Entwicklung (anhand der Reihe)?

3. Aufgabe: (7 Punkte)

Betrachten Sie die Duffing'schen Gleichung

$$\ddot{u} + u + \varepsilon u^3 = 0, \quad u(0) = a, \quad \dot{u}(0) = 0, \quad \varepsilon \ll 1.$$

- Bestimmen Sie die ersten zwei Terme einer asymptotischen Entwicklung der Lösung. Wie verhält sich die Entwicklung für $t \rightarrow \infty$?
- Zeigen Sie andererseits die Beschränktheit von u , indem Sie die Energie des Systems herleiten (Multiplikation der Gleichung mit \dot{u} usw...).
- Berechnen Sie eine asymptotische Entwicklung dadurch, indem Sie sowohl u als auch t asymptotisch entwickeln

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \dots, \quad t = s(1 + \varepsilon \omega_1 + \dots).$$

Wählen Sie ω_1 so, daß die Entwicklung gleichmäßig in s wird.