Mathematik II für Studierende der Informatik

Mathias Schacht

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg

SoSe 2025

Stand: 13. Mai 2025

Teil 1 - Lineare Algebra

1. Vektorrechnung

Rechnen mit Vektoren

Erinnerung:

- Für eine Menge X und $n \in \mathbb{N}_0$ ist X^n die Menge der n-Tupel bestehend aus n Elementen aus X

$$X^n = \{(x_1, \dots, x_n) \colon x_1, \dots, x_n \in X\}.$$

- Für einen Körper $\mathbb{K}$ nennt man die Elemente (n-Tupel) aus $\mathbb{K}^n$ auch Vektoren.

Definition

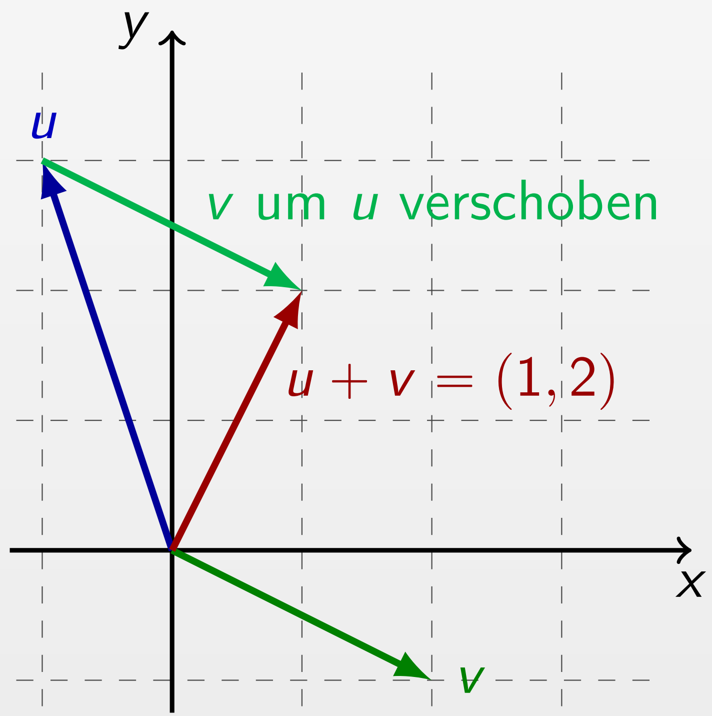
Für Vektoren $u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{K}^n$ und ein Skalar $\alpha \in \mathbb{K}$ definieren wir die Vektoraddition und Multiplikation mit einem Skalar durch

$$u + v := (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n) \quad \text{und} \quad \alpha \cdot v = \alpha v := (\alpha v_1, \dots, \alpha v_n).$$

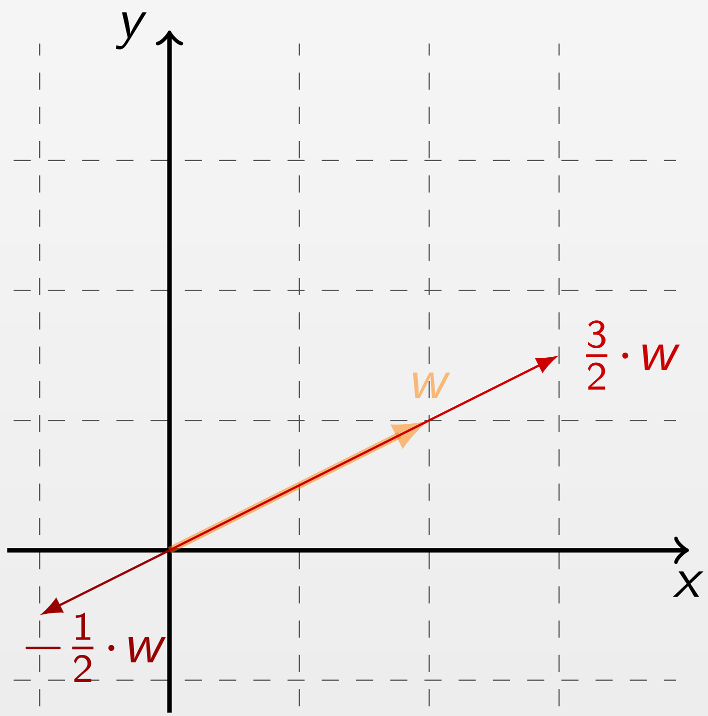
Geometrische Interpretation

- Vektoren in $\mathbb{R}^2$ entsprechen Punkten in der reellen Ebene bzw. Pfeile vom Nullpunkt $(0,0)$ zu dem Punkt
- Summe zweier Vektoren entspricht dann der „Aneinanderreihung der Pfeile“
- Produkt mit einem Skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ entspricht einer Skalierung/Streckung des Pfeils, d. h. $\alpha \in (0,1)$ verkürzt und $\alpha > 1$ verlängert, während $\alpha < 0$ skaliert wie $|\alpha|$ und zusätzlich die Richtung umdreht
- entsprechendes gilt in $\mathbb{R}^3$ oder ganz allgemein in $\mathbb{R}^n$

Sei $u = (-1,3)$ und $v = (2,-1)$.



Sei $w = (2,1)$.



Vektorräume

Satz

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

- $(\mathbb{K}^n, +)$ ist eine abelsche Gruppe.
- Das neutrale Element der Addition ist der Vektor $\mathbf{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^n$, den wir auch Nullpunkt/Nullvektor nennen.
- Für alle Vektoren v, $w \in \mathbb{K}^n$ und Skalare α, $\beta \in \mathbb{K}$ gelten die Rechenregeln:

  (a) $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$
  (b) $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$
  (c) $(\alpha \cdot \beta)v = \alpha(\beta v)$
  (d) $1 \cdot v = v$.

Bemerkungen

- Satz kann durch einfaches einsetzen der Definitionen bewiesen werden
- $\mathbb{K}^n$ zusammen mit der Vektoraddition und Multiplikation mit Skalaren ist ein Vektorraum (über $\mathbb{K}$)
- allgemeiner ist ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ eine abelsche Gruppe $(V, +)$ mit einer skalaren Multiplikation $\mathbb{K} \times V \longrightarrow V$ die die Rechenregeln erfüllt

$\longrightarrow$ hier: $V = \mathbb{K}^n$

Vektoren multiplizieren

Definition (Standardskalarprodukt)

Sei $\mathbb{K}^n$ ein Verktorraum. Das Skalarprodukt $\langle \cdot\,, \cdot \rangle\colon \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ bildet $u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{K}^n$ auf ein Körperelement ab:

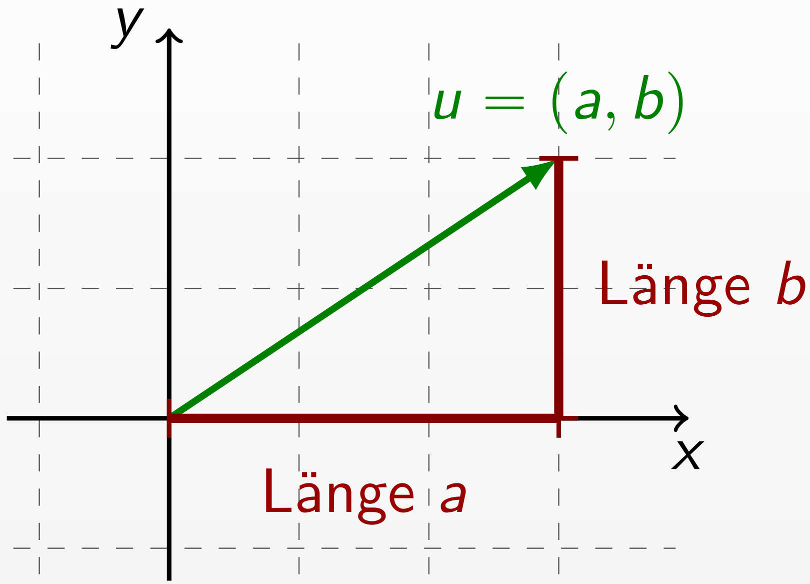
$$\langle v, w\rangle = \begin{cases} u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n = \sum_{j=1}^n u_j v_j\,, & \text{falls } \mathbb{K} \neq \mathbb{C}\,,\\ u_1 \overline{v}_1 + \cdots + u_n \overline{v}_n = \sum_{j=1}^n u_j \overline{v}_j\,, & \text{falls } \mathbb{K} = \mathbb{C}\,. \end{cases}$$

Beispiele:

- Für $u = (1, 2, 3)$, $v = (-4, 5, -6) \in \mathbb{R}^3$, gilt
$$\langle u, v\rangle = 1 \cdot (-4) + 2 \cdot 5 + 3 \cdot (-6) = -12\,.$$
- Für $u = (1, 0, 2, 2)$, $v = (2, 1, 1, 2) \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$, gilt
$$\langle u, v\rangle = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 2\,.$$
- Für $v = (a_1 + \mathbf{i}b_1, \dots, a_n + \mathbf{i}b_n) \in \mathbb{C}^n$ gilt
$$\langle v, v\rangle = \sum_{j=1}^n (a_j + \mathbf{i}b_j)(\overline{a_j + \mathbf{i}b_j}) = \sum_{j=1}^n (a_j + \mathbf{i}b_j)(a_j - \mathbf{i}b_j) = \sum_{j=1}^n (a_j^2 + b_j^2)\,.$$

Längen von Vektoren und Satz von PYTHAGORAS

Sei $u = (a, b)$ ein Vektor in $\mathbb{R}^2$:



- Nach dem Satz des PYTHAGORAS hat der Vektor $u = (a, b)$ die Länge

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\langle u, u \rangle}\,.$$

- Im Allgemeinen definieren wir für $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{C}^n$ den Betrag $|v|$ durch

$$|v| := \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{|v_1|^2 + \cdots + |v_n|^2}\,,$$

was der geometrischen Länge von v in $\mathbb{C}^n$ entspricht (PYTHAGORAS).

Eigenschaften des Skalarproduktes

Satz

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ und alle u, v, $w \in \mathbb{K}^n$

(a) $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$ für $\mathbb{K} \neq \mathbb{C}$ und $\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}$ für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

(b) $\langle \alpha v, w\rangle = \alpha\langle v, w\rangle$

(c) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$

Beweis: Alle Eigenschaften ergeben sich direkt aus der Definition des Skalarproduktes und den Rechenregeln

$$z \cdot \overline{z'} = \overline{\bar{z} \cdot z'} = \overline{z' \cdot \bar{z}}$$

für komplexe Zahlen z, $z' \in \mathbb{C}$. □

Bemerkungen

- Eigenschaft (a) nennt man Symmetrie bzw. Hermitizität (in $\mathbb{C}$)
- Eigenschaften (b) und (c) nennt man Linearität im ersten Argument
- mit (a) ergibt sich auch Linearität im zweiten Argument für $K \neq \mathbb{C}$ und Sesquilinearität $\langle u, \alpha v + w\rangle = \bar{\alpha}\langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$ über $\mathbb{C}$

Eigenschaften des Betrages

Satz

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und alle $v, w \in \mathbb{K}^n$

(a) $|v| \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ und es gilt $|v| = 0 \iff v = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{K}^n$ positiv definit

(b) $|\lambda v| = |\lambda| \cdot |v|$ homogen

(c) $|v + w| \leqslant |v| + |w|$ Dreiecksungleichung

Beweis: Die ersten beiden Eigenschaften ergeben sich aus der Definition des Betrages, den Rechenregeln des Skalarproduktes und aus der Definition des Betrages für komplexe Zahlen $\lambda = a + b\mathbf{i}$

$$|\lambda| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(a + b\mathbf{i})(a - b\mathbf{i})} = \sqrt{\lambda \cdot \bar{\lambda}}$$

mit

$$|\lambda v| = \sqrt{\langle \lambda v, \lambda v \rangle} = \sqrt{(\lambda \cdot \bar{\lambda}) \langle v, v \rangle} = \sqrt{\lambda \cdot \bar{\lambda}} \cdot \sqrt{\langle v, v \rangle} = |\lambda| \cdot |v|\,.$$

Der Beweis der Dreiecksungleichung basiert auf der Cauchy-Schwarz-Ungleichung. □

Ungleichung von Cauchy und Schwarz

Satz (Cauchy–Schwarz)

Für alle Vektoren $u,\ v \in \mathbb{C}^n$ gilt $|\langle u, v\rangle| \leqslant |u|\,|v|$.

Beweis: Die Ungleichung gilt offensichtlich falls v der Nullvektor ist und wir können somit annehmen, dass v nicht der Nullvektor ist.
Für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

$$0 \leqslant |u - \lambda v|^2 = \langle u - \lambda v, u - \lambda v\rangle$$

und aus der Linearität und Symmetrie des Skalarproduktes folgt

$$\langle u - \lambda v, u - \lambda v\rangle = \langle u, u\rangle - \bar{\lambda}\langle u, v\rangle - \lambda\langle v, u\rangle + |\lambda|^2\langle v, v\rangle\,.$$

Da v nicht der Nullvektor ist, können wir $\lambda = \frac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle}$ einsetzen und erhalten

$$0 \leqslant \langle u, u\rangle - \frac{|\langle u, v\rangle|^2}{\langle v, v\rangle} = |u|^2 - \frac{|\langle u, v\rangle|^2}{|v|^2} \quad\Longrightarrow\quad |\langle u, v\rangle|^2 \leqslant |u|^2\,|v|^2$$

und die Ungleichung folgt durch Wurzelziehen auf beiden Seiten. $\square$

Beweis der Dreiecksungleichung $|u+v| \leqslant |u| + |v|$

Beweis: Seien u, $v \in \mathbb{C}^n$ beliebig. Mit den Rechenregeln erhalten wir

$$|u+v|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \overline{\langle u,v\rangle} + \langle v,v\rangle$$

und, da $\langle u,v\rangle + \overline{\langle u,v\rangle}$ der zweimal Realteil $\Re(\langle u,v\rangle)$ von $\langle u,v\rangle$ ist, gilt

$$|u+v|^2 = |u|^2 + 2\,\Re(\langle u,v\rangle) + |v|^2\,.$$

Wegen $\Re(z) \leqslant |z|$ für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$, folgt mit der CAUCHY-SCHWARZ-Ungleichung

$$2\,\Re(\langle u,v\rangle) \leqslant 2\,|\langle u,v\rangle| \leqslant 2\,|u||v|$$

und

$$|u+v|^2 \leqslant |u|^2 + 2\,|u||v| + |v|^2 = (|u|+|v|)^2\,,$$

wodurch sich die Ungleichung

$$|u+v| \leqslant |u| + |v|$$

nach Wurzelziehen auf beiden Seiten ergibt. □

2. Lineare Gleichungssysteme

Lineare Gleichungssysteme

Definition

Eine lineare Gleichung über einem Körper $\mathbb{K}$ in den Variablen $x_1, \dots, x_n$ ist eine Gleichung der Form

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$$

wobei die Koeffizienten a_i und b Elemente von $\mathbb{K}$ sind.
Die Lösungsmenge der Gleichung ist die Menge

$$\big\{(y_1, \dots, y_n) \in K^n \colon a_1y_1 + \cdots + a_ny_n = b\big\}\,.$$

Ein lineares Gleichungssystem über $\mathbb{K}$ in den Variablen $x_1, \dots, x_n$ besteht aus mehreren linearen Gleichungen über $\mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} a_{11}\,x_1 + \cdots + a_{1n}\,x_n &= b_1 \\ a_{21}\,x_1 + \cdots + a_{2n}\,x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Ein n-Tupel $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ löst das Gleichungssystem, wenn $(y_1, \dots, y_n)$ jede der m linearen Gleichungen erfüllt. Die Lösungsmenge des Gleichungssystems ist der Durchschnitt der Lösungsmengen der einzelnen Gleichungen.

Lösungen von Gleichungssystemen

Definition

Ein Gleichungssystem heißt:

- konsistent/lösbar, falls überhaupt eine Lösung existiert.
- inkonsistent/unlösbar, falls keine Lösung existiert.
- homogen, falls $b_1 = \cdots = b_m = 0$ gilt.

Wir nennen zwei lineare Gleichungssysteme in denselben Variablen äquivalent, falls sie dieselben Lösungsmengen haben.

Bemerkungen:

- jedes homogene Gleichungssystem in n Variablen hat die triviale Lösung $(0, \ldots, 0) \in \mathbb{K}^n$
- homogene Gleichungssysteme können aber außer der trivialen Lösung noch weitere Lösungen haben

Koeffizientenmatrix und Matrixdarstellung

Für ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}\,x_1 + \dots + a_{1n}\,x_n &= b_1 \\ a_{21}\,x_1 + \dots + a_{2n}\,x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

definiert man die Koeffizientenmatrix A und die erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Das Gleichungssytem enstspricht dann der Matrizengleichung

$$Ax = b \text{ für die Spaltenvektoren } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times 1} \text{ und } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m \times 1}.$$

Beispiel

Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

über $\mathbb{R}$ hat die Koeffizientenmatrix, erweiterte Koeffizientenmatrix und Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}, \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right) \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- das Gleichungssystem hat drei Variablen und drei Gleichungen,
- es ist nicht homogen
- und $(1, 2, 3)$ ist die einzige Lösung.

Elementare Umformungen

- einfache Umformungen zur Lösung linearer Gleichungssysteme

Definition

Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ über einem Körper $\mathbb{K}$ Die folgenden Operationen nennen wir elementare Gleichungsumformungen:

(a) Vertauschen zweier Gleichungen

(b) Multiplikation einer Gleichung mit $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$

(c) Addition eines Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen Gleichung

Satz

Elementare Gleichungsumformungen ändern die Lösungsmenge nicht, d. h. das umgeformte System und das Ausgangssystem sind äquivalent.

Beweis:

- offensichtlich für (a)
- klar für (b), da jede Lösung erhalten bleibt und die Umformung wegen $\alpha \neq 0$ umkehrbar ist,
- folgt ebenso für (c), Lösung bleibt erhalten und Umformung ist umkehrbar $\square$

Satz

Der Satz gilt analog für entsprechende Zeilenoperationen auf der erweiterten Koeffizientenmatrix.

Zeilenstufenform

Definition (Zeilenstufenform)

Eine Matrix ist in Zeilenstufenform wenn folgende Punkte erfüllt sind:

(a) Alle Zeilen, die nur Nullen enthalten, stehen unten in der Matrix.

(b) Wenn eine Zeile nicht nur Nullen enthält, so ist der am weitesten links stehende, von Null verschiedene Eintrag eine Eins (die führende Eins dieser Zeile).

(c) Für je zwei verschiedene Zeilen, die nicht nur Nullen enthalten, steht die führende Eins der oberen Zeile echt weiter links als die führende Eins der unteren Zeile.

Bemerkung:

- in einer Matrix in Zeilenstufenform stehen unter führenden Einsen nur Nullen
- stehen auch über den führenden Einsen nur Nullen, so ist die Matrix in reduzierter Zeilenstufenform

Beispiele

- $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ nicht in Zeilenstufenform

- $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ in ZSF, aber nicht in red. ZSF

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ in red. ZSF

Rückwärtseinsetzen

- lineare Gleichungssysteme mit erweiterte Koeffizientenmatrix in Zeilenstufenform lassen sich leicht durch Rückwärtseinsetzen lösen

Beispiel

Wir betrachten über $\mathbb{R}$ das Gleichungssystem mit erweiterter Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 2 & 9 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

- letzte Zeile ergibt: $x_3 = 1 - 2x_4$
- vorletzte Zeile ergibt: $x_2 = 3 + 7x_3 + x_4$ und Einsetzen von x_3 führt zu

$$x_2 = 3 + 7(1 - 2x_4) + x_4 = 10 - 13x_4$$

- erste Zeile ergibt: $x_1 = 2 - 4x_2 - 2x_3 - 9x_4$ und mit Einsetzen von x_3 und x_2

$$x_1 = 2 - 4(10 - 13x_4) - 2(1 - 2x_4) - 9x_4 = -40 + 47x_4$$

$\Rightarrow$ x_1, x_2 und x_3 sind durch x_4 eindeutig bestimmt, d. h. für beliebige Wahl von $x_4 = t \in \mathbb{R}$ erhalten wir eine Lösung des Gleichungssystems

$\Rightarrow$ Lösungsmenge ist die Menge $\{(-40 + 47t, 10 - 13t, 1 - 2t, t) \colon t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4$

- $(-40 + 47t, 10 - 13t, 1 - 2t, t)$ heißt allgemeine Lösung in Parameterform

Lösungsmengen via reduzierter ZSF

- (erweiterte) Koeffizientenmatrizen in reduzierter Zeilenstufenform ermöglichen direktes (ohne Rückwärtseinsetzen) ablesen der Lösungsmenge

Beispiel

Wir betrachten über $\mathbb{R}$ das Gleichungssystem mit erweiterter Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

- letzte Zeile ergibt: $x_3 = 3$
- erste Zeile ergibt: $x_1 = 4 - 2x_2$

$\Rightarrow$ x_3 ist eindeutig festgelegt,
x_1 ergibt sich für jede Wahl von x_2 in $\mathbb{R}$,

$\Rightarrow$ Parametrisierung $x_2 = t \in \mathbb{R}$ ergibt die Lösungsmenge

$$\big\{(4-2t, t, 3) \colon t \in \mathbb{R}\big\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

bzw. die allgemeine Lösung $(4-2t, t, 3)$ in Parameterform

Führende und freie Variablen

Definition

Für ein Gleichungssystem in den Variablen $x_1, \dots, x_n$ mit (erweiterter) Koeffizientenmatrix in Zeilenstufenform gilt:

- die Variable x_i heißt führend, falls die i-te Spalten eine führende Eins enthält;
- die anderen Variablen heißen frei.

Bemerkungen:

- in den vorherigen Beispielen ist x_4 frei und x_1, x_2, x_3 sind führend bzw. x_2 ist frei und x_1 und x_3 sind führend
- Werte der freien Variablen sind frei in $\mathbb{K}$ wählbar
- jede unabhängige Auswahl für alle freien Variablen definiert Lösungswerte der führenden Variablen
- die freien Variablen parametrisieren die Lösungsmenge

Gauß–Jordan-Verfahren

Satz

Mittels elementarer Zeilenumformungen lässt sich jede Matrix über einem Körper $\mathbb{K}$ in eine Matrix in reduzierter Zeilenstufenform überführen.

Beweise: Gauß–Jordan-Verfahren liefert folgenden Algorithmus:

(*a*) Wähle am weitesten links stehende Spalte der Matrix, die Werte ungleich Null enthält

(*b*) Ist der oberste Eintrag der gefundenen Spalte Null, dann tausche oberste Zeile mit einer Zeile, die in dieser Spalte keine Null hat

(*c*) Sei $\alpha \neq 0$ in der betrachteten Spalte der oberste Eintrag, dann multipliziere die erste Zeile der Matrix mit α^{-1} und erzeuge eine führende Eins

(*d*) Addiere/subtrahiere das jeweils passende Vielfache der ersten Zeile zu den anderen Zeilen, so dass alle Einträge unter der führenden Eins der ersten Zeile Null werden

(*e*) Wiederhole Schritte (*a*)–(*d*) angewendet auf die Matrix an, die man durch Streichen der ersten Zeile erhält und iteriere das Verfahren bis die Matrix Zeilenstufenform hat

(*f*) Beginnend mit der letzten Zeile die nicht nur Nullen enthält, addiere/subtrahiere geeignete Vielfache dieser Zeile zu den darüber liegenden Zeilen, um über der führenden Eins Nullen zu erzeugen

Der Algorithmus terminiert, da sich bei jedem Durchlauf der Schritte (*a*)–(*d*) und jeder Iteration von (*f*) jeweils die Anzahl der zu betrachtenden Zeilen um eine verringert. □

Gauß–Jordan-Verfahren — Bemerkungen

- Verfahren verwendet nur elementare Umformungen und ändert somit die Lösungsmenge linearer Gleichungssysteme nicht

$\Rightarrow$ Lösungsverfahren, indem die erweiterte Koeffizientenmatrix mit dem Gauß–Jordan-Verfahren in reduzierte Zeilenstufenform gebracht wird

- in manchen Fällen ist es effizienter, den Schritt (f) wegzulassen und die Lösungen eines Gleichungssystems anhand der erweiterten Koeffizientenmatrix in Zeilenstufenform durch Rückwärtseinsetzen zu bestimmen $\longrightarrow$ Gauß-Verfahren

- Zeilenstufenform einer Matrix ist im Allgemeinen nicht eindeutig
- reduzierte Zeilenstufenform einer Matrix ist eindeutig

Beispiel: Gauß-Verfahren

Wir lösen das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

Führende Eins ist bereits in erster Zeile und Spalte und wir führen direkt Schritt (d) aus:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-2) \quad \cdot(-3) \\ + \\ \quad\quad\quad + \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array}\right)$$

Mit Schritt (c) führende Eins in zweiter Zeile herstellen und dann Schritt (d) ausführen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array}\right) \mid : 2 \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-3) \\ + \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right)$$

Schließlich multiplizieren wir die letzte Zeile mit -2 (Schritt (c)), um eine führende Eins zu erhalten

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right) \mid \cdot (-2) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \text{ in ZSF}.$$

Beispiel: Gauß-Verfahren — Rückwärtseinsetzten

Mit dem Gauß-Verfahren haben wir die erweiterte Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssytems

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

in Zeilenstufenform gebracht

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Rückwärtseinsetzen ergibt die eindeutige Lösung:

$$z = 3\,, \qquad \begin{aligned} y &= -\frac{17}{2} + \frac{7}{2}z \\ &= 2\,, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &= 9 - y - 2z \\ &= 9 - 2 - 6 \\ &= 1\,. \end{aligned}$$

Beispiel: Gauß–Jordan-Verfahren

Mit dem Gauß-Verfahren haben wir die erweiterte Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssytems

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

in Zeilenstufenform gebracht

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Für die reduzierte ZSF beginnen wir mit der dritten Zeile und führen Schritt (f) aus:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ + \\ \cdot\frac{7}{2} \quad \cdot(-2) \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Schließlich substrahieren wir die zweite Zeile von der ersten Zeile (Schritt (f)) und erhalten

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ \cdot(-1) \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

die reduzierte Zeilenstufenform. Wir können direkt die Lösung $x = 1$, $y = 2$ und $z = 3$ ablesen.

Inkonsistentes Beispiel

Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x &= 6 \\ x + y &= 0 \\ x + 2y &= 0. \end{aligned}$$

und die erweiterte Koeffizientenmatrix lautet

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Die Anwendung des Gauß-Verfahrens liefert die Zeilenstufenform

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 2 & -6 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Damit ergibt sich $0 = 0x + 0y = 1$ ↯

$\Longrightarrow$ das Gleichungssystem is also unlösbar.

Allgemeine Fälle für reellwertige lineare Gleichungssysteme

Für lineare Gleichungssysteme über den reellen Zahlen treten also genau drei mögliche Fälle auf:

- ein lineares Gleichungssystem ist eindeutig lösbar,
- es ist unlösbar
- oder es gibt unendlich viele verschiedene Lösungen.

Bemerkung:

- wir werden später sehen, dass es über $\mathbb{R}$ keine weiteren Fälle gibt

3. Vektorräume

Vektorräume

Definition (Vektorraum)

Sei $\mathbb{K} = (\mathbb{K}, +_{\mathbb{K}}, \cdot_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, 1_{\mathbb{K}})$ ein Körper und V eine Menge auf denen Abbildungen

$$+ \colon V \times V \longrightarrow V \qquad \text{und} \qquad \cdot \colon \mathbb{K} \times V \longrightarrow V$$

definiert sind. Dann ist $(V, +, \cdot)$ ein Vekrtorraum über $\mathbb{K}$ (kurz: $\mathbb{K}$-Vektorraum), falls folgende Axiome erfüllt sind:

(*a*) $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

(*b*) Für alle Vektoren u, $v \in V$ und Skalare α, $\beta \in \mathbb{K}$ gelten die Rechenregeln:

- (*i*) $\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha \cdot_{\mathbb{K}} \beta) \cdot u$,
- (*ii*) $1_{\mathbb{K}} \cdot u = u$,
- (*iii*) $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$,
- (*iv*) $(\alpha +_{\mathbb{K}} \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$.

Bereits bekannte Beispiele:

- $V = \mathbb{K}^n$ mit Vektoraddition und Multiplikation mit Skalaren
- $V = \mathbb{K}^{m \times n}$ mit Matrizenaddition und Multiplikation mit Skalaren

Einfache Rechenregeln

Lemma

Für jeden $\mathbb{K}$-Vektorraum V und für alle $v \in V$, den Nullvektor $0_V \in V$ und jedes $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt:

(*1*) $\alpha \cdot 0_V = 0_V$
(*2*) $0 \cdot v = 0_V$
(*3*) $(-1) \cdot v = -v$
(*4*) $\alpha \cdot v = 0_V \implies \alpha = 0$ oder $v = 0_V$.

Beweis: (*1*) Nach den Axiomen für Vektorräume gilt

$$\alpha \cdot 0_V = \alpha \cdot \big(0_V + 0_V\big) = \alpha \cdot 0_V + \alpha \cdot 0_V \implies 0_V = \alpha \cdot 0_V .$$

(*2*) folgt ganz ähnlich aus $0 \cdot v = (0+0) \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v \implies 0_V = 0 \cdot v$.
(*3*) folgt aus $v + (-1) \cdot v = 1 \cdot v + (-1) \cdot v = (1-1) \cdot v = 0 \cdot v = 0_V$,
$\implies (-1) \cdot v$ is additiv invers zu v.
(*4*) Angenommen $\alpha \neq 0$. Dann gilt:

$$v = 1 \cdot v = (\alpha^{-1}\alpha) \cdot v = \alpha^{-1}(\alpha \cdot v) \overset{\text{Ann. }(4)}{=} \alpha^{-1} \cdot 0_V \overset{(1)}{=} 0_V . \qquad \square$$

Vektorräume — Polynomen- und Funktionenräume

Polynome als Vektorraum

Die Menge der Polynome $V = \mathbb{K}[X]$ bildet einen $\mathbb{K}$-Vektorraum mit der Polynomaddition und der Multiplikation mit Skalaren ($\cong$ konstante Polynome).

Funktionen als Vektorraum

Sei X eine Menge, dann ist die Menge

$$V = \{f : f \text{ ist eine Funktion von } X \text{ nach } \mathbb{K}\}$$

für einen Körper $\mathbb{K}$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit der punktweisen Addition und Multiplikation definiert für alle Elemente $x \in X$ durch

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \qquad \text{und} \qquad (\alpha \cdot f)(x) := \alpha f(x)$$

für alle Funktionen $f, g \in V$ und alle Skalare $\alpha \in \mathbb{K}$.

Vektorräume — Homogene lineare Gleichungssysteme

Lösungen homogener linearer Gleichungssysteme

Sei $Ax = 0$ ein homogenes lineares Gleichungssystem über einem Körper $\mathbb{K}$, d. h. für natürliche Zahlen m und n ist

- $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ eine Matrix,
- x ist ein Spaltenvektor der Länge n
- und $0_{\mathbb{K}^m}$ ist der Nullvektor in $\mathbb{K}^m$.

Offensichtlich folgt für zwei Lösungsvektoren u und v aus $Au = 0_{\mathbb{K}^m}$ und $Av = 0_{\mathbb{K}^m}$ auch

$$A(u+v) = Au + Av = 0_{\mathbb{K}^m} + 0_{\mathbb{K}^m} = 0_{\mathbb{K}^m}$$

und für jedes $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt

$$A(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot (Au) = \alpha \cdot 0_{\mathbb{K}^m} = 0_{\mathbb{K}^m}\,.$$

$\Longrightarrow$ Lösungen sind abgeschlossen unter Vektoradditionen und Multiplikation mit einem Skalar und man prüft leicht nach, dass für festes A die Lösungsvektoren

$$\{v \in \mathbb{K}^{n\times 1} \colon Av = 0_{\mathbb{K}^m}\}$$

des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$, einen $\mathbb{K}$-Vektorraum bilden.

Untervektorräume

Definition

Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq V$ ist ein Untervektorraum (einfach Unterraum), falls gilt:

(a) Für alle $u, v \in U$ ist $u + v \in U$.

(b) Für alle $u \in U$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$ ist $\lambda u \in U$.

Bemerkungen:

- Unterräume sind selber Vektorräume
- V selbst und $\{0_V\}$ sind triviale Unterräume von V
- $\mathbb{R}^7$ ist formal **kein** Unterraum von $\mathbb{R}^{12}$
- Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$ in n Variablen über $\mathbb{K}$ ist ein Unterraum von $\mathbb{K}^n$
- Lösungsmenge eines **nicht**homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = b$ in n Variablen $\mathbb{K}$ ist **kein** Unterraum von $\mathbb{K}^n$, da

  $$Au = b \quad \text{und} \quad Av = b \quad \Longrightarrow \quad A(u + v) = Au + Av = 2b\,,$$

  und somit ist $u + v$ keine Lösung, wenn b nicht der Nullvektor ist.
- $U := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n : x_1 = 0\}$ ist ein Unterraum von $\mathbb{K}^n$
- Menge der Polynome über $\mathbb{K}$, deren Grad höchstens 5 ist, ist ein Unterraum des $\mathbb{K}$-Vektorraumes aller Polynome über $\mathbb{K}$

Linearkombination von Vektoren

Definition

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum $v_1, \dots, v_r \in V$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$.

- Ein Ausdruck der Form
$$\lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_r \cdot v_r$$
heißt Linearkombination der Vektoren $v_1, \dots, v_r$.
- Sind die Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ alle $0 \in \mathbb{K}$, so sprechen wir von der trivialen Linearkombination, welche den Nullvektor $0_V \in V$ ergibt.
- Im Spezialfall $r = 0$ der leeren Linearkombination, erhalten wir auch den Nullvektor 0_V.

Definition (Lineare Hülle)

Für eine Menge $U \subseteq V$ von Vektoren eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V definieren wir die lineare Hülle
$$\operatorname{span}(U) := \left\{\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_r u_r \colon r \in \mathbb{N}_0\,,\ u_1, \dots, u_r \in U \text{ und } \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}\right\},$$
als die Menge aller endlichen Linearkombinationen von Vektoren aus U.

Lineare Hüllen erzeugen Unterräume

Lemma

Für alle $U \subseteq V$ eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V ist $\operatorname{span}(U)$ ein Unterraum von V.

Beweis:

- Falls $U = \varnothing$, dann enthält $\operatorname{span}(U)$ nur die triviale Linearkombination, d. h. $\operatorname{span}(U) = \{0_V\}$ ist trivialer Unterraum von V.
- Seien $v, w \in \operatorname{span}(U)$ beliebig. Dann gibt es $r, s \in \mathbb{N}_0$, Vektoren $u_1, \dots, u_r, u'_1, \dots, u'_s \in U$ und Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_r, \mu_1, \dots, \mu_s \in \mathbb{K}$, so dass
$$v = \lambda_1 u_1 + \dots \lambda_r u_r \qquad \text{und} \qquad w = \mu_1 u'_1 + \dots + \mu_s u'_s\,.$$
$$\implies v + w = (\lambda_1 u_1 + \dots \lambda_r u_r) + (\mu_1 u'_1 + \dots + \mu_s u'_s) \in \operatorname{span}(U)$$
- Ebenso für
$$v = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_r u_r \in \operatorname{span}(U) \quad \text{und} \quad \alpha \in \mathbb{K}$$
gilt
$$\alpha v = \alpha\big(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_r u_r\big) = (\alpha\lambda_1) u_1 + \dots + (\alpha\lambda_r) u_r \in \operatorname{span}(U)\,.$$

$\square$

Beispiele im $\mathbb{R}^3$

Standardbasis

Für $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1) \in \mathbb{R}^3$ und beliebige α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ ist

$$\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = (\alpha, \beta, \gamma)$$

und somit gilt $\operatorname{span}(e_1, e_2, e_3) = \mathbb{R}^3$.

Ein echter Unterraum

Für $u = (1,-2,0)$, $v = (0,1,0)$, $w = (1,0,0) \in \mathbb{R}^3$gilt

$$u = w - 2v \qquad \text{und} \qquad v = -\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}w \qquad \text{und} \qquad w = u + 2v$$

und somit folgt

$$\operatorname{span}(u,v,w) = \operatorname{span}(v,w) = \operatorname{span}(u,w) = \operatorname{span}(u,v)\,.$$

Hier sehen wir dann leicht ein

$$\operatorname{span}(v,w) = \big\{(\alpha,\beta,0)\colon \alpha,\beta \in \mathbb{R}\big\} \subsetneq \mathbb{R}^3\,.$$

Beispiele im $\mathbb{R}[X]$

Polynome mit Nullstelle in 0

Sei U die Menge der Polynome ohne konstanten Term, d. h.

$$U = \{\alpha_n X^n + \cdots + \alpha_2 X^2 + \alpha_1 X \colon n \in \mathbb{N} \text{ und } \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}[X] .$$

Dann gilt

$$U = \mathrm{span}(U) = \{p \in \mathbb{R}[X] \colon p(0) = 0\} .$$

Polynome mit beschränktem Grad

Für $f = 1$, $g = X$ und $h = X^2 \in \mathbb{R}[X]$ erhalten wir

$$\mathrm{span}(f, g, h) = \{p \in \mathbb{R}[X] \colon \mathrm{grad}(p) \leqslant 2\} .$$

Lineare Unabhängigkeit

Definition

Eine endliche Menge von Vektoren $v_1, \dots, v_r$ in einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V heißen linear unabhängig, falls die einzigen Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ mit

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r = 0_V$$

die Skalare

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$$

sind. D. h.

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r = 0_V \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0\,.$$

Eine unendliche Menge von Vektoren $U \subseteq V$ ist linear unabhängig, wenn jede endliche Teilmenge von U linear unabhängig ist.

Beispiel linear unabhängiger Vektoren

Beispiel im $\mathbb{R}^3$

Wir betrachten $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$. Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

gilt. D. h. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sind Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems, dessen Koeffizientenmatrix die Spalten v_1, v_2 und v_3 hat

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mit dem Gauß–Jordan-Verfahren erhalten wir die reduzierte Zeilenstufenform der erweiterten Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \quad \longrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

welches nur die triviale Lösung $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$ hat.

$\Longrightarrow$ Vektoren v_1, v_2 und v_3 sind linear unabhängig.

Beispiel linear abhängiger Vektoren

Beispiel im $\mathbb{R}^3$

Wir betrachten $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (1,1,0)$, $v_3' = (3,1,2) \in \mathbb{R}^3$. Das Gauß–Verfahren ergibt folgende Zeilenstufenform der entsprechenden erweiterteten Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \qquad \longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Insbesondere ist x_3 eine freie Variable und das Gleichungssystem hat unendliche viele nichttriviale Lösungen.

$$\Longrightarrow \text{Vektoren } v_1,\ v_2 \text{ und } v_3' \text{ sind linear abhängig.}$$

Zum Beispiel: Für $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = -1$ erhalten wir

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3' = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Beispiel über $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

Beispiel im $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$

Wir betrachten $u_1 = (2,2,0,1)$, $u_2 = (1,1,1,2)$, $u_3 = (0,1,1,0) \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$. Das Gauß–Verfahren ergibt folgende Zeilenstufenform der entsprechenden erweiterteten Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid \cdot 2 \quad \cdot 2 \\ + \\ \\ + \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Das Gleichungssystem ist also eindeutig lösbar ist und somit gibt es nur die triviale Lösung.

$$\Longrightarrow \text{Vektoren } u_1,\ u_2 \text{ und } u_3 \text{ sind linear unabhängig.}$$

Beispiele mit Polynomen

Beispiel im $\mathbb{R}[X]$

Die Polynome $p_1 = 2X$, $p_2 = 3X^2$ und $p_3 = 6X^2 - 3X$ sind linear abhängig, da

$$3p_1 - 4p_2 + 2p_3 = 6X - 12X^2 + 12X^2 - 6X = 0\,,$$

es gibt also eine nichttriviale Linearkombination von p_1, p_2 und p_3 die das Nullpolynom ergibt.

Beispiel im $\mathbb{C}[X]$

Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{C}[X]$ der Polynome über dem Körper der komplexen Zahlen. Die Menge der Monome

$$M = \{X^n \colon n \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathbb{C}[X]$$

ist offensichtlich linear unabhängig, da für jede endliche Teilmenge aus

$$\lambda_1 X^{n_1} + \dots + \lambda_r X^{n_r} = 0$$

folgt

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0\,.$$

Abhängigkeitskriterium

Lemma (Abhängikeitskriterium)

Seien $v_1, \ldots, v_r$ linear abhängige Vektoren in einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Dann lässt sich einer der Vektoren als Linearkombination der restlichen Vektoren darstellen, d. h. es existiert ein $i \in [r]$, so dass v_i eine Linearkombination der Vektoren $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_r$ ist.

Beweis: Da die leere Menge von Vektoren linear unabhängig ist, gilt $r \geqslant 1$. Falls $r = 1$ ist, dann ist v_1 der Nullvektor, da dies der einzige Vektor ist, für den die Gleichung $\lambda v = 0$ für $\lambda \neq 0$ erfüllbar ist. In diesem Fall ist v_1 die Linearkombination der leeren Summe und das Lemma gilt.

Somit können wir $r \geqslant 2$ annehmen. Sei $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r = 0$ eine nicht triviale Linearkombination, d. h. es gibt ein $i \in [r]$ mit $\lambda_i \neq 0$ und wir erhalten

$$-\lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \lambda_r v_r$$

und nach Multiplikation beider Seiten mit $-\lambda_i^{-1}$ ergibt sich die gesuchte Darstellung von v_i. $\square$

Bemerkung: Es gilt auch die Umkehrung, d. h. wenn ein Vektor die Linearkombination der Anderen ist, dann ist die Familie linear abhängig.

Erzeugendensystem und Basis

Definition

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $U \subseteq V$. Die Menge der Vektoren U ist ein Erzeugendensystem von V (bzw. U erzeugt V), falls

$$\mathrm{span}(U) = V\,.$$

Sind die Vektoren in U darüberhinaus linear unabhängig, dann ist U eine Basis von V.

Bemerkungen:

- Wir hatten bereits gesehen, dass $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ und $e_3(0,0,1)$ den $\mathbb{R}^3$ erzeugen und offensichtlich sind die Vektoren linear unabhängig. Somit ist e_1, e_2, e_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$.
- Allgemeiner bilden die Einheitsvektoren $e_i = (0,\dots,0,1,0,\dots,0) \in \mathbb{K}^n$ mit der Eins an der i-ten Stelle für $i \in [n]$ die Standardbasis des $\mathbb{K}^n$.
- Ganz ähnlich sieht man ein, dass die Monome $\{X^n \colon n \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathbb{K}[X]$ eine Basis der Polynome über $\mathbb{K}$ bilden.
- Die leere Menge $\varnothing$ ist eine Basis vom Nullvektorraum $\{0\}$.

Beispiel im $\mathbb{R}^3$

Beispiel

Gegeben seien wieder die Vektoren $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (1,1,0)$ und $v_3 = (1,2,3) \in \mathbb{R}^3$, für die wir die lineare Unabhängigkeit bereits überprüft haben. Um zu zeigen, dass diese Vektoren den ganzen $\mathbb{R}^3$ erzeugen, müssen wir für $b = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ beliebig, dass lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

lösen. Mit den gleichen Zeilenumformungen, wie bei der Überprüfung der linearen Unabhängigkeit, überführen wir die erweiterte Koeffizientenmatrix in reduzierte Zeilenstufenform und erhalten

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 2 & \beta \\ 1 & 0 & 3 & \gamma \end{array}\right) \qquad \longrightarrow \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_3 \end{array}\right)$$

und erhalten die Lösung $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = b$.

$\Longrightarrow$ Vektoren v_1, v_2 und v_3 sind eine Basis vom $\mathbb{R}^3$.

Basen erlauben eindeutige Darstellungen

Lemma

Eine Menge von Vektoren $v_1, \dots, v_r \in V$ bildet genau dann eine Basis des $\mathbb{K}$-Vektorraums V, wenn es für alle Vektoren $w \in V$ eindeutig bestimmte Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ gibt, so dass

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r = w\,.$$

Beweis: „$\Longrightarrow$“ Angenommen

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r = w = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_r v_r$$

dann folgt

$$(\lambda_1 - \mu_1) v_1 + \cdots + (\lambda_r - \mu_r) v_r = 0$$

und die lineare Unabhängigkeit erzwingt für alle $i \in [r]$

$$\lambda_i - \mu_i = 0$$

was $\lambda_i = \mu_i$ und somit die Eindeutigkeit der Linearkombination zeigt.

Eindeutige Darstellungen definieren Basen

Lemma

Eine Menge von Vektoren $v_1, \dots, v_r \in V$ bildet genau dann eine Basis des $\mathbb{K}$-Vektorraums V, wenn es für alle Vektoren $w \in V$ eindeutig bestimmte Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ gibt, so dass

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r = w\,.$$

Beweis: „$\Longleftarrow$“ Die Voraussetzung angewendet auf $w = 0$ besagt, dass es nur eine Linearkombination

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r = 0$$

für den Nullvektor gibt. Da $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$ eine solche Darstellung ist und diese die einzige ist, sind die Vektoren $v_1, \dots, v_r$ also linear unabhängig. Da es nach Voraussetzung für jedes $w \in V$ eine Linearkombination gibt, folgt auch unmittelbar

$$\operatorname{span}(v_1, \dots, v_r) = V\,.$$

$\square$

Beispiel im $\mathbb{R}^3$

Beispiel

Gegeben seien wieder $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (1,1,0)$ und $v_3 = (1,2,3) \in \mathbb{R}^3$, für die wir bereits wissen, dass sie eine Basis bilden. Wir wollen $(0,2,1)$ als Linearkombination von v_1, v_2 und v_3 darstellen. Dafür lösen wir

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 \end{array}\right)$$

und erhalten die Lösung

$$-\frac{5}{4}v_1 + \frac{1}{2}v_2 + \frac{3}{4}v_3 = \left(-\frac{5}{4}, 0 - \frac{5}{4}\right) + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) + \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right) = (0,2,1)\,.$$

Bemerkungen:

- Die eindeutig bestimmten Skalare der Linearkombination eines Vektors bzgl. einer Basis heißen Koordinaten des Vektors bezüglich der Basis.
- Bezüglich der Standardbasis sind die Koordinaten wie üblich die Einträge des Vektors selbst.

Basisergänzungssatz

Satz

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_s \in V$, so dass

(a) $v_1, \ldots, v_r$ sind linear unabhängig

(b) und $v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_s$ erzeugen den Vektorraum V.

Falls $v_1, \ldots, v_r$ keine Basis von V bilden, dann kann $v_1, \ldots, v_r$ durch Hinzufügen von Vektoren aus $\{w_1, \ldots, w_s\}$ zu einer Basis von V ergänzt werden.

Beweis: Wir können annehmen $\mathrm{span}(v_1, \ldots, v_r) \neq V$, da sonst $v_1, \ldots, v_r$ bereits eine Basis bilden. Weiterhin können wir annehmen, dass für ein $j \in [s]$ gilt

$$w_j \notin \mathrm{span}(v_1, \ldots, v_r)\,,$$

da sonst jeder Vektor w_j als Linearkombination der v_i darstellbar wäre und

$$\mathrm{span}(v_1, \ldots, v_r) = \mathrm{span}(v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_s) = V$$

zum Widerspruch führen würde. Falls es nun eine nichttriviale Linearkombination $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r + \beta w_j = 0$ gäbe, dann würde (a) $\beta \neq 0$ nach sich ziehen und nach Umstellung erhielten wir den Widerspruch

$$w_j = -\frac{\lambda_1}{\beta} v_1 - \cdots - \frac{\lambda_r}{\beta} v_r \in \mathrm{span}(v_1, \ldots, v_r)\,.$$

Folgerungen

- Fall $r = 0$ zeigt, dass jedes endliche Erzeugendensystem eine Basis enthält

$\Rightarrow$ jeder endlich erzeugte Vektorraum hat eine Basis

- Unendlich erzeugte Vektorräume, d. h. solche die sich nicht endlich erzeugen lassen wie z. B. $\mathbb{R}[X]$, haben auch eine Basis, aber für den Beweis verweisen wir in dieser Vorlesung auf die Literatur

Korollar

Sind $v_1, \ldots, v_r$ und $w_1, \ldots, w_s$ Basen von V, so gilt $r = s$.

Beweis (Idee): Schrittweise Ersetzung von $v_r, v_{r-1}, \ldots, v_1$ durch disjunkte nichtleere Teilmengen

$$\{w_{i_j} : j \in J_r\}, \ldots \{w_{i_j} : j \in J_1\},$$

wobei wir $\{w_{i_j} : j \in J_r\}$ durch Anwendung des Basisergänzungssatzes für $v_1, \ldots, v_{r-1}$ und $w_1, \ldots w_s$ erhalten.

$\Longrightarrow r \leqslant s$ und aus dem symmetrischen Argument folgt $s \leqslant r$. $\square$

Dimension eines Vektrorraums

- das Korollar zeigt Wohldefiniertheit der folgenden Definition

Definition (Dimension)

Sei V ein endlich erzeugter $\mathbb{K}$-Vektorraum, dann ist die Dimension von V ($\dim(V)$) die eindeutig bestimmte Zahl $n \in \mathbb{N}_0$, so dass jede Basis von V genau n Vektoren umfasst.

Bemerkungen:

- $\dim(\mathbb{K}^n) = n$
- auch im Spezialfall $n = 0$: $\mathbb{K}^0$ enthält nur das leere Tupel $(\,)$ als Nullvektor und die leere Menge ist Basis vom Nullvektorraum $\{0\} \cong \{(\,)\} = \mathbb{K}^0$
- für unendlich erzeugte Vektorräume V setzen wir $\dim(V) = \infty$.
- Dimension der Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems entspricht der Anzahl der freien Variablen und kann von der Zeilenstufenform abgelesen werden

Beispiel homogene Lösungen

Vier Gleichungen mit sechs Variablen über $\mathbb{R}$

Gegeben in erweiterter Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ -2 & -6 & -12 & -2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Gauß–Jordan- Verfahren ergibt reduzierte Zeilenstufenform

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -3 & -5 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Beispiel homogene Lösungen

Vier Gleichungen mit sechs Variablen über $\mathbb{R}$

Von der reduzierten Zeilenstufenform

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -3 & -5 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

lesen wir die allgemeine Lösung ab:

$$\begin{aligned} x_1 &= 3r + 5s + t, \\ x_2 &= -3r - 2s, \\ x_3 &= r, \\ x_4 &= s, \\ x_5 &= 3t, \\ x_6 &= t, \quad \text{für } r, s, t \in \mathbb{R} \text{ beliebig}. \end{aligned}$$

Beispiel homogene Lösungen

Vier Gleichungen mit sechs Variablen über $\mathbb{R}$

Diese Lösung können wir auch mit Hilfe von Vektoren wie folgt schreiben:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Offenbar ist jede Lösung des Gleichungssystems eine Linearkombinationen der Vektoren

$$v_1 = (3, -3, 1, 0, 0, 0)\,, \;\; v_2 = (5, -2, 0, 1, 0, 0) \text{ und } v_3 = (1, 0, 0, 0, 3, 1)\,.$$

D. h. $\operatorname{span}(v_1, v_2, v_3)$ ist die Menge der Lösungen und v_1, v_2, v_3 ist tatsächlich eine Basis des Lösungsraumes des Gleichungssystems.

Basen sind maximal linear unabhängig und minimal erzeugend

Korollar (Maximal linear unabhängig)

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\dim(V) = n$ und seien $v_1, \ldots, v_r \in V$ linear unabhängig. Dann gilt $r \leqslant n$.

Beweis: Folgt direkt aus dem Basisergänzungssatz. □

Korollar (Minimal erzeugend)

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\dim(V) = n$ und seien $v_1, \ldots, v_r$ ein Erzeugendensystem von V. Dann gilt $n \leqslant r$.

Beweis: Folgt direkt aus dem Basisergänzungssatz. □

Korollar

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\dim(V) = n$ und seien $v_1, \ldots, v_n \in V$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ sind linear unabhängig.

(b) Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ erzeugen V.

Beweis: ;-) Folgt direkt aus dem Basisergänzungssatz. □

Unterräume

Satz

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\dim(V) = n$ und U ein Unterraum von V. Dann ist U endlich erzeugt und $\dim(U) \leqslant n$, wobei $\dim(U) = n$ auch $U = V$ nach sich zieht.

Beweis: Sei $u_1, \dots, u_r$ eine maximale Menge linear unabhängiger Vektoren in U.

- die Vektoren sind auch linear unabhängig in V und somit gilt $r \leqslant n$
- falls $r = n$, dann bilden die Vektoren $u_1, \dots, u_n$ eine Basis von V und es folgt
$$U = V$$
- Maximalität und Basisergänzungssatz implizieren
$$\operatorname{span}(u_1, \dots, u_r) = U$$

$\square$

Unterräume des $\mathbb{R}^3$

- $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 \implies$ es gibt nur Unterräume mit Dimension 0, 1, 2 und 3
- $\{(0,0,0)\}$ ist der einzige Unterraum mit Dimension 0
- Geraden durch $(0,0,0)$ sind die eindimensionalen Unterräume von $\mathbb{R}^3$, d. h., für $u \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ Unterräume der Form

$$L_u = \Big\{\lambda \cdot u \colon \lambda \in \mathbb{R}\Big\} = \operatorname{span}(u)$$

- Ebenen durch den $(0,0,0)$ sind die zweidimensionalen Unterräume von $\mathbb{R}^3$, d. h., für linear unabhängige Vektoren u, $v \in \mathbb{R}^3$ Unterräume

$$E_{u,v} = \Big\{\lambda \cdot u + \mu \cdot v \colon \lambda, \mu \in \mathbb{R}\Big\} = \operatorname{span}(u, v)$$

- es gibt nur einen Unterraum der Dimension 3, nämlich $\mathbb{R}^3$ selber

Bemerkung: Für u, $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ gilt

$$L_u = L_v \quad\iff\quad v \in \operatorname{span}(u) \quad\iff\quad u \in \operatorname{span}(v)$$

Bestimmung von Basen im $\mathbb{K}^n$

Idee

- elementare Zeilenumformungen erzeugen ausschließlich Linearkombinationen der Zeilenvektoren
- elementare Zeilenumformungen sind umkehrbar (Rücktausch, Multiplikation mit α^{-1}, αv von u abziehen)

$\Rightarrow$ sind also $u_1, \ldots, u_r$ die Zeilen einer Matrix A und $v_1, \ldots, v_r$ die Zeilen einer Matrix die aus A durch eine Abfolge von elementaren Zeilenumformungen entstanden ist, dann gilt

$$\operatorname{span}(u_1, \ldots, u_r) = \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_r)$$

Satz

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und seien $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{K}^n$. Eine Basis des Unterraums $U = \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m)$ kann mit dem Gauß-Verfahren ermittelt werden.

Beweis: Überführe die $(m \times n)$-Matrix bestehend aus den Zeilenvektoren $v_1, \ldots, v_m$ mit elementaren Zeilenumformungen in Zeilenstufenform. Dann erzeugen die Zeilen, die nicht ausschließlich Nullen enthalten, den Unterraum U. Da die führenden Einsen in unterschiedlichen Spalten stehen, folgt die lineare Unabhängigkeit. $\square$

Beispiel im $\mathbb{R}^4$

Unterraum im $\mathbb{R}^4$

Seien die Vektoren $v_1 = (1, 2, 3, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1, 1)$ und $v_3 = (0, 2, 2, -1) \in \mathbb{R}^4$ gegeben und eine Basis von $U = \operatorname{span}(v_1, v_2, v_3)$ gesucht. Schreibe die Vektoren als Zeilen einer Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

und überführe diese mit dem Gauß-Verfahren in Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also gilt $\dim(U) = 2$ und $(1, 2, 3, 0)$, $(0, 1, 1, -1/2)$ bilden eine Basis von U.

Unterräume definiert durch Matrizen

Definition (Zeilen- und Spaltenraum)

Sei A eine $(m \times n)$-Matrix über einem Körper $\mathbb{K}$.

- Der Zeilenraum von A ist der von den Zeilen der Matrix A erzeugte Unterraum des $\mathbb{K}^n$.
- Der Spaltenraum von A ist der von den Spalten der Matrix A erzeugte Unterraum des $\mathbb{K}^m$.

Die Dimensionen dieser Unterräume bezeichnen wir als Zeilen- bzw. Spaltenrang von A.

Bemerkungen:

- offensichtlich entspricht der Zeilenrang der maximalen Anzahl linear unabhängiger Vektoren unter den Zeilen von A
- analog gilt entspricht der Spaltenrang der maximalen Anzahl linear unabhängiger Vektoren unter den Spalten von A
- demnächst werden wir sehen, dass der Zeilen- und Spaltenrang einer Matrix immer gleich ist

4. Lineare Abbildungen

Homomorphismen zwischen Vektorräumen

Definition (Lineare Abbildungen)

Eine Abbildung $f\colon V \longrightarrow W$ zwischen zwei $\mathbb{K}$-Vektorräumen V und W heißt linear, falls für alle $u, v \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$ folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) $f(u+v) = f(u) + f(v)$

(ii) und $f(\lambda v) = \lambda f(v)$.

Beispiel:

- $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $(x,y) \longmapsto x + 3y$ ist linear, da für alle (x,y), $(x',y') \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$\begin{aligned} f\big((x,y)+(x',y')\big) = f(x+x', y+y') &= (x+x') + 3(y+y') \\ &= x + 3y + x' + 3y' \\ &= f(x,y) + f(x',y') \end{aligned}$$

und für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f\big(\lambda(x,y)\big) = f\big((\lambda x, \lambda y)\big) = \lambda x + 3\lambda y = \lambda \cdot (x+3y) = \lambda f(x,y)\,.$$

Weitere Beispiele

Beispiel mit Polynomen $\mathbb{R}[X]$

Die Abbildung $f\colon \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $p \longmapsto p(17)$ ist linear, da

$$f\big((p+q)\big) = (p+q)(17) = p(17) + q(17) = f(p) + f(q)$$

und

$$f(\lambda p) = (\lambda p)(17) = \lambda p(17) = \lambda f(p)\,.$$

für alle Polynome p, $q \in \mathbb{R}[X]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ aus den Rechenregeln für Polynome folgt.

Beispiel mit Matrizen

Die Abbildung $g\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ 2y-z \end{pmatrix}$$

ist linear, was direkt aus den Rechenregeln der Matrizenmultiplikation folgt.

Lineare Abbildungen und Matrizen

Verallgemeinerung des letzten Beispiels

Für jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ ist $v \longmapsto Av$ eine lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$.

Satz

Für jede lineare Abbildung $f\colon \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ existiert eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, so dass für alle $v \in \mathbb{K}^n$ gilt

$$f(v) = Av\,.$$

Darüberhinaus ist A eindeutig bestimmt und für $j \in [n]$ ist die j-te Spalte von A durch $f(e_j)$ für den j-ten Einheitsvektor $e_j \in \mathbb{K}^n$ gegeben.

Letztes Beispiel wiederholt

$g\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+y+z \\ 2y-z \end{pmatrix}$ entspricht $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und

$$g(e_1) = g\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g(e_2) = g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g(e_3) = g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lineare Abbildungen und Matrizen – Beweis

Satz

Für jede lineare Abbildung $f\colon \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ existiert eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, so dass für alle $v \in \mathbb{K}^n$ gilt

$$f(v) = Av\,.$$

Darüberhinaus ist A eindeutig bestimmt und für $j \in [n]$ ist die j-te Spalte von A durch $f(e_j)$ für den j-ten Einheitsvektor $e_j \in \mathbb{K}^n$ gegeben.

Beweis: Für $v \in \mathbb{K}^n$ mit Koordinaten $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}$ und die Einheitsvektoren $e_1, \dots, e_n$ gilt

$$v = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n$$

und somit ergibt die Linearität von f

$$f(v) = v_1 f(e_1) + \dots + v_n f(e_n) \in \mathbb{K}^m\,.$$

D. h. für die Matrix A bestehend aus den Spalten $f(e_1), \dots, f(e_n)$ erhalten wir

$$f(v) = Av\,.$$

Für die Eindeutigkeit sei A' eine Matrix mit $A'v = f(v)$ für alle $v \in \mathbb{K}^n$. Dann gilt für die j-te Spalte a'_j von A' sofort $a'_j = A'e_j = f(e_j)$. $\square$

Lineare Abbildungen werden durch Basen festgelegt

- die Matrix A im letzten Satz war durch das Bild von f eingeschränkt auf die Einheitsvektoren eindeutig bestimmt

$\Rightarrow$ $f(e_1)\dots,f(e_n)$ definiert f vollständig

Verallgemeinerung für beliebige Basen

Sei $f\colon V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung zwischen $\mathbb{K}$-Vektorräumen und sei $u_1,\dots,u_n$ eine Basis von V.

Für beliebiges $v \in V$ gibt es eine eindeutig bestimmte Linearkombination

$$v = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$$

mit $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{K}$.

Aus der Linearität von f ergibt sich sofort

$$f(v) = f\big(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n\big) = \lambda_1 f(u_1) + \dots + \lambda_n f(u_n)$$

d. h. die Koordinaten von v bezüglich der Basis $v_1,\dots,v_n$ und f eingschränkt auf die Basis bestimmen bereits $f(v)$.

Komposition linearer Abbildungen

Satz

Seien $f\colon \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ und $g\colon \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K}^\ell$ lineare Abbildungen mit den entsprechenden Matrizen $F \in \mathbb{K}^{m\times n}$ and $G \in \mathbb{K}^{\ell\times m}$, d. h.

$$f(v) = Fv \quad \text{und} \quad g(u) = Gu$$

für alle $v \in \mathbb{K}^n$ und $u \in \mathbb{K}^m$.

Dann gilt für die Komposition $h = g \circ f\colon \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^\ell$ und $v \in \mathbb{K}^n$

$$h(v) = (GF)v\,.$$

Insbesondere ist h also eine lineare Abbildung mit entsprechender Matrix $H = GF$.

Beweis: Der Satz folgt direkt aus der Assoziativität der Matrizenmultiplikation durch

$$h(v) = (g \circ f)(v) = g\big(f(v)\big) = G \cdot (F \cdot v) = (G \cdot F) \cdot v = Hv\,.$$

$\square$

Unterräume assoziiert zu linearen Abbildungen

Definition (Kern und Bild)

Für eine lineare Abbildung $f\colon V \longrightarrow W$ zwischen $\mathbb{K}$-Vektorräumen definieren wir:

- den Kern
$$\ker(f) := \{v \in V : f(v) = 0_W\} \subseteq V$$

- und das Bild
$$\operatorname{im}(f) := \{f(v) : v \in V\} \subseteq W\,.$$

Lemma

Der Kern und das Bild jeder linearen Abbildung sind Unterräume.

Beweis:

- $f(0_V) = f(0_V + 0_V) = f(0_V) + f(0_V) \Longrightarrow f(0_V) = 0_W \Longrightarrow \ker(f) \neq \varnothing$
- $v,\ v' \in \ker(f) \Longrightarrow f(v + v') = f(v) + f(v') = 0_W$ und $f(\lambda v) = \lambda 0_W = 0_W$

$\Rightarrow$ $\ker(f)$ ist ein Unterraum von V

- Beweis für $\operatorname{im}(f)$ folgt direkt aus der Linearität von f $\square$

Bemerkungen

- $\mathrm{im}(f)$ hatten wir bereits allgemein in MafI1 für Abbildungen definiert
- $f\colon \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ linear mit entsprechender Matrix A (d. h. $f(v) = Av$)
  - der Kern von f ist: die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$
  - das Bild von f ist: der Spaltenraum von A
- die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ ist das Urbild von b unter der linearen Abbildung f gegeben durch $v \longmapsto Av$
- Existenz einer Lösung ist äquivalent zu:
  - b liegt im Spaltenraum von A
  - b liegt im Bild von f

Dimensionsformel

Satz (Dimensionsformel)

Sei $f\colon V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung zwischen $\mathbb{K}$-Vektorräumen und sei $\dim(V) < \infty$. Dann gilt

$$\dim(V) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{im}(f))\,.$$

Beweis: Wähle Basis $v_1, \dots, v_r$ von $\ker(f) \subseteq V$ und erweitere diese mit dem Basisergänzungssatz zu einer Basis

$$v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s$$

von ganz V. Insbesondere gilt also $r + s = \dim(V)$. Wir zeigen, $f(w_1), \dots, f(w_s)$ ist eine Basis von $\mathrm{im}(f) \subseteq W$.

(*1*) $\mathrm{span}(f(w_1), \dots, f(w_s)) = \mathrm{im}(f)$, da für beliebiges $y \in \mathrm{im}(f)$ ein $u \in V$ gibt, so dass:
$y = f(u) = f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r + \mu_1 w_1 + \dots + \mu_s w_s) = 0_W + \mu_1 f(w_1) + \dots + \mu_s f(w_s)$

(*2*) $f(w_1), \dots, f(w_s)$ sind linear unabhängig, da aus $\mu_1 f(w_1) + \dots + \mu_s f(w_s) = 0_W$ folgt:
$0_W = f(\mu_1 w_1 + \dots + \mu_s w_s) \Longrightarrow x = \mu_1 w_1 + \dots + \mu_s w_s \in \ker(f)$
d. h. falls $x \neq 0_V$, dann lässt sich x auch als nichttriviale Linearkombination von $v_1, \dots, v_r$ darstellen und somit hätte x zwei unterschiedliche Darstellungen durch die Basisvektoren $v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s$, was ein Widerspruch zur Eindeutigkeit der Darstellung ist. $\square$

Rang einer Matrix

Korollar

Der Zeilenrang einer Matrix ist gleich dem Spaltenrang.

Beweis: Für $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ mit Spaltenrang s sei $f\colon \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ gegeben durch $v \longmapsto Av$. D. h.

$$s = \dim(\mathrm{im}(f)) \quad \text{und} \quad r = \dim(\ker(f))\,.$$

mit $\ker(f) =$Lösungsmenge von $Ax = 0$. Nach der Dimensionsformel gilt

$$n = s + r\,.$$

Sei nun B die reduzierte Zeilenstufenform von A. Das Gleichungssystem $Bx = 0$ hat dieselbe Lösungsmenge wie $Ax = 0$. Insbesondere ist die Dimension des Lösungsraums von $Bx = 0$ auch r. D. h. B hat r freie Variablen und $n - r = s$ führende Einsen. Es gibt also s Zeilen, die nicht nur Nullen enthalten und somit gilt

$$s = \text{Zeilenrang von } B = \text{Zeilenrang von } A.$$

□

Definition (Rang)

Der Rang einer Matrix A ($\mathrm{rank}(A)$) ist der Zeilenrang von A.

Satz

Der Rang von A ist die Anzahl der von Null verschiedenen Zeilen der Matrix B in Zeilenstufenform, die durch elementare Zeilenumformungen aus A hervorgeht.

Beweis: Ergibt sich aus dem Beweis des Korollars. □

Rang und Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen

Satz

Für jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{K}^m$ ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ genau dann lösbar, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix A des Gleichungssystems gleich dem Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|b)$ ist.

Beweis: Seien $v_1, \dots, v_n$ die Spalten der Matrix A. Das Gleichungssystem $Ax = b$ ist also genau dann lösbar, wenn b eine Linearkombination der Spalten $v_1, \dots, v_n$ von A ist. D. h. $Ax = b$ is genau dann lösbar, wenn b ein Element des Spaltenraums von A ist und

$$\operatorname{span}(v_1, \dots, v_n) = \operatorname{span}(v_1, \dots, v_n, b)$$

gilt.

Insbesondere haben dann A und $(A|b)$ den gleichen Spaltenraum, Spaltenrang und Rang. $\square$

Beispiel

Betrachte eine gegebene Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauß}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \operatorname{rank}(A) = 2\,.$$

Für $b = (0, 1, -1)$ ergibt sich für die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauß}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ebenfalls Rang 2 und damit Lösbarkeit von $Ax = b$.

Für $b' = (0, 1, 1)$ erhalten wir aber

$$(A|b') = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauß}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

eine erweiterte Koeffizientenmatrix mit Rang $3 > \operatorname{rank}(A)$ und somit ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b'$ nicht lösbar.

Lösungsstruktur inhomogener linearer Gleichungssysteme

Satz

Für eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{K}^m$

- sei $U \subseteq \mathbb{K}^n$ der Unterraum der Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$
- und es sei $w \in \mathbb{K}^n$ eine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems $Ax = b$.

Dann ist die Lösungsmenge des inhomogenen Gleichungssystems $Ax = b$ gegeben durch

$$w + U := \{w + u \colon u \in U\}\,.$$

Bemerkung: Wenn das inhomogene Gleichungssystem also mindestens eine Lösung hat, dann ist die Lösungsmenge eine Nebenklasse des Unterraums der Lösungen des homogenen Gleichungssystems.

Beweis:

- falls v eine Lösung ist, d. h. $Av = b$, dann gilt für $u = w - v$
  $w + u = v$ und $Au = Aw - Av = b - b = 0 \implies u \in U$ und $v \in w + U$;
- für jedes $u \in U$ gilt offensichtlich $A(w + u) = Aw + Au = b + 0 = b$ und somit ist $w + U$ auch in der Lösungsmenge enthalten $\square$

Beispiel im $\mathbb{R}^3$

Wir betrachten das inhomogene lineare Gleichungssystem gegeben durch

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauß}-\text{Jordan}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wir setzten die freie Variable x_3 gleich 0 und erhalten eine Lösung w von $Ax = b$

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für das zugehörige homogene Gleichungssystem ergibt sich die reduzierte ZSF

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Wir erhalten die allgemeine homogene Lösung $x_1 = -t$, $x_2 = -t$ und $x_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$ und somit ist

$$U = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad w + U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Injektive lineare Abbildungen haben trivialen Kern

Lemma

Sei $f\colon V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei $\mathbb{K}$-Vektorräumen. Dann ist f genau dann injektiv, wenn $\ker(f) = \{0\}$ gilt.

Beweis: Wenn f injektiv ist, dann gibt es höchstens ein $v \in V$ mit $f(v) = 0$ und es gilt $f(0) = 0$. Damit gilt also $\ker(f) = \{0\}$.

Sei nun $\ker(f) = \{0\}$ und seien $v, w \in V$ mit $f(v) = f(w)$. Dann gilt

$$f(v - w) = f(v) - f(w) = 0\,.$$

Also ist $v - w \in \ker(f)$ und damit ist $v - w = 0$, also $v = w$ und somit ist f injektiv. $\square$

Korollar

Sei $f\colon V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei *n-dimensionalen* $\mathbb{K}$-Vektorräumen. Dann ist f genau dann injektiv, wenn f surjektiv ist.

Beweis: Lemma + Dimensionsformel $\square$

Isomorphismen

Lemma

Für jede bijektive lineare Abbildung $f\colon V \longrightarrow W$ zwischen zwei $\mathbb{K}$-Vektorräumen ist auch die Umkehrabbildung $f^{-1}\colon W \longrightarrow V$ linear.

Beweis: Für $w = f(v)$ und $w' = f(v')$ aus W beliebig ergibt sich $f^{-1}(w) = v$ und $f^{-1}(w') = v'$ und somit

$$f(v+v') = f(v)+f(v') = w+w' \implies f^{-1}(w+w') = v+v' = f^{-1}(w)+f^{-1}(w').$$

Ebenso für $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

$$f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda w \quad \implies \quad f^{-1}(\lambda w) = \lambda v = \lambda f^{-1}(w). \qquad \square$$

Definition (Isomorphismus)

Bijektive lineare Abbildungen zwischen $\mathbb{K}$-Vektorräumen heißen Isomorphismen.

Beispiel:

- Identität $\mathrm{id}_V\colon V \longrightarrow V$ definiert durch $v \longmapsto v$ ist ein Isomorphismus
- Matrix zu $\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}$ ist die Einheitsmatrix $E_n \in \mathbb{K}^{n\times n}$ deren i-te Spalte der i-te Einheitsvektor e_i in $\mathbb{K}^n$ ist, d. h. $\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}(v) = E_n \cdot v = v$

Invertierbare Matrizen

- für jeden lineare Abbildung $f\colon \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ existiert $A_f \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $f(v) = A_f \cdot v$
- ist f ein Isomorphismus, dann ist auch f^{-1} ein Isomorphismus und

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n} = f \circ f^{-1}$$

und somit gilt

$$A_{f^{-1}} \cdot A_f = E_n = A_f \cdot A_{f^{-1}}$$

Definition (Invertierbarkeit)

Für eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt eine Matrix $B \in \mathbb{K}^n$ inverse Matrix wenn

$$B \cdot A = E_n\,.$$

Da Inverse in Monoiden eindeutig sind (siehe MafI1) schreiben wir A^{-1} für B. Matrizen die Inverse haben, nennen wir invertierbar.

Die invertierbaren Matrizen in $\mathbb{K}^{n\times n}$ sind die Einheiten im Ring der Matrizen.

Invertierbarkeitskriterien

Satz

Für jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) A ist invertierbar,

(b) für alle $b \in \mathbb{K}^n$ hat das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ genau eine Lösung.

(c) A hat vollen Rang, d. h. $\operatorname{rank}(A) = n$.

Beweis: „$(a) \Longrightarrow (b)$“ Die Lösung $x = A^{-1}b$ ergibt sich durch die Existenz der Inversen. Wegen der Invertierbarkeit existiert die Umkehrabbildung von $v \longmapsto Av$ und somit ist diese injektiv und es kann keine zweite Lösung geben.

„$(b) \Longrightarrow (c)$“ Sei f_A die Abbildung $v \longmapsto Av$. Aus (b) folgt $\operatorname{im}(f_A) = \mathbb{K}^n$. D. h. der Spaltenraum hat Dimension n und (c) gilt.

„$(c) \Longrightarrow (a)$“ Aus $\operatorname{rank}(A) = n$ folgt $\operatorname{im}(f_A) = n$ und somit ist f_A eine surjektive Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^n$ und somit nach dem letzten Korollar auch injektiv. D. h. f_A ist bijektiv und somit umkehrbar und A damit invertierbar. □

Bemerkung: Aus $BA = E_n$ folgt $ABA = A$ und $(AB - E_n)A = 0 \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Da A invertierbar ist und vollen Rang hat, muss somit $AB - E_n = 0 \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gelten, d. h.

$$BA = E_n \qquad \Longrightarrow \qquad AB = E_n\,.$$

Ebenso folgt aus $AB = E_n$ auch $BA = E_n$. Insbesondere gilt also $AA^{-1} = E_n$ und $(A^{-1})^{-1} = A$.

Berechnung der Inversen

Idee:

- A invertierbar $\Longrightarrow Ax = e_i$ eindeutig lösbar

$\Rightarrow$ $AA^{-1} = E_n$ gleichbedeutend, dass der i-te Spaltenvektor von A^{-1} die Lösung von $Ax = e_i$ ist

Korollar

Invertierbarkeit kann mit dem Gauß-Verfahren überprüft und Inverse damit berechnet werden.

Beweis: Löse $Ax = e_i$ für die Einheitsvektoren $e_1, \ldots, e_n$ des $\mathbb{K}^n$, denn A ist genau dann invertierbar, wenn alle diese Gleichungssysteme eindeutig lösbar sind. $\square$

Bemerkung:
Anstelle alle diese n Gleichungssysteme einzeln zu lösen, können wir das Gauss-Jordan-Verfahren auf die $n \times 2n$-Matrix $(A|E_n)$ anwenden. Die Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn das Gauss–Jordan-Verfahren die Matrix A in die Einheitsmatrix E_n überführt und dann erhalten wir $(E_n|A^{-1})$ und können die inverse Matrix ablesen.

Beispiel

Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und wenden das Gauss–Jordan-Verfahren auf folgende Matrix an:

$$(A|E_n) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) = (E_n|A^{-1})$$

D. h. A ist invertierbar und

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Tatsächlich ergibt die Probe $A^{-1}A = E_n = AA^{-1}$ und z. B.

$$A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \text{löst} \quad Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Determinanten

Erinnerung:

- symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_n$ ist Menge der Permutationen auf $[n] = \{1, \dots, n\}$
- Permutation $\pi \in \mathcal{S}_n$ ist gerade/ungerade, wenn sie das Produkt von gerade/ungerade vielen Transpositionen ist und

$$\operatorname{sgn}(\pi) = \begin{cases} 1, & \pi \text{ ist gerade,} \\ -1, & \pi \text{ ist ungerade.} \end{cases}$$

Definition (Leibniz-Formel für Determinanten)

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine Matrix über einem Körper $\mathbb{K}$. Dann ist die Determinante von A definiert durch

$$\det(A) := \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^{n} a_{i\pi(i)}\,.$$

Für die Determinante einer Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ schreiben wir auch

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}\,.$$

Explizite Formeln für sehr kleine n

- Für $n = 0$ besteht $\mathcal{S}_0$ aus der leeren Abbildung und in der Leibniz–Formel steht ein Summand mit einem leeren Produkt, welches Eins ergibt.

- Für $n = 1$ enthält $\mathcal{S}_1$ nur die Identität, die eine gerade Permutation ist und somit ist für $A = (a_{11}) \in \mathbb{K}^{1\times 1}$ die Determinante gegeben durch $\det(A) = a_{11}$.

- Für $n = 2$ gibt es neben der Identität id noch die ungerade Permutation $\tau \in \mathcal{S}_2$ die die beiden Elemente vertauscht und für eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{2\times 2}$ erhalten wir die allgemeine Formel

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}(\mathrm{id}) a_{1\,\mathrm{id}(1)} a_{2\,\mathrm{id}(2)} + \operatorname{sgn}(\tau) a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)}$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\,.$$

Sarrus–Formel für $n = 3$

Für $n = 3$ gibt es drei gerade und drei ungerade Permutationen in $\mathcal{S}_3$ und man erhält für $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{3\times 3}$

$$\begin{aligned}\det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\end{aligned}$$

die oft graphisch wie folgt dargestellt wird:

$$\begin{array}{ccc:cc} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \end{array}$$

Produkte entlang durchgezogener Linien entsprechen geraden Permutationen und Produkte entlang gestrichelter Linien enstprechen ungeraden Permutationen entsprechen und werden deswegen mit negativem Vorzeichen verrechnet.

Entwicklungssatz von Laplace

Für allgemeines $n \in \mathbb{N}_0$ kann man aus der Leibniz–Formel durch Umsortierung der Summanden ein rekursives Verfahren zur Berechnung von Determinanten ableiten.

Für eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und $k, \ell \in [n]$ sei $A_{k\ell}$ die $(n-1)\times(n-1)$-Matrix die aus A durch Streichen der k-ten Zeile und ℓ-ten Spalte hervorgeht.

Es gilt für jedes $k \in [n]$

$$\det(A) = \sum_{\ell=1}^{n} (-1)^{k+\ell} a_{k\ell} \det(A_{k\ell})$$

und man nennt diese Formel auch Entwicklung nach der k-ten Zeile.

Genauso ergibt sich für jedes $\ell \in [n]$ die Entwicklung nach der ℓ-ten Spalte durch

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+\ell} a_{k\ell} \det(A_{k\ell}) .$$

Entwicklung nach Laplace für $n = 4$

Entwickelt man $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{4\times 4}$ nach der ersten Zeile erhält man

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} .$$

Genauso erhält man z. B. für die Entwicklung nach der zweiten Spalte die Formel

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = -a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$- a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{42} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} .$$

Hilfreich wenn viele Einträge in der entsprechenden Zeile/Spalte Null sind.

Einfache Rechenregeln für Determinaten

Satz

Für jede Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gelten folgende Rechenregeln:

(i) Falls A eine obere Dreiecksmatrix ist, d. h. $a_{ij} = 0$ für alle $i > j$, dann ist die Determinante von A das Produkt der Elemente auf der Diagonalen von A

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \,.$$

Insbesondere ergibt sich $\det(E_n) = 1$ für die Einheitsmatrix.

(ii) Seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}^{1\times n}$ die Zeilen von A und für ein $k \in [n]$ sei $a_k = a'_k + a''_k$ für zwei Zeilenvektoren a'_k, $a''_k \in \mathbb{K}^{1\times n}$. Dann gilt

$$\det(A) = \det(A') + \det(A'') \,,$$

wobei A' und A'' aus A dadurch hervorgehen, dass die k-te Zeile a_k jeweils durch a'_k bzw. a''_k ersetzt wird.

(iii) Falls A zwei gleiche Zeilen hat, dann ist $\det(A) = 0$.

Rechenregeln für elementare Zeilenumformungen

Satz

Für jede Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gelten folgende Rechenregeln:

(*iv*) Sei B die Matrix die aus A hervorgeht, indem für ein $k \in [n]$ die k-te Zeile mit $\lambda \in \mathbb{K}$ multipliziert wird, dann gilt

$$\det(B) = \lambda \det(A)\,.$$

Insbesondere gilt

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)\,.$$

(*v*) Sei B die Matrix, die aus A durch Vertauschung zweier Zeilen hervorgeht, dann gilt $\det(B) = -\det(A)$.

(*vi*) Sei B die Matrix die aus A hervorgeht, indem das Vielfache einer Zeile auf eine andere addiert wird, dann ändert sich die Determinante nicht, d. h. in diesem Fall gilt $\det(B) = \det(A)$.

Zusammen mit (*i*) erlauben die Rechenregeln (*v*)–(*vi*) die effiziente Berechnung der Determinante durch ein vereinfachtes Gauß-Verfahren.

Beispiel vereinfachtes Gauß-Verfahren

- mit den entsprechenden Operationen aus (v) und (vi) bringen wir die gegebene Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ in eine Matrix $O = (o_{ij})$ in oberer Dreiecksform
- sei k die Anzahl der verwendeten Zeilenvertauschungen, dann gilt wegen (v), (vi) und (i)

$$\det(A) = (-1)^k \cdot \det(O) = (-1)^k \cdot \prod_{i=1}^{n} o_{ii}\,.$$

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 3 \\ 6 & 4 & 1 & 2 \\ -3 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}\,.$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 3 \\ 6 & 4 & 1 & 2 \\ -3 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ + \\ + \\ \end{array} \to \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 3 & -8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \cdot 2 \\ \\ + \end{array}$$

$$\to \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 9 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-3) \\ + \end{array} \to \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = O$$

Für die Determinante von O erhalten wir also $\det(O) = 3 \cdot (-1) \cdot 3 \cdot 8 = -72$ und da wir eine Zeilenvertauschung durchgeführt haben, gilt

$$\det(A) = (-1)^1 \det(O) = -\det(O) = 72\,.$$

Konsequenzen der Rechenregeln

Korollar

Für eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gilt $\det(A) = 0$ genau dann, wenn $\operatorname{rank}(A) < n$.

Beweis: „$\Longrightarrow$“ $\det(A) = 0$ impliziert, dass sich mit dem vereinfachten Gauß-Verfahren eine obere Dreiecksmatrix O mit mindestens einer 0 auf der Diagonalen ergibt. Insbesondere enthält O eine Nullzeile und somit ist die Dimension des Zeilenraums $< n$. ✓

„$\Longleftarrow$“ Die Behauptung ist klar für $n \leqslant 1$. Sei also $n \geqslant 2$ und $\operatorname{rank}(A) < n$. D. h. ein Zeilenvektor von A ist eine Linearkombination der anderen Zeilen und mit Rechenregeln (iv) and (vi) erhalten wir eine Matrix B mit zwei gleichen Zeilenvektoren. Rechenregel (iii) besagt $\det(B) = 0$ und $\det(A) = 0$ folgt. □

Korollar

Für eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gilt $\det(A) \neq 0$ genau dann, wenn A invertierbar ist. □

Bemerkung:

- Rechenregeln (ii) und (iv) nennt man Multilinearität
- Rechenregel (v) heißt alternierend
- die Konsequenz $\det(E_n) = 1$ aus Rechenregel (i) heißt normiert
- diese drei Eigenschaften bestimmen $\det\colon \mathbb{K}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{K}$ eindeutig

Beweis der Rechenregeln für $\det(A) = \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^n a_{i\pi(i)}$

Regel (i): $\pi(i) \geqslant i \ \forall i$ zwingt $\pi(n) = n \Rightarrow \pi(n-1) = n-1 \Rightarrow \dots \Rightarrow \pi(1) = 1$, d.h. $\pi = \mathrm{id}$ ✓

Regeln (ii) und (iv): In der Leibniz-Formel ersetzt sich $a_{k\pi(k)}$ durch:

$$a'_{k\pi(k)} + a''_{k\pi(k)} \quad \text{bzw.} \quad \lambda a_{k\pi(k)} \qquad \checkmark$$

Regel (iii): O.B.d.A. Zeilen $a_1 = a_2$. Für jede Permutation π gibt es eine eindeutige Permutation π' die sich durch die Transposition der Vertauschung von 1 und 2 ergibt, d. h.

$$\pi(1) = \pi'(2) \quad \text{und} \quad \pi(2) = \pi'(1) \quad \text{und} \quad \pi(i) = \pi'(i) \text{ für } i > 2.$$

Da die erste und zweite Zeile gleich ist und π und π' folgt somit

$$\prod_{i=1}^n a_{i\pi(i)} = \prod_{i=1}^n a_{i\pi'(i)} \,.$$

Da die Permutationen π und π' sich genau durch eine Transposition unterscheiden, gilt $\operatorname{sgn}(\pi) = -\operatorname{sgn}(\pi')$ und ihre Beiträge für die Determinate von A heben sich weg. ✓

Regel (v): Wie im Beweis von Regel (iii) lässt sich der Beitrag von π in $\det(B)$ auf den Beitrag von π' in $\det(A)$ zurückführen und wir erhalten die gleiche Produkte mit unterschiedlichen Vorzeichen. ✓

Regel (vi): Folgt direkt aus Regeln (ii), (iii) und (iv). $\square$

Determinantenfunktion ist multiplikativ

Satz

Für Matrizen $A,\ B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gilt

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) = \det(B \cdot A)\,.$$

- Für den nicht ganz einfachen Beweis, der auf den Rechenregeln basiert, verweisen wir auf das Skript.

Korollar

Für jede invertierbare Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gilt

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}\,.$$

Beweis: Die Matrix A ist invertierbar, also gilt $\det(A) \neq 0$ und wir erhalten:

$$1 = \det(E_n) = \det(A^{-1} \cdot A) \overset{\text{Satz}}{=} \det(A^{-1}) \cdot \det(A) \qquad \square$$

Endomorphismen

Definition

Lineare Abbildungen $f\colon V \longrightarrow V$ von einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V nach sich selbst heißen Endomorphismen.

- für eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eines n-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V erinnern wir an die Koordinatenabbildung $\kappa_{\mathcal{B}}\colon V \longrightarrow \mathbb{K}^n$ definiert durch

$$v \longmapsto (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

  für die eindeutigen Skalare aus der Linearkombination der Basis $\mathcal{B}$ die v ergibt, d. h.

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

- $\kappa_{\mathcal{B}}$ ist linear und bijektiv und somit ein Isomorphismus zwischen V und $\mathbb{K}^n$
- für Endomorphismen $f\colon V \longrightarrow V$, Basen $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V ist

$$\kappa_{\mathcal{B}} \circ f \circ \kappa_{\mathcal{B}}^{-1}\colon \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

  linear und somit eine Multiplikation mit einer Abbildungsmatrix $M_{\mathcal{B}}(f)$
- $M_{\mathcal{B}}(f)$ bildet die Koordinaten von v auf die Koordinaten von $f(v)$ ab
- in der j-te Spalte $M_{\mathcal{B}}(f) \cdot e_j$ finden sich also die Koordinaten von $f(v_j)$
- zum Verständnis von f suchen wir eine Basis $\mathcal{B}$ für die $M_{\mathcal{B}}(f)$ “einfach” ist

Spezialfall $V = \mathbb{K}^n$

- für $V = \mathbb{K}^n$ und Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ ist $\kappa_{\mathcal{B}}$ eine Multiplikation mit einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $Av_j = e_j$
- die Umkehrabbildung $\kappa_{\mathcal{B}}^{-1}$ und entsprechend die Inverse A^{-1} erfüllen also $A^{-1}e_j = v_j$, d. h. die Spalten von A^{-1} sind die Basisvektoren $v_1, \dots, v_n$

Beispiel in $\mathbb{R}^3$

Gegeben sei folgende Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ und $u \in \mathbb{R}^3$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Wir suchen bezüglich $\mathcal{B}$ die Koordinaten von u. Wir erhalten die Spalten der Inversen A^{-1} der Koordinatenabbildung durch die Basis und invertieren A^{-1}

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) = (E_n|A)$$

und erhalten die Koordinaten von u bezüglich $\mathcal{B}$ durch

$$\kappa_{\mathcal{B}}(u) = Au = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Eigenvektoren

Ziel:

- für gegebenes f finde (wenn möglich) eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$, so dass die Koordinatenabbildung $M_{\mathcal{B}}(f)$ die Basisvektoren nur streckt, aber nicht dreht
- solche Endomorphismen heißen diagonalisierbar

Definition (Eigenvektoren und Eigenwerte)

Sei $f\colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Ein Vektor $v \in V \setminus \{0_V\}$ heißt Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$, falls

$$f(v) = \lambda v\,.$$

Ganz analog für eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0_{\mathbb{K}^n}\}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$ falls $Av = \lambda v$.

Ziel: Wir suchen also eine Basis des $\mathbb{K}^n$ bestehend aus Eigenvektoren der entsprechenden Abbildungsmatrix.

Eigenvektoren berechnen

Idee:

- v Eigenvektor von A zum Eigenwert λ
  $\iff Av = \lambda v$
  $\iff (A - \lambda E_n)v = 0$
- λ Eigenwert von A
  $\iff$ homogenes Gleichungssystem $(A - \lambda E_n)x = 0$ hat nicht-triviale Lösungen
  $\iff \operatorname{rank}(A - \lambda E_n) < n$
  $\iff \det(A - \lambda E_n) = 0$

Satz

Die Eigenwerte einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms der Matrix A

$$\chi_A(\lambda) := \det(A - \lambda E_n)$$

mit der Variable λ. □

- für einen Eigenwert λ ist der Kern von $(A - \lambda E_n)$ der Eigenraum zum Eigenwert λ, d. h. die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems $(A - \lambda E_n)x = 0$ ist der Eigenraum
- die Lösungen/Vektoren im Eigenraum ungleich dem Nullvektor sind die Eigenvektoren zum Eigenwert λ

Beispiel in $\mathbb{R}^{2\times 2}$

Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

erhalten wir das charakteristische Polynom

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_n) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)(3-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 9\lambda + 20\,.$$

Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen von $\chi_A(\,\cdot\,)$ die wir mit der p-q-Formel bestimmen:

$$\lambda_1 = 4 \qquad \text{und} \qquad \lambda_2 = 5\,.$$

Die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = 4$ sind im Kern der Matrix $(A - \lambda_1 E_n)$ ohne dem Nullvektor

$$A - \lambda_1 E_n = \begin{pmatrix} 6-4 & -1 \\ 2 & 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \text{EV } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

ebenso für den Eigenwert $\lambda_2 = 5$

$$A - \lambda_2 E_n = \begin{pmatrix} 6-5 & -1 \\ 2 & 3-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \text{EV } v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Diagonalmatrizen

Definition

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Eine $(n \times n)$-Matrix $D \in \mathbb{K}^{n \times n}$ der Form

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ heißt Diagonalmatrix.

Bemerkungen:

- der i-te Einheitsvektor e_i ein Eigenvektor der Matrix D zum Eigenwert λ_i
- Diagonalmatrizen können wir einfach potenziern berechnen für $k \in \mathbb{N}_0$

$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

- D ist genau dann, invertierbar, wenn alle $\lambda_i \neq 0$

Diagonalisierbarkeit

Definition (diagonalisierbare Abbildungen)

Ein Endomorphismus $f\colon V \longrightarrow V$ heißt diagonalisierbar, wenn es eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, so dass die Abbildungsmatrix $M_{\mathcal{B}}(f)$ (Matrix der Abbildung $\kappa_{\mathcal{B}} \circ f \circ \kappa_{\mathcal{B}}^{-1}$) eine Diagonalmatrix ist.

Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt diagonalisierbar, wenn die lineare Abbildung $v \longmapsto Av$ diagonalisierbar ist.

Satz

Ein Endomorphismus $f\colon V \longrightarrow V$ eines endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraums V ist genau dann diagonalisierbar, wenn V eine Basis hat, die aus Eigenvektoren von f besteht.

Beweis: „$\Leftarrow$“ Sei $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V, so dass für alle $i \in [n]$ der Vektor v_i ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_i \in \mathbb{K}$ ist. Dann ist $f(v_i) = \lambda_i v_i$ und

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

folgt, da die i-te Spalte von $M_{\mathcal{B}}(f)$ die Koordianten von $f(v_i)$ bzgl. $\mathcal{B}$ enthält.

„$\Rightarrow$“ Sei nun umgekehrt $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V, so dass $M_{\mathcal{B}}(f)$ eine Diagonalmatrix ist. Für jedes $i \in [n]$ gilt dann $f(v_i) = \lambda_i v_i$. Damit ist $\mathcal{B}$ eine Basis von V, die aus Eigenvektoren von f besteht. $\square$

Ähnlichkeit

Definition (ähnliche Matrizen)

Zwei $(n \times n)$-Matrizen A, B über einem Körper $\mathbb{K}$ heißen ähnlich, falls es ein invertierbare Matrix $P \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gibt, so dass

$$A = P \cdot B \cdot P^{-1}\,.$$

Bemerkung:

- Ähnlichkeit definiert eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{K}^{n\times n}$:

$$A = E_n A E_n = E_n A E_n^{-1} \qquad \text{(reflexiv)}$$

$$\begin{aligned} &A = PBP^{-1} \\ &\qquad \Longrightarrow B = P^{-1}AP = QAQ^{-1} \text{ für } Q = P^{-1} \qquad \text{(symmetrisch)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &A = PBP^{-1} \text{ und } B = QCQ^{-1} \\ &\qquad \Longrightarrow A = P \cdot QCQ^{-1} \cdot P^{-1} = RCR^{-1} \text{ für } R = PQ, \\ &\qquad \text{da } (PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1} \text{ gilt} \qquad \text{(transitiv)} \end{aligned}$$

Invertierbarkeit und Basiswechsel

Lemma

Zwei $(n \times n)$-Matrizen A und A' über einem Körper $\mathbb{K}$ sind genau dann ähnlich, wenn $\mathbb{K}^n$ eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ hat, so dass die Abbildungsmatrix $M_{\mathcal{B}}(f_A)$ der Abbildung $f_A(v) = Av$ genau die Matrix A' ist, d. h. $M_{\mathcal{B}}(f_A) = A'$.

Beweis: „$\Longrightarrow$" Sei $A = PA'P^{-1}$. Da P invertierbar ist, sind die Spalten von P linear unabhängig und bilden somit eine Basis von $\mathbb{K}^n$. Sei $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ diese Basis von $\mathbb{K}^n$. Wir bestimmen die Abbildungsmatrix $M_{\mathcal{B}}(f_A)$.
Für alle $j \in [n]$ ist Pe_j genau die j-te Spalte von P, also ist $Pe_j = v_j$ und somit

$$APe_j = Av_j \qquad \text{und} \qquad P^{-1}v_j = e_j\,.$$

Insbesondere entspricht P^{-1} der Koordinatenabbildung $\kappa_{\mathcal{B}}$ zu der Basis $\mathcal{B}$. Damit ist die j-te Spalte von $P^{-1}AP$ gleich $P^{-1}APe_j = P^{-1}Av_j$ der Koordinatenvektor von Av_j bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ und $M_{\mathcal{B}}(f_A) = P^{-1}AP = A'$ folgt. ✓

„$\Longleftarrow$" Sei umgekehrt $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von $\mathbb{K}^n$, so dass $M_{\mathcal{B}}(f_A) = A'$. Sei P die Matrix, deren Spalten genau die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ sind. Wieder ist P^{-1} die Matrix zu der Koordinatenabbildung $\kappa_{\mathcal{B}}$. Für jedes $j \in [n]$ ist $P^{-1}Av_j$ der Koordinatenvektor von Av_j bezüglich der Basis $\mathcal{B}$, also die j-te Spalte von A' und wegen $Pe_j = v_j$ folgt $B = P^{-1}AP$. □

Korollar

Eine Matrix A ist genau dann diagonalisierbar, wenn sie einer Diagonalmatrix ähnlich ist. □

Diagonalisierung von Matrizen

Für eine gegebene Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ überprüft und berechnet man Diagonalisierbarkeit wie folgt:

(*1*) bestimme die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ über die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_n)$

(*2*) für jeden Eigenwert λ_s bestimme eine Basis $\mathcal{B}_s$ des Eigenraums $\ker(A - \lambda_s E_n)$ durch Lösen des homogenen Gleichungssystems $(A - \lambda_s E_n)x = 0$

(*3*) Vereinigung der Basen $\mathcal{B} = \dot\bigcup_{s\in[r]} \mathcal{B}_s$ der Eigenräume sind linear unabhängig, sind dies also n Vektoren, dann bilden diese eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ des $\mathbb{K}^n$ aus Eigenvektoren von A, andernfalls ist A nicht diagonalisierbar

(*4*) die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ definieren die Spalten von P^{-1} und mit dem Gauß–Jordan-Verfahren invertiert man P^{-1} um P zu erhalten

(*5*) dann gilt

$$D = PAP^{-1} \qquad \text{bzw.} \qquad A = P^{-1}DP$$

für eine Diagonalmatrix $D = (d_{ij})$ auf deren Diagonale nur die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ von A stehen, insbesondere gilt

$$Av_i = d_{ii}v_i\,,$$

der Eigenwert λ_s kommt also auf der Diagonalen von D genau so oft vor, wie die Dimension seines Eigenraums ist

Beispiel

Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

hatten wir bereits die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 4 \qquad \text{und} \qquad \lambda_2 = 5$$

und die eindimensionalen Eigenräume

$$\mathcal{E}(\lambda_1) = \{\alpha v_1 \colon \alpha \in \mathbb{R}\} \qquad \text{und} \qquad \mathcal{E}(\lambda_2) = \{\alpha v_2 \colon \alpha \in \mathbb{R}\}$$

für

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

berechnet. Wir erhalten also eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ des $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren und

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{\text{G–J}} \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad PAP^{-1} = D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Weitere diagonalisierbare Beispiele

Diagonalisierbare (3×3)-Matrix über $\mathbb{R}$ mit Eigenwert 0

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -3 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

hat Eigenwerte $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$ und $\lambda_3 = -1$ deren Eigenräume jeweils eindimensional sind. Also ist A diagonalisierbar und es gilt z. B.

$$A = P^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P \quad \text{für} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Diagonalisierbare (3×3)-Matrix über $\mathbb{R}$ mit zwei Eigenwerten

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 0 \\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & -3 \end{pmatrix}$$

hat Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -3$ und für die Eigenräume $\mathcal{E}(\lambda_1)$ und $\mathcal{E}(\lambda_2)$ gilt $\dim(\mathcal{E}(\lambda_1)) = 1$ und $\dim(\mathcal{E}(\lambda_2)) = 2$. Also ist A diagonalisierbar und es gilt z. B.

$$A = P^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} P \quad \text{für} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Nicht-diagonalisierbare Beispiele

Nicht-diagonalisierbare (2×2)-Matrix über $\mathbb{R}$ ohne Eigenwerte

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

hat ein charakteristisches Polynom $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + 6$ ohne reelle Nullstellen. Also hat A keine Eigenwerte, keine Eigenvektoren und ist nicht diagonalisierbar.

Nicht-diagonalisierbare (5×5)-Matrix über $\mathbb{R}$ mit zu „kleinen“ Eigenräumen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

hat Eigenwerte $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -4$. Aufgrund der einfachen Dreiecksstruktur kann man die Ränge 3 und 4 von $A - \lambda_1 E_n$ und $A - \lambda_2 E_n$ direkt ablesen und mit der Dimensionsformal so die Dimensionen der Kerne mit $2 = 5 - 3$ und $1 = 5 - 4$ bestimmen. D. h. es gibt nur $2 + 1$ linear unabhängige Eigenvektoren von A und A ist deswegen nicht diagonalisierbar.